

# Simulation numérique des écoulements anisothermes par Proper Generalized Decomposition (PGD)

A. DUMON<sup>a</sup>, C. ALLERY<sup>a</sup> AND A. AMMAR<sup>b</sup>

a. LEPTIAB, Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 01

b. Arts et Metiers ParisTech, 2 Bvd du Ronceray, 49035 Angers Cedex 01

## Résumé :

*Dans cette communication, la PGD, qui est une méthode de réduction de modèle a priori consistant à rechercher la solution d'une EDP sous forme séparée, sera appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes anisotherme. Les performances de la PGD seront comparées à une résolution standard aussi bien en terme de temp de calcul qu'en terme de précision.*

## Abstract :

*In this communication, the Proper Generalized Decomposition method (PGD), which is an a priori reduction model method, consisting in searching a solution of EDP in separated form, will be applied to solve non-isothermal Navier-Stokes equations. The performances of the PGD method will be compared to the standard resolution technique in term of CPU time as well as in term of accuracy.*

**Mots clefs :** réduction de modèle; PGD; convection mixte

## 1 Introduction

La simulation numérique des écoulements par des méthodes classiques peut nécessiter des temps de simulation longs et une capacité de stockage importante, ce qui peut être handicapant lorsque l'on souhaite faire du contrôle notamment. C'est pourquoi ces dernières années des méthodes de réduction de modèle comme la POD (Proper Orthogonal Decomposition), la CVT (Central Voronoi Tessellations) ou encore l'APR (A Priori Reduction) ont été développées.

Dans cette communication nous nous intéressons à une autre méthode de réduction, à savoir la Proper Generalized Decomposition. C'est une méthode itérative qui consiste à rechercher la solution  $u$  d'une EDP sous la forme séparée suivante :

$$u(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^Q \prod_{k=1}^N F_{ki}(x_k) \quad (1)$$

où les  $N$  variables  $x_i$  peuvent être des variables scalaires ou vectorielles, spatiales ou temporelles ou encore n'importe quel paramètre de contrôle du problème. Ainsi, si  $M$  degrés de liberté sont utilisés pour discrétiser chacune des variables, le nombre total d'inconnues représentant la solution sera de  $Q \times N \times M$  au lieu de  $M^N$  avec une approche traditionnelle. Dans la majorité des cas, où la solution est suffisamment régulière, le nombre de terme  $Q$  de la somme est relativement faible et dans tous les cas, l'approximation PGD converge vers la solution. Il faut noter ici, que les fonctions ne sont pas connue 'a priori'. Elles sont calculées de manière itérative en introduisant, à chaque itération, la forme séparée dans le problème et en résolvant le système non-linéaire qui en découle.

La méthode PGD, initialement appelée radial approximation, à tout d'abord été appliquée à la résolution de problèmes de mécanique du solide [1] sous forme de séparation espace-temps. Toujours dans

le cadre d'une séparation espace-temps, la PGD a été appliquée à la résolution de problèmes stochastiques [2] (dans ce contexte, la PGD était nommée Generalized Spectral Decomposition). Ammar et al. [3] ont ensuite étendu la méthode à la résolution de problèmes multidimensionnels. Enfin, la PGD a été appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes isotherme dans les cas stationnaire et instationnaire [4, 5]. Cette dernière application a été effectuée avec une séparation sur les variables d'espace uniquement.

Le but de cette communication est de montrer la capacité de la PGD à traiter des écoulements anisothermes. Après avoir rappelé l'idée générale de la PGD, les résultats dans le cas d'une cavité différentiellement chauffée seront présentés.

## 2 Description de la méthode PGD

Afin de simplifier la présentation et sans perdre le caractère général de la méthode, la PGD sera détaillée dans le cas d'une décomposition spatiale 2D. On suppose que le problème à résoudre s'exprime de la manière suivante :

$$\text{Trouver } U(x,y) \text{ tel que } \begin{cases} \mathcal{L}(U) = \mathcal{G} & \text{dans } \Omega \\ + \text{Conditions limites} \end{cases} \quad (2)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur différentiel linéaire<sup>1</sup> et  $\mathcal{G}$  le second membre.

La PGD consiste à rechercher une approximation de la solution  $U(x,y) \in \Omega = X \times Y \subset \mathbb{R}^2$  avec  $x \in X \subset \mathbb{R}$  et  $y \in Y \subset \mathbb{R}$  telle que :

$$U(x,y) \approx U_m(x,y) = \sum_{i=1}^m \alpha^i F^i(x) G^i(y) \quad (3)$$

où  $U_m(x,y)$  est l'approximation PGD d'ordre  $m$  de la solution. A chaque itération, la solution est enrichie d'un terme supplémentaire  $\alpha^{m+1} F^{m+1}(x) G^{m+1}(y)$ . La PGD peut se décomposer en trois étapes. Pendant la première étape, appelée étape d'enrichissement, les fonctions  $F^{m+1}$  et  $G^{m+1}$  sont obtenues en résolvant un système non-linéaire de petite taille. Ensuite, la seconde étape, appelée étape de projection, consiste à améliorer la qualité de l'approximation en calculant les  $m+1$  coefficients  $\alpha^i$  par la résolution d'un système linéaire de taille  $(m+1)$ . Enfin, une étape d'évaluation de la convergence est réalisée. Dans la suite chacune de ces trois étapes est détaillée.

### a) Etape d'enrichissement

A l'itération  $m+1$ , l'approximation PGD d'ordre  $m$  de la solution est supposée connue. Lors de cette étape, on cherche à calculer les fonctions  $F^{m+1}(x)$  et  $G^{m+1}(y)$ . On cherche donc  $U_{m+1}(x,y)$  telle que

$$U_{m+1}(x,y) = \sum_{i=1}^m \alpha^i F^i(x) G^i(y) + F^{m+1}(x) G^{m+1}(y) \quad (4)$$

En introduisant l'équation (4) dans le problème (2), on obtient :

$$\mathcal{L}(U_{m+1}) = \mathcal{G} + Res^{m+1} \quad (5)$$

où  $Res^{m+1}$  est le résidu qui apparaît du fait que  $U_{m+1}$  est une approximation de la solution. En projetant l'équation précédente par rapport à chacune des fonctions  $F^{m+1}(x)$  et  $G^{m+1}(y)$  et en imposant que le résidu  $Res^{m+1}$  soit orthogonal à  $F^{m+1}(x)$  et  $G^{m+1}(y)$ , on obtient le système non linéaire suivant :

$$\left\langle \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^m \alpha^i F^i(x) G^i(y) + F^{m+1}(x) G^{m+1}(y) \right), F^{m+1} \right\rangle_{L^2(X)} = \left\langle \mathcal{G}, F^{m+1} \right\rangle_{L^2(X)} \quad (6)$$

<sup>1</sup>Si l'opérateur n'est pas linéaire, il est nécessaire de le linéariser.

$$\langle \mathcal{L}(\sum_{i=1}^m \alpha^i F^i(x)G^i(y) + F^{m+1}(x)G^{m+1}(y)), G^{m+1} \rangle_{L^2(Y)} = \langle \mathcal{G}, G^{m+1} \rangle_{L^2(Y)} \quad (7)$$

La résolution de ces deux équations par une méthode du point fixe nous donne les nouvelles fonctions  $F^{m+1}$  et  $G^{m+1}$ .

### b) Etape de projection

Afin d'améliorer la précision de la décomposition, les coefficients  $\alpha^i$  sont maintenant recherchés de manière à ce que le résidu du problème soit orthogonal à chacun des  $m+1$  produits de fonctions  $F^i G^i$ . Cette étape consiste donc à rechercher  $U_{m+1}(x, y)$  telle que :

$$U_{m+1}(x, y) = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i F^i(x)G^i(y) \quad (8)$$

En introduisant la solution (8) dans (2) et en projetant selon chacun des produits  $F^i G^i$ , on obtient le système d'équation suivant :

$$\langle \mathcal{L}(\sum_{i=1}^{m+1} \alpha^i F^i(x)G^i(y)), F^k G^k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathcal{G}, F^k G^k \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m+1 \quad (9)$$

La résolution de ce système linéaire donne les coefficients  $\alpha^i$ .

### c) Etape d'estimation de la convergence

Si la norme  $L^2$  du résidu défini par l'équation (5) est inférieur à un coefficient  $\epsilon$  fixé par l'utilisateur, l'algorithme PGD est convergé. Sinon, une autre itération au moins est nécessaire.

## 3 Equations décrivant un écoulement anisotherme

On considère un fluide incompressible Newtonien dans un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ . Les propriétés du fluide sont supposées constante et une approximation de Boussinesq est réalisée. Ainsi, les équations associées aux écoulements anisothermes peuvent s'écrire sous forme adimensionnelles :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} - \nabla p + Ri \theta \vec{y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{Re Pr} \Delta \theta \end{cases} \quad (10)$$

où  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  est le champ de vitesse,  $\theta$  la température et  $p$  la pression.  $Re$  est le nombre de Reynolds,  $Pr$  le nombre de Prandtl et  $Ri$  le nombre de Richardson qui caractérise le régime convectif du fluide. En notant  $Gr$ , le nombre de Grashof, ce nombre de Richardson est défini par la relation  $Ri = Gr/Re^2$ .

Le problème (10) est résolu en utilisant une méthode de prédiction correction permettant de découpler la vitesse et la pression. De plus la discrétisation spatiale a été effectuée en utilisant une méthode volumes finis sur un maillage décalé.

Résoudre ce problème par PGD consiste donc à rechercher, à chaque pas de temps  $n$ , les inconnues sous forme séparées de la manière suivante :

$$u_i^n = \sum_{l=1}^{N_{u_i}} \alpha_{u_i}^l F_{u_i}^l(x) G_{u_i}^l(y) \quad p^n = \sum_{l=1}^{N_p} \alpha_p^l F_p^l(x) G_p^l(y) \quad \theta^n = \sum_{l=1}^{N_\theta} \alpha_\theta^l F_\theta^l(x) G_\theta^l(y) \quad (11)$$

et à résoudre les différentes équations associées à l'aide de la méthodologie décrite dans la section 2.

## 4 Application de la méthode PGD pour résoudre l'écoulement dans une cavité entraînée anisotherme

Dans cette partie, on s'intéresse à l'écoulement d'un fluide incompressible dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Deux températures différentes sont imposées sur les murs verticaux, et les murs horizontaux sont considérés comme adiabatiques. De plus, les murs verticaux sont animés d'une vitesse verticale  $U_0$  ascendante à gauche et descendante à droite. Les équations du problème discrétisé par volumes finis ont été résolues d'une part par méthode PGD et d'autre part avec un solveur "standard" (bi-gradient conjugué) pour un nombre de Grashoff fixé à  $10^4$  et un nombre de Prandtl égal à 0.71 (caractéristique de l'air) et avec un pas de temps  $\delta t = 10^{-3}$ . Dans la suite, trois nombres de Richardson seront considérés ( $Ri = 0.1$ ,  $Ri = 1$  et  $Ri = 10$ ). Les lignes pointillées sur la figure de droite représentent les endroits où seront visualisés les vitesses verticales et horizontales. Dans la suite,  $N_h$  représente le nombre de noeuds du maillage dans chaque direction.

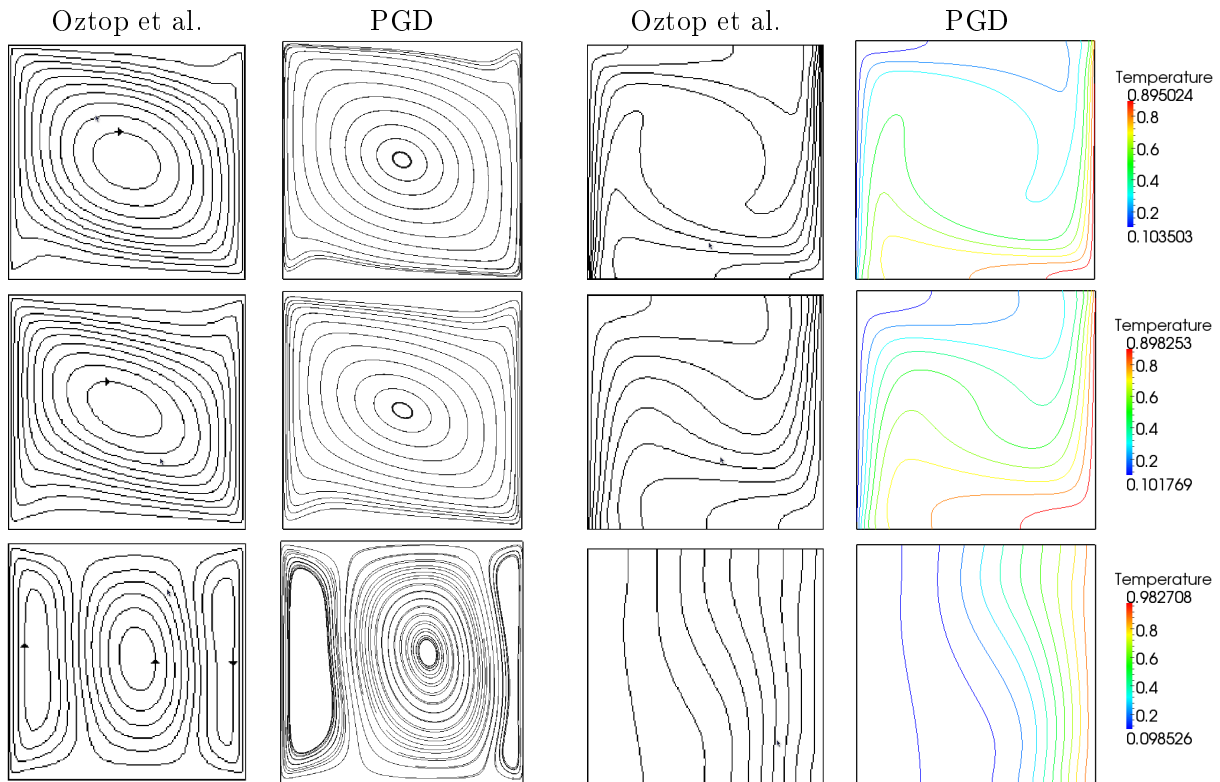
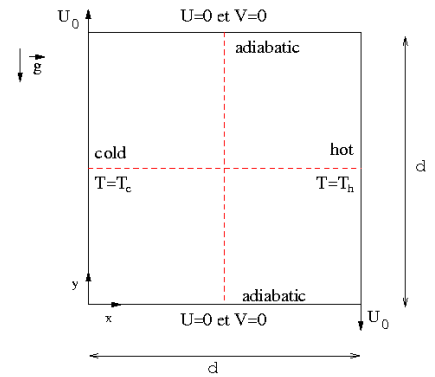


FIG. 1 – Comparaison des lignes de courants (gauche) obtenue par PGD avec celles de la littérature et des isocontours de température (droite) obtenue par PGD avec celles d'Oztop et al. [6] pour  $Ri = 0.1$  (haut),  $Ri = 1$  (milieu),  $Ri = 10$  (bas).

La figure 1 représente les lignes de courants et les isocontours de températures obtenus par PGD avec  $N_h = 100$  comparés à ceux obtenus par Oztop et al. [6], à convergence, c'est à dire lorsque le régime stationnaire est atteint. On constate que la PGD retrouve bien les résultats de la littérature. On retrouve pour des nombres de Richardson égaux à 0.1 et 1 un comportement proche de celui d'une cavité entraînée isotherme avec un léger aplatissement du vortex principal pour  $Ri = 1$ . Par contre

lorsque l'on augmente la valeur du nombre de Richardson à 10 la configuration des lignes de courants est composée de trois vortex alignés dans le sens vertical. Le fluide remonte le long du mur chaud en raison de la poussée d'archimède et est entraîné près du mur froid par les forces de cisaillement. Cela implique la création de deux vortex le long des parois rendant le transfert thermique de la droite vers la gauche possible. Concernant les isocontours de température, on remarque que plus le nombre de Richardson augmente, plus le gradient de température près des murs verticaux diminue, ce qui a pour effet diminuer le transfert thermique.

Les vitesses horizontales en  $x = 0.5$  et verticales en  $y = 0.5$  calculées par PGD et à l'aide du solveur standard sont tracées sur la figure 2. Sur cette figure on constate que les résultats obtenus par PGD sont similaires à ceux obtenus à l'aide du solveur standard. En accord avec la littérature, on observe également que le profil de vitesse horizontale s'inverse lorsque le nombre de Richardson augmente. En effet pour  $Ri = 0.1$ , la convection forcée est dominante et la vitesse tourne dans le sens négatif. Lorsque le nombre de Richardson augmente, l'influence de la température devient prépondérante et le profil de vitesse horizontale s'inverse à  $Ri = 10$  pour favoriser un écoulement dans le sens positif au centre de la cavité.

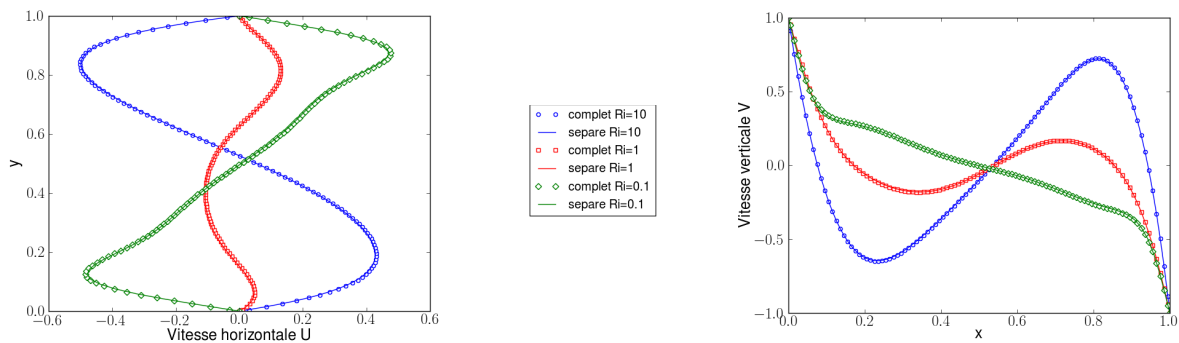


FIG. 2 – Comparaison des vitesses horizontales en  $x = 0.5$  (gauche) et des vitesses verticales en  $y = 0.5$  (droite) obtenue par PGD et à l'aide du solveur standard pour  $Ri = 0.1$ ,  $Ri = 1$  et  $Ri = 10$ .

Afin de confirmer ces résultats, définissons les nusselts moyens à l'est ( $Nu_e$ ) et à l'ouest ( $Nu_w$ ) par

$$Nu_e = -\frac{(\partial\Theta/\partial X)_e}{\Theta_h - \Theta_c} \quad Nu_w = -\frac{(\partial\Theta/\partial X)_w}{\Theta_h - \Theta_c} \quad (12)$$

La figure 3 représente, pour des nombres de Richardson égaux à 0.1, 1 et 10, les nombres de Nusselts à l'est et à l'ouest obtenus par PGD et à l'aide du solveur standard. Cette figure confirme les obser-

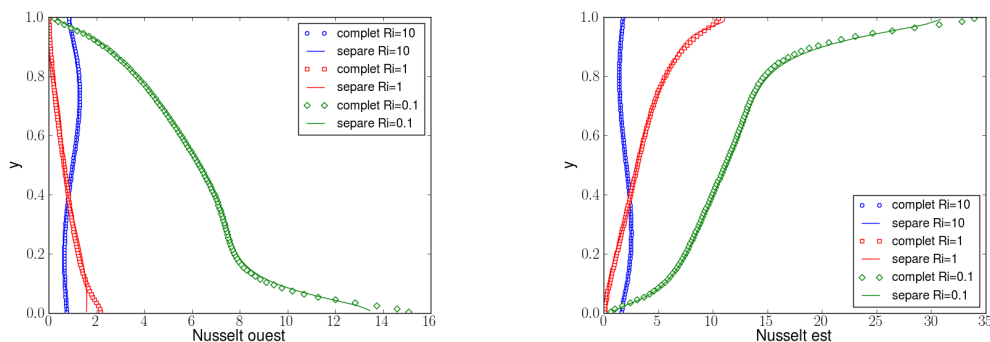


FIG. 3 – Comparaison des Nusselts à l'ouest (gauche) et à l'est (droite) obtenue par PGD et à l'aide du solveur standard pour  $Ri = 0.1$ ,  $Ri = 1$  et  $Ri = 10$ .

vations faite sur la figure 1, à savoir, une diminution du gradient de température le long des parois

mobiles lorsque le nombre de Richardson augmente et donc une augmentation de la stratification de la température. Les résultats obtenus par PGD sont là aussi en accord avec ceux obtenus par le solveur standard.

Le rapport temps de calcul par simulation avec le solveur standard ( $T_{Stand}$ ) sur temps de calcul par simulation PGD ( $T_{PGD}$ ) est consigné dans le tableau 1 pour des simulations effectuées avec nombre de noeuds variant de 61 à 301 dans chaque direction. On observe qu'à partir de 200 noeuds dans chaque direction la PGD est plus rapide que le solveur standard pour chacun des nombres de Richardson considérés. En effet, pour un maillage de taille  $301 \times 301$  la PGD est six fois plus rapide que le solveur standard pour  $Ri = 10$ , cinq fois plus rapide pour  $Ri = 1$  et trois fois plus rapide pour  $Ri = 0.1$ .

Nombre de noeuds dans chaque direction	$T_{Stand}/T_{PGD}$		
	$Ri = 10$	$Ri = 1$	$Ri = 0.1$
61	0.26	0.32	0.16
101	0.56	0.6	0.58
151	0.96	1.86	0.77
201	3.21	3.67	1.60
251	4.15	4.20	2.68
301	6.33	5.20	3.7

TAB. 1 – Rapport des temps de calcul pour la résolution des équations de Navier-Stokes anisotherme.

Les performances en terme de temps de simulations sont liés au nombre de fonctions PGD et au nombre d'itérations du point fixe nécessaires à la convergence de la méthode. Ces valeurs évoluant très peu en fonction de la taille du maillage utilisé, à partir d'une certaine taille de maillage la PGD devient plus rapide que le solveur standard.

## 4.1 Conclusion

Nous avons montré dans cette communication que la PGD est capable de résoudre les équations de Navier-Stokes anisotherme de manière précise tout en gagnant du temps par rapport à un solveur standard (à partir de 250 noeuds dans chaque direction). Ce travail constitue une première tentative de résolution de problème à convection mixte. Dans l'avenir, plusieurs développements sont envisagés. Tout d'abord l'extension au cas 3D devrait permettre de gagner encore plus de temps par rapports aux solveurs traditionnels. Ensuite, le fait de passer le temps comme une variable de la décomposition serait une alternative originale aux schémas d'intégration temporels. Cependant, dans ce genre de problème, la difficulté réside dans le taux de convergence d'un problème 4D.

## Références

- [1] Ladeveze, P. New approaches and Non-Incremental Methods of Calculation. *Nonlinear Computational Structural Mechanics, Springer Verlag* (1999)
- [2] Nouy, A. and Le Maitre, O.P. Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems *J.Comput.Phys* (2007) **8** :283–288.
- [3] Ammar, A. and Mokdad, B. and Chinesta, F. and Keunings, R. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* (2006) **139** :153–176.
- [4] Dumon, A. and Allery, C. and Ammar, A. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier-Stokes equations *Journal of Computational Physics* (2011) **230** :1387–1407.
- [5] Dumon, A. and Allery, C. and Ammar, A. Proper Generalized Decomposition method for incompressible flows in stream-vorticity formulation *European Journal of Computational Mechanics* (2010) **19** :591–617.
- [6] Oztop, H.F. and Dagtekin, I., Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2004) **47** :1761–1769.