

Simulation numérique de transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité de type Rayleigh-Bénard

Hamdi MOUMNI¹, Nasreddine Benkacem^{2*}, Nader BEN CHEIKH², Brahim BEN BEYA² & Taeib LILI².

¹ Laboratoire des Rayonnements Thermiques, Département de Physique
Faculté des Sciences de Tunis, 2091 Tunis Tunisie.

² Laboratoire de Mécanique des fluides, Département de Physique
Faculté des Sciences de Tunis, 2091 Tunis Tunisie.

¹hamdi.moumni@yahoo.fr, ^{2*}nasreddine_ouertatani@yahoo.fr

Résumé -

La présente investigation porte sur une étude numérique de convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité de type Rayleigh-Bénard. La méthode numérique est basée sur un schéma de type volumes finis du second ordre et une méthode de projection. Une approche multigrille est utilisée pour accélérer la convergence de l'équation de Poisson. Nous allons étudier dans une première partie l'effet des conditions initiales relatives à la température (θ_{int}) sur l'écoulement du fluide. Dans une deuxième étape, nous déterminons le nombre de Rayleigh critique (Ra_c) au-delà duquel les particules fluides se mettent en mouvement et l'écoulement devient instationnaire. Enfin une application physique portant sur l'étude de l'effet des paramètres de contrôle de notre configuration, à savoir le rapport de forme (A) et la nature du fluide (Pr) sera par la suite présentée.

Mots clés : Convection naturelle, Rayleigh-Bénard, simulation numérique.

Nomenclature

H	hauteur de la cavité, m	u^*	vitesse intermédiaire
L	largeur de la cavité, m	(u^+, v^+)	composantes adimensionnelles de la vitesse
g	champ de pesanteur, $m.s^{-2}$	(x^+, y^+)	coordonnées cartésiennes adimensionnelles
Ra	nombre de Rayleigh	θ	température adimensionnelle
Nu	nombre de Nusselt	ΔT	écart de température entre la paroi chaude et la paroi froide, K
Nu_{moy}	nombre de Nusselt moyen	p^+	pression adimensionnelle
T_f	température sur la paroi froide, K	t^+	temps adimensionnel
T_c	température sur la paroi chaude, K		
u_0	vitesse caractéristique, $m.s^{-1}$		
$u_i (u, v)$	vecteur vitesse en deux dimensions.		
C_p	capacité calorifique massique à pression constante, $J.Kg^{-1}.K^{-1}$		
p	pression du fluide, Pa		
A	rapport de forme.		
ρ_0	masse volumique de référence, $Kg.m^{-3}$		
p_0	pression de référence, Pa		
			<i>Symboles grecs</i>
		α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
		β	dilatation thermique, K^{-1}
		λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
		ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
		ρ	masse volumique du fluide $Kg.m^{-3}$

1. Introduction

Dans ce travail, nous avons mené une étude numérique portant sur un problème de convection naturelle en cavités, de fluides newtoniens incompressibles. Plusieurs conditions aux limites relatives à différentes configurations ou applications physiques peuvent être

envisagées et étudiées. Nous allons essentiellement nous intéresser à des cavités bidimensionnelles chauffées par le bas T_c et refroidie par le haut T_f , les deux parois verticales étant adiabatiques ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$). Cette configuration est relative au problème de type Rayleigh-Bénard [1, 5, 6, 9, 8]. Nous allons étudier dans une première partie l'effet des conditions initiales relatives à la température (θ_{int}) sur l'écoulement du fluide à l'intérieur d'une cavité carrée bidimensionnel rempli d'air pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^4$ relativement à une grille à pas non uniformes de dimension 64×64 . Dans une deuxième étape, nous déterminons la valeur du nombre de Rayleigh critique $(Ra_c)_I=1707.21$ pour laquelle les particules fluides se mettent en mouvement dans une cavité bidimensionnelle infinie rempli d'air. Enfin une application physique portant sur l'étude de l'effet des paramètres de contrôle de notre configuration, à savoir le rapport de forme défini par $A=L/H$ et le nombre de Prandtl, (caractérisant la nature du fluide). La configuration du problème peut être représentée par le schéma de la figure 1.

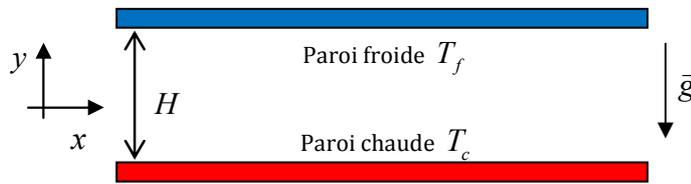


Figure 1. Configuration de Rayleigh-Bénard pour une cavité infinie ($T_c > T_f$).

2. Approche Numérique

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de conservation de la masse (1), de conservation de quantité de mouvement (2) ainsi que l'équation de conservation de l'énergie (3) [7]. Pour simplifier les équations du problème nous allons tenir compte de l'approximation de Boussinesq, à savoir que la masse volumique du fluide varie linéairement avec la température :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$$

✓ équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad i = 1, 2$$

qui, après simplification, s'écrit : ($\rho = cste$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

✓ équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g \beta (T - T_0) \delta_{i2} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

où δ_{i2} représente le symbole de Kronecker.

✓ équation de conservation de l'énergie :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

Comme il faut suivre des vitesses qui tendent vers 0, il est préférable de choisir une vitesse caractéristique de diffusion visqueuse (ou de conduction) ($u_{visc} = \frac{V}{H}$). Pour écrire sous la forme adimensionnelle les équations de continuité (1), de quantité de mouvement (2) et de conservation de l'énergie (3) on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$u^+ = \frac{u}{u_0} ; \quad t^+ = \frac{t}{t_0} ; \quad t_0 = \frac{H}{u_0} ; \quad v^+ = \frac{v}{u_0} ; \quad x^+ = \frac{x}{H} ; \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} ; \quad p^+ = \frac{p}{H} ; \quad p_0 = \rho u_0^2 ;$$

$$y^+ = \frac{y}{H}$$

En vertu des variables adimensionnelles écrites précédemment, on peut réécrire les équations (1), (2) et (3) sous la forme adimensionnelle suivante :

✓ équation de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

✓ équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{Ra}{Pr}\right) \theta \delta_{i2} \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

✓ équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \theta)}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{Pr}\right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

Le système d'équations (4), (5) et (6) est tout d'abord discrétisé en espace et en temps puis résolu numériquement. Le taux de transfert de chaleur par convection est décrit par le nombre de Nusselt (Nu) qui représente le rapport entre la chaleur transférée par convection et la chaleur transférée par conduction. Si le nombre de Nusselt est très proche de 1 le transfert de chaleur se fait donc essentiellement par conduction. Plus le nombre de Nusselt augmente, plus les phénomènes de convection sont alors dominants. Pour étudier le transfert de chaleur au sein de la cavité, nous introduisons le nombre de Nusselt local (Nu_c) défini comme suit :

$$Nu_c = -\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \text{ainsi que le nombre de Nusselt moyen : } Nu_{moy} = \frac{1}{A} \int_0^1 Nu_c dx$$

3. RESULTATS ET DISCUSSION

3.1 Effet des conditions initiales relatives à la température

Afin d'illustrer la structure de l'écoulement, le profil de vitesse ainsi que les isothermes relatives à $Ra=10^4$ ont respectivement été représentées sur les figures (2) et 3). Nous pouvons voir que les vitesses sont réparties de façon symétriques et que l'écoulement du fluide dépend de la condition initiale de la température. En effet pour un champ de température initiale tel que ($\theta_{int}=0$) ou ($\theta_{int}=-0.5$) (représentés respectivement sur les figures 2-a et 2-c), nous observons l'apparition de deux cellules tournant chacune dans le sens trigonométrique alors que relativement aux deux cas de figures ($\theta_{int}=0.5-y$) et ($\theta_{int}=0.5$) (voir figures 2-b et 2-d), les particules fluides tournent dans l'autre sens. Ce phénomène de bifurcation est essentiellement dû au changement de la condition initiale relative au champ de température initiale. Cette bifurcation est clairement visible sur le tracé des isothermes représentées sur les figures (3-a, b, c, et d).

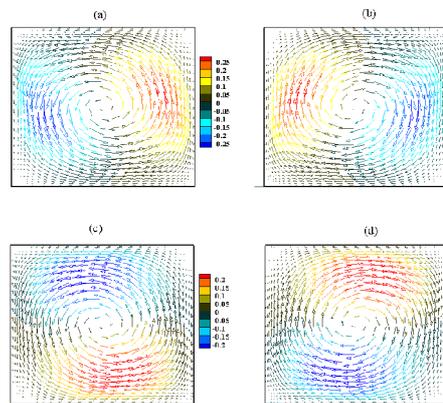


Figure 2 : Distribution des champs de vitesse relatifs à la cavité carrée pour différents champs de température.

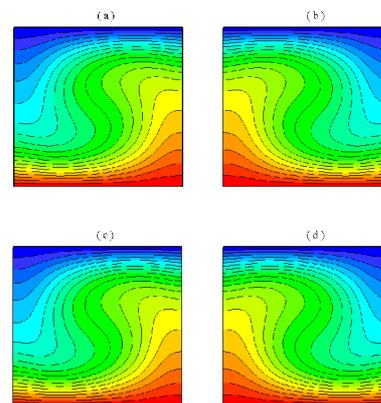


Figure 3 : Isothermes relatives à la cavité carrée pour différents champs de température.

Nous venons ainsi de montrer que la condition initiale relative au champ de température au sein de la cavité, peut avoir un effet notable sur la structure interne de l'écoulement. Il est à noter que cette bifurcation n'affecte pas la valeur du transfert de chaleur moyen à travers les parois actives de la cavité (tableau 1).

Tableau 1. Valeur du Nusselt moyen à travers la paroi chaude pour différentes conditions initiales de température, $Ra = 10^4$

Champ initial de température	Nu_{moy} chaud
$\theta_{int} = 0$	2.1555
$\theta_{int} = 0.5$	2.1555
$\theta_{int} = 0.5 - y$	2.1555
$\theta_{int} = -0.5$	2.1555

3.2 Détermination du premier nombre de Rayleigh critique $(Ra_c)_I$

Le domaine d'étude est une cavité bidimensionnelle infinie de type Rayleigh-Bénard. Afin de déterminer le nombre de Rayleigh critique $(Ra_c)_I$, nous avons commencé par effectuer des

essais avec un nombre de Rayleigh assez élevé supérieur à 10^3 en notant au fur et à mesure la valeur de la vitesse maximale V_{max} au sein de l'écoulement. En parallèle le nombre de Nusselt moyen est stocké pour chaque Rayleigh considéré. Nous avons pu remarquer qu'il s'agit d'une variation linéaire (figure 4). L'équation de corrélation s'écrit alors sous la forme :

$$Nu_{moy} = 7.8426 \times 10^{-4} \times Ra - 0.33880 \quad (7)$$

Il est à signaler que l'équation de corrélation (7) dépend du nombre des points considérés. En effet lorsqu'on considère seulement trois valeurs du nombre de Rayleigh (figure 4.b) nous obtenons une équation de corrélation (8) qui s'écrit sous la forme :

$$Nu_{moy} = 7.945 \times 10^{-4} \times Ra - 0.35671 \quad (8)$$

Les équations (7) et (8) permettent d'obtenir respectivement les valeurs $(Ra_c)_I = 1707.21$ et $(Ra_c)_I = 1707.62$. Sachant que la valeur expérimentale obtenue par S. Davis [3] est $(Ra_c)_I = 1708$, nous pouvons déduire que la méthode que nous avons utilisée est plus précise lorsque les calculs s'effectuent au voisinage de $(Ra_c)_I$. Nos résultats sont en très bon accord avec ceux de la littérature. En effet S.Chandrasekhar [2] a démontré que la bifurcation d'un régime de conduction à celui de convection naturelle commence à partir d'un nombre de $(Ra_c)_I = 1707.8$. De leurs cotés P.-H. Kao et al [12] en 2007 ont trouvé une valeur de Rayleigh critique de l'ordre de $(Ra_c)_I = 1707.762$. De même en 1999, Alexander Yu [6] a calculé la valeur critique du début de la convection au sein d'une cavité de type Rayleigh-Bénard, et a trouvé $(Ra_c)_I = 1707.76$.

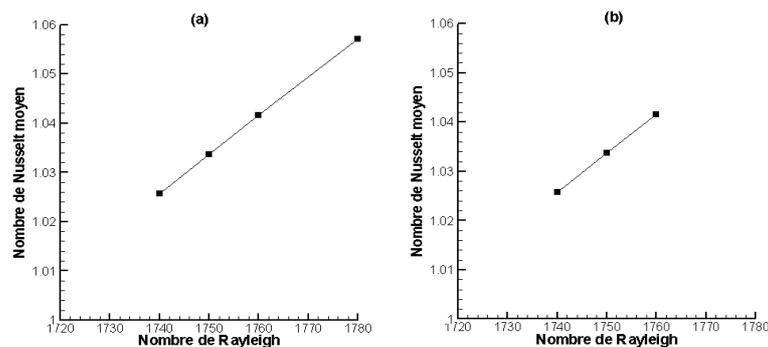


Figure 4 : Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh

3.3 Effet du rapport de forme

L'influence de la variation du rapport de forme sur l'écoulement et le transfert de chaleur, sont étudiés dans ce qui suit. Ainsi, nous représentons dans les figures 5,6, 7 et 8, les champs de température et les lignes de courant, pour des valeurs du rapport de forme $A=1; 2; 4; 8$ et même nombre de Rayleigh ($Ra=3 \times 10^3$). Nous prenons comme condition initiale relative à la température une valeur nulle.

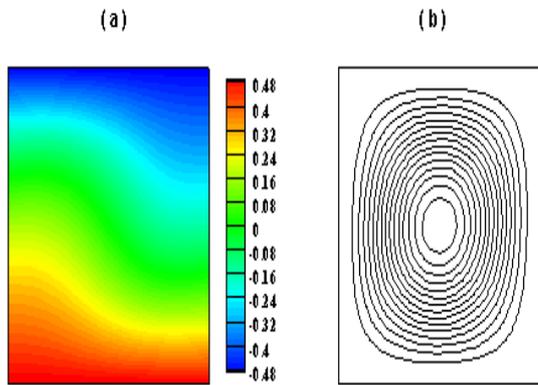


Figure 5 : Champs de température (a) et lignes de courant (b) au sein d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$) de rapport de forme $A=1$, $Ra=3 \times 10^3$.

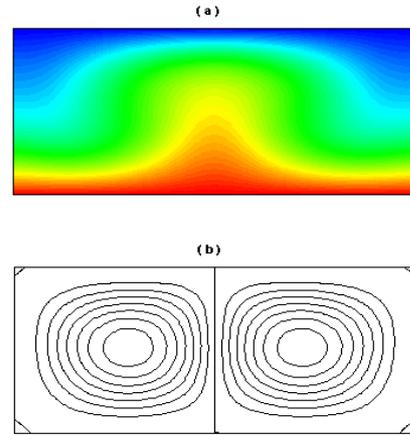


Figure 6 : Champs de température (a) et lignes de courant (b) au sein d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$) de rapport de forme $A=2$, $Ra=3 \times 10^3$.

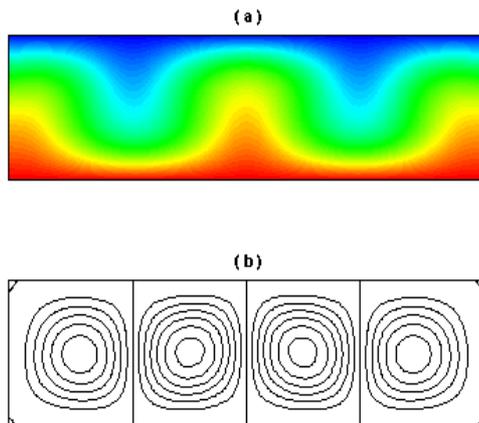


Figure 7 : Champs de température (a) et lignes de courant (b) au sein d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$) de rapport de forme $A=4$, $Ra=3 \times 10^3$.

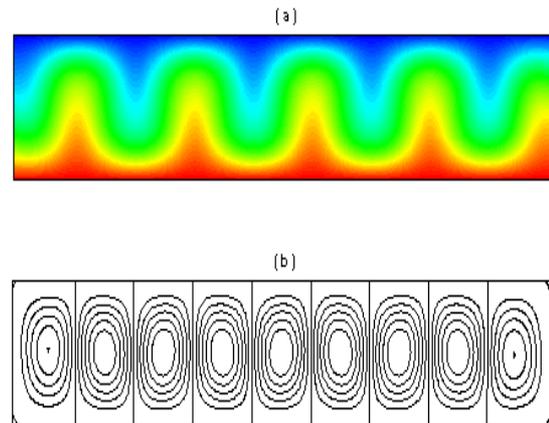


Figure 8 : Champs de température (a) et lignes de courant (b) au sein d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$) de rapport de forme $A=8$, $Ra=3 \times 10^3$.

D'après ces figures, nous constatons que les lignes de courant se présentent sous forme de cellules concentriques contra-rotatives d'axes parallèles sauf 5. En augmentant le rapport de forme, des changements notables sur le nombre des cellules apparaissent.

Nous représentons dans la figure 9 le nombre de Nusselt moyen calculé le long de la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh ($Pr = 0.71$) pour différents rapports de formes et pour des nombres de Rayleigh proches de la zone de la première bifurcation. La valeur de $(Ra_c)_I$ relative aux différents rapports de forme est reportée dans le tableau (2).

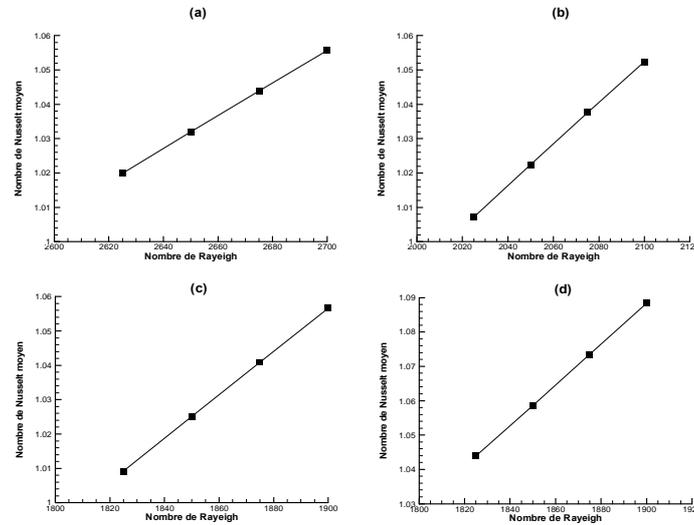


Figure 9 : Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour des rapports de forme, (a) $A=1$, (b) $A=2$, (c) $A=4$, (d) $A=8$ et $Pr=0.71$.

Tableau 2 : Valeurs du nombre de Rayleigh critique pour différents rapport de forme d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$).

Figures	Rapport de forme	Valeurs de $(Ra_c)_I$
a	$A = 1$	2584.31
b	$A = 2$	2013.10
c	$A = 4$	1810.363
d	$A = 8$	1751.145

Nous remarquons que la valeur du nombre de Rayleigh critique à partir duquel le fluide se met en mouvement, dépend fortement de l'aspect géométrique de la cavité. En effet, dans la première configuration (figure 9-a), où la cavité est carrée ($A=1$), nous avons trouvé $(Ra_c)_I=2584.31$, alors que dans le cas d'une cavité infinie (figure 4), le nombre de Rayleigh critique est beaucoup plus faible, i.e., $(Ra_c)_I=1707.21$. Nous comparons dans le tableau (3) les valeurs de nombre de Rayleigh critique pour différents rapports de forme avec les solutions d'autres auteurs.

Tableau 3 : Comparaison du nombre de Rayleigh critique pour différente rapport de forme d'une cavité remplie d'air ($Pr=0.71$).

A	Prés. étude	Résultats de [6]	Résultats de [14]	Ecart(%) avec [6]	Ecart(%) avec [14]
1	2584.31	2585.02	2585.03	0.27	0.27
2	2013.09	2013.21	2013.24	0.005	0.007
4	1810.36	1810.27	1810.48	0.004	0.006

3.4 Effet du nombre de Prandtl

Pour voir l'influence du nombre de Prandtl, on a comparé le mercure ($Pr = 0.024$) qui est un métal liquide avec l'eau ($Pr = 6.8$). La variation du nombre de Nusselt moyen calculé le long de la paroi chaude en fonction de nombre de Rayleigh pour ces deux fluides pour un même rapport de forme $A = 1$, sont ainsi montrés dans la figure (8).

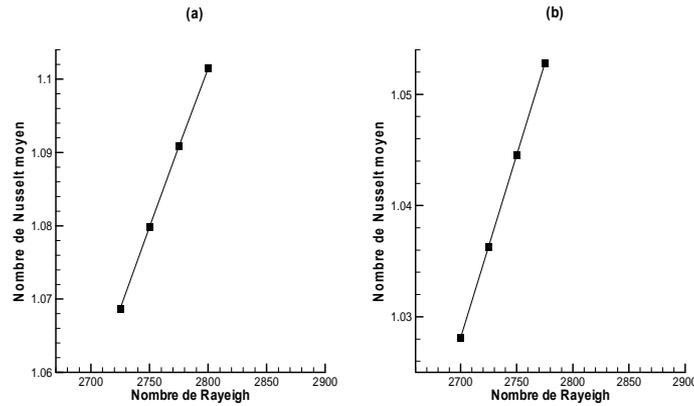


Figure 8 : Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour l'eau (à gauche $Pr=6.8$) et le mercure (à droite $Pr=0.024$) pour un même rapport de forme $A=1$.

Tableau 4 : Comparaison du nombre de Rayleigh critique pour l'air, le mercure et l'eau.

Nature du Fluide	Rapport de forme	Valeurs de $(Ra_c)_I$
$Pr = 0.71$	$A = 1$	2584.31
$Pr = 0.024$	$A = 1$	2615.43
$Pr = 6.8$	$A = 1$	2567.32

Le tableau ci-dessus (4) présente des valeurs comparatives de différents fluides, air ($Pr=0.71$) mercure ($Pr=0.024$) et eau ($Pr=6.8$), pour les mêmes dimensions de la cavité ($A=1$). On remarque que la valeur du nombre de Rayleigh critique pour laquelle les particules fluides se mettent en mouvement dans l'eau est plus faible que celle dans le mercure et dans l'air.

4. Conclusion

Nous avons étudié les effets des conditions initiales relatives au champ de température sur la structure de l'écoulement du fluide au sein d'une cavité carrée ($A=1$) remplie d'air ($Pr=0.71$) pour un nombre de Rayleigh $Ra=10^4$. Par la suite, nous avons déterminé la valeur du nombre de Rayleigh critique $(Ra_c)_I$ pour laquelle les particules fluides se mettent en mouvement dans une cavité infinie. Une corrélation entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh a été déterminée. Enfin, nous avons démontré que la première valeur du nombre de Rayleigh critique dépend du rapport de forme de la cavité (A) et de la nature du fluide (Pr) mis en jeu.

Bibliographie

- [1] H. Bénard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent, *Ann.Chim. Phys*, Volume 723, pp 62-79 (1901).
- [2] S.Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Clarendon Press, London, pp.9-73, (1961).
- [3] S. Davis, Convection in a Box, Linear Theory, *J .Fluid Mech .*, Vol.30, no.3, pp. 465-478, (1967).
- [4] R.Gibilin, *Transmission de la chaleur par convection naturelle*, Edition Ey-rolles, Paris(1974).
- [5] N.C. Markatos et K.A. Pericleous : Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. *Int. J. Heat and Mass Transfer*. Vol 27, N°5, pp.755-772, (1984).
- [6] Alexander Yu. Gelfgat, Different Modes of Rayleigh-Bénard Instability in Two- and Three-Dimensional Rectangular Enclosures, *J. of Comp. Physics* 156, 300-324 (1999).
- [7] P. A. Bois, *Introduction à la Mécanique théorique des fluides*, Eds. Ellipses,(2000).
- [8] B. Calgagni, F. Marsili, M. Paroncini, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Appl. Therm. Eng.* 25 (2005) 2522–2531.
- [9] Daniel W. Crunkleton and Timothy J. Anderson, A numerical study of flow and thermal fields in tilted Rayleigh-Bénard convection, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 33 (2006) 24-29.
- [10] Leonardo Valencia, Jordi Pallares, Turbulent Rayleigh-Bénard convection of water in cubical cavities : A numerical and experimental study, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 3203-3215.
- [11] Yamina HARNANE et Mohamed AFRID, Etude de la transition de l'écoulement laminaire à des différents nombres de Rayleigh, 13èmes Journées Internationales de Thermique, Albi (France) (2007).
- [12] P.-H. Kao and R.-J. Yang, simulating oscillatory flows in Rayleigh-Bénard convection using the lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 3315-3328.
- [13] Nasreddine Ouertatani, Nader Ben Cheikh, Brahim Ben Beya and Taieb Lili, Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Bénard convection in an enclosure, *C. R. Mecanique* 336 (2008) 464-470.
- [14] A. Yu. Gelfgat and I., Tanasawa, Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method, *Numer. Heat Transfer Part A Appl.* 25(6), 627 (1994).