

# Approche énergétique pour des guides d'ondes stochastiques: formulation et validation

M. A. BEN SOUF<sup>a,b</sup>, M. ICHCHOU<sup>a</sup>, F. BOUCHOUCHA<sup>b</sup>, O. BAREILLE<sup>a</sup>, M. HADDAR<sup>b</sup>

a. *Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon, Ecully, FRANCE*

b. *Unité de Modélisation, Mécanique et Productique, Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax, Sfax, TUNISIE*

## Résumé :

*La propagation d'énergie dans un guide viscoélastique est présentée dans ce papier. La réponse forcée d'un guide d'ondes stochastiques soumis à des chargements incertains et harmoniques est traitée. Ce modèle énergétique est basé sur la méthode "Stochastic Wave Finite Element" (SWFE). La SWFE est une méthode spectrale pour les guides présentant des incertitudes. En supposant que les propriétés aléatoires sont spatialement homogènes dans le guide, la méthode "Wave Finite Element" est étendue par une approche probabiliste paramétrique. Le modèle proposé est une méthode numérique valide pour les basses, moyennes et hautes fréquences avec un temps de calcul négligeable. Des simulations numériques prouvent l'efficacité de l'approche proposée. Les résultats sont comparés à des simulations de Monte Carlo.*

## Abstract :

*The energy propagation in a viscoelastic guide is presented in this paper. The forced response of a stochastic waveguide subjected to harmonic and uncertain loading is treated. This energy model is based on "Stochastic Finite Element Wave" (SWFE) method. It's a spectral method for uncertain media. Assuming that the random properties are spatially uniform in the waveguide, the "Wave Finite Element" method is extended by a parametric probabilistic approach. The proposed model is a numerical tool valid in low, Mid- and High-frequency with a negligible computation time. Numerical simulations prove the effectiveness of the proposed approach. The results are compared to Monte Carlo simulations*

**Mots clefs :** energy propagation, forced response, parametric probabilistic approach

## 1 Introduction

La propagation d'onde dans les guides fait l'objet de plusieurs sujets de recherches intensives. La méthode des éléments finis et l'analyse statistique de l'énergie (SEA) sont bien développés pour la basse et la hautes fréquence. Trop élevé pour la FEA, trop faible pour la SEA, la moyenne fréquence reste toujours un problème pour les concepteurs. Ce document présente un modèle applicable à toute bande de fréquence, en particulier la moyenne fréquence. La "Wave Finite Element" est une méthode spectrale déterministe qui traite les problèmes de propagation des ondes dans les structures homogènes et périodiques. Cette méthode est basée sur la modélisation d'un sous-système par les éléments finis classique. En appliquant les conditions de périodicité on peut créer un problème de valeurs propres qui décrit la propagation des ondes dans le système. Cette méthode a été développée pour l'analyse des vibrations des structures [1] et la propagation des ondes élastiques dans les guides [2]. Houillon *et al.* [3] a utilisé la WFE pour étudier la dynamique des structures homogènes d'une section quelconque. En outre, la propagation de l'énergie dans les structures est un sujet intensivement étudié par de nombreux

chercheurs [4]. Ichchou [5] à développé une méthode simplifiée de l'énergie (MES) pour les moyennes et hautes fréquences qui permet de prédire la moyenne de la densité d'énergie en 1D et 2D structures. Arnaud *et al.*[6] à utilisé la méthode de MES pour étudier la propagation de puissance dans le complexe 1D structures liées à une cavité. Langley [7] inspecté le flux d'énergie dans les structures périodiques et a étudié l'atténuation produite par amortissement. Tous les méthodes présentées ne considèrent que les valeurs nominales des paramètres et négligent les incertitudes présentés dans les structures (propriétés mécaniques) ou dans l'une des conditions aux limites (forces, déplacements ...). L'effet de ces incertitudes est négligeable en basse fréquence, mais il sera de plus en plus important dans les moyennes et hautes fréquences. Dans cet article nous présenterons une approche décrivant la propagation des ondes et l'énergie en guide d'onde stochastique. En supposant que les incertitudes sont spatialement uniformes et périodiques, nous suivons le même algorithme que celui développé par Ghanem [8] qui a étendu éléments finis aux éléments finis stochastiques. Cette formulation est efficace en moyenne et haute fréquence avec un temps de calcul négligeable. Ce modèle présenté est une combinaison entre une méthode paramétrique et le "Wave Finite Element" qui permet de prédire la statistique des variables cinématiques (déplacement, forces ...) et variables quadratiques (densité d'énergie cinétique, densité d'énergie potentielle, ...). Ce papier contient trois parties : La première partie concerne la formulation SWFE, la deuxième concerne la réponse forcées et la formulation énergétique. La troisième partie concerne les simulations prouvent l'efficacité du modèle présenté. Les résultats sont vérifiés avec la simulation de Monte Carlo.

## 2 Stochastic Spectral Formulation

Dans tout le développement, tout les variables stochastiques  $\tilde{r}$  sont écritent sous la forme  $\tilde{r} = \bar{r} + \sigma_r \xi$ , avec  $\bar{r}$  la moyenne,  $\sigma_r$  l'écart type et  $\xi$  est une variable aléatoire centrée et reduite ( $\langle \xi \rangle = 0$ ,  $\langle \xi^2 \rangle = 1$ ).

### 2.0.1 Stochastic Wave Finite Element method : State space formulation

En utilisant l'espace d'état, les vecteurs d'état stochastiques  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  and  $\tilde{\mathbf{u}}_R$  sont définis par :  $\tilde{\mathbf{u}}_L = \left( (\tilde{\mathbf{q}}_L)^T (-\tilde{\mathbf{F}}_L)^T \right)^T$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_R = \left( (\tilde{\mathbf{q}}_R)^T (\tilde{\mathbf{F}}_R)^T \right)^T$ . Il est claire que ces deux vecteurs sont liées par une matrice de transformation  $\tilde{\mathbf{S}}$  as :

$$(\tilde{\mathbf{S}} + \sigma_{\mathbf{S}} \xi) [\tilde{\mathbf{u}}_L] = [\tilde{\mathbf{u}}_R] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{LL} + \sigma_{\mathbf{S}_{LR}} \xi & \tilde{\mathbf{S}}_{LR} + \sigma_{\mathbf{S}_{LL}} \xi \\ \tilde{\mathbf{S}}_{RL} + \sigma_{\mathbf{S}_{RL}} \xi & \tilde{\mathbf{S}}_{RR} + \sigma_{\mathbf{S}_{RR}} \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_L + \sigma_{\mathbf{q}_L} \xi \\ -\tilde{\mathbf{F}}_L - \sigma_{\mathbf{F}_L} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_R + \sigma_{\mathbf{F}_R} \xi \\ \tilde{\mathbf{F}}_R + \sigma_{\mathbf{F}_R} \xi \end{pmatrix} \quad (1)$$

En connaissant les statistiques de la matrice de transformation, le problème aux valeurs propres stochastique est écrit comme suit :

$$\left( \tilde{\mathbf{S}} - \tilde{\mu}_i \mathbf{I}_{2n} \right) \tilde{\Phi}_i = 0 \quad (2)$$

Si l'on considère que les solutions du problème aux valeurs propres stochastiques sont écrites :  $\tilde{\mu} = (\bar{\mu} + \sigma_{\mu} \xi)$ ,  $\tilde{\Phi} = (\bar{\Phi} + \sigma_{\Phi} \xi)$ , l'expansion de l'équation (2) conduit à obtenir l'ordre zéro (problème aux valeurs propres déterministe)  $(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n}) \bar{\Phi}_i = 0$ . De façon équivalente, l'expression du premier ordre est exprimée comme suit :

$$(\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n}) \sigma_{\Phi_i} + (\sigma_{\mathbf{S}} - \sigma_{\mu_i} \mathbf{I}_{2n}) \bar{\Phi}_i = 0 \quad (3)$$

Puisque  $\tilde{\Phi}_i^T J_n$  est un vecteur propre à gauche de  $\tilde{\mathbf{S}}$  associée à la valeur propre  $1/\mu_i$ , donc l'expansion du problème des valeurs propres à gauche  $\left( (\tilde{\Phi}_i^T J_n) \tilde{\mathbf{S}} = 1/\mu_i (\tilde{\Phi}_i^T J_n) \right)$  conduit à exprimer des termes du premier ordre :

$$(\sigma_{\Phi_i})^T J_n (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i^{-1} \mathbf{I}_{2n}) + (\bar{\Phi}_i)^T J_n (\sigma_{\mathbf{S}} + \sigma_{\mu_i} \bar{\mu}_i^{-2} \mathbf{I}_{2n}) = 0 \quad (4)$$

La résolution des équations (3) et (4) on trouve :

$$\sigma_{\mu_i} = \left[ (\bar{\Phi}_i)^T \sigma_{\mathbf{S}}^T (\bar{\mathbf{S}}^T - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n})^{-1} J_n (\bar{\mathbf{S}} - (\bar{\mu}_i)^{-1} \mathbf{I}_{2n}) - (\bar{\Phi}_i)^T J_n \sigma_{\mathbf{S}} \right] \times \left[ (\bar{\Phi}_i)^T (\bar{\mathbf{S}}^T - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n})^{-1} J_n (\bar{\mathbf{S}} - (\bar{\mu}_i)^{-1} \mathbf{I}_{2n}) + (\bar{\mu}_i)^{-2} (\bar{\Phi}_i)^T J_n \right]^{-1} \quad (5)$$

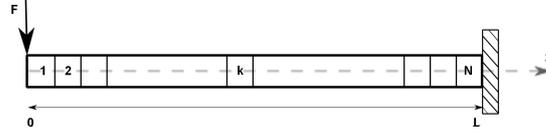


FIGURE 1 – Illustration d'un guide d'onde périodique

et

$$\sigma_{\Phi_i} = - [\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mu}_i \mathbf{I}_{2n}]^+ [\sigma_{\mathbf{S}} - \sigma_{\mu_i} \mathbf{I}_{2n}] \bar{\Phi}_i \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) fournissent les statistiques des différentes propriétés pour guide d'onde stochastique. Finalement, on peut écrire l'écart type du nombre d'onde :

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{j}{d} \frac{\sigma_{\mu}}{\bar{\mu}} \quad (7)$$

avec  $d$  est la longueur de la sous structure

### 3 Forced response : Stochastic wave mode expansion

Dans cette partie, nous essayons d'exprimer la réponse harmonique et de caractériser les effets de la variabilité des déplacements et des énergies en guides aléatoires périodiques. Les propriétés des matériaux et les forces sont censés être des paramètres incertains. L'expansion des vecteurs d'état stochastique  $\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)}$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) sur la base d'ondes stochastiques réduite est écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}_L^{(k)} = \tilde{\Phi}^{inc} \tilde{\mathbf{Q}}^{inc(k)} + \tilde{\Phi}^{ref} \tilde{\mathbf{Q}}^{ref(k)} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_R^{(k)} = \tilde{\Phi}^{inc} \tilde{\mathbf{Q}}^{inc(k+1)} + \tilde{\Phi}^{ref} \tilde{\mathbf{Q}}^{ref(k+1)} \quad (9)$$

avec  $\tilde{\Phi}^{inc}$  et  $\tilde{\Phi}^{ref}$  sont  $(2n \times m)$  des matrices incidentes et réfléchies, les modes d'ondes, et  $\tilde{\mathbf{Q}}^{inc}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}^{ref}$  sont  $(m \times 1)$  vecteurs des amplitudes stochastiques.

Le cas d'un seul guide d'onde est maintenant traité. Soit un guide d'onde encastré libre soumis à un chargement de flexion à son extrémité libre. Les conditions aux limites sont écrites comme suit :

$$\tilde{\Phi}_F^{inc} \tilde{\mathbf{Q}}^{inc(1)} + \tilde{\Phi}_F^{ref} \tilde{\mathbf{Q}}^{ref(1)} = -\tilde{\mathbf{F}} \quad (10)$$

$$\tilde{\Phi}_q^{inc} \tilde{\mathbf{Q}}^{inc(N+1)} + \tilde{\Phi}_q^{ref} \tilde{\mathbf{Q}}^{ref(N+1)} = \tilde{\mathbf{q}} \quad (11)$$

sachant que l'amplitude de  $k^{ème}$  sous-système est liée à l'amplitude du premier élément comme suit :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}^{inc} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}^{ref} \end{pmatrix}^{(k-1)} \tilde{\mathbf{Q}}^{(1)} \quad (12)$$

donc les équations (10) et (11) peuvent être écrites :

$$\tilde{\Phi}_F^{inc} \tilde{\mathbf{Q}}^{inc(1)} + \tilde{\Phi}_F^{ref} \tilde{\mathbf{Q}}^{ref(1)} = -\tilde{\mathbf{F}} \quad (13)$$

$$\tilde{\Phi}_q^{inc} \tilde{\mu}^N \tilde{Q}^{inc(1)} + \tilde{\Phi}_q^{ref} \tilde{\mu}^{-N} \tilde{Q}^{ref(1)} = \tilde{q} \quad (14)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_F^{inc} & \tilde{\Phi}_F^{ref} \\ \tilde{\Phi}_q^{inc} \tilde{\mu}^N & \tilde{\Phi}_q^{ref} \tilde{\mu}^{-N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}^{inc(1)} \\ \tilde{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{F} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} \quad (15)$$

L'expansion de l'équation (15) conduit à identifier l'ordre zéro  $\bar{Q}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{inc} & 0 \\ 0 & \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix}^{(k-1)} \bar{Q}^{(1)}$  qui permet de calculer la moyenne de l'amplitude de l'onde pour le premier élément. Souffrant d'un problème de singularité, l'équation d'ordre zéro peut être reformulée comme suit :

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ 0 & \bar{\mu}^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \bar{\mu}^N \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^N & \bar{\Phi}_q^{ref} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} -\bar{F} \\ \bar{q} \end{pmatrix} \quad (16)$$

De façon équivalente, la projection du premier ordre conduit à quantifier l'écart-type de l'amplitude :

$$(\sigma_Q)^{(1)} = \bar{L}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_F^{inc} & \bar{\Phi}_F^{ref} \bar{\mu}^N \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^N & \bar{\Phi}_q^{ref} \end{pmatrix}^+ \left[ \begin{pmatrix} -\sigma_F \\ \sigma_q \end{pmatrix} - \sigma_A \begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc(1)} \\ \bar{Q}^{ref(1)} \end{pmatrix} \right] \quad (17)$$

avec :  $\sigma_A = \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_F^{inc}} & \sigma_{\Phi_F^{ref}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc}} (\bar{\mu}^{inc})^N + N \bar{\Phi}_q^{inc} (\bar{\mu}^{inc})^{(N-1)} \sigma_{\mu^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} (\bar{\mu}^{ref})^N + N \bar{\Phi}_q^{ref} (\bar{\mu}^{ref})^{(N-1)} \sigma_{\mu^{ref}} \end{pmatrix}$  connaissant les statistiques de l'amplitude du sous-système, nous pouvons calculer les statistiques de l'amplitude à tout élément de la structure en utilisant la formule récurrente suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Q^{inc}} \\ \sigma_{Q^{ref}} \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}^{inc} & 0 \\ 0 & \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \sigma_{Q^{inc}} \\ \sigma_{Q^{ref}} \end{pmatrix}^{(1)} + (k-1) \begin{pmatrix} (\bar{\mu}^{inc})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{inc}} & 0 \\ 0 & (\bar{\mu}^{ref})^{(k-2)} \sigma_{\mu^{ref}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Q}^{inc} \\ \bar{Q}^{ref} \end{pmatrix}^{(1)} \quad (18)$$

En utilisant les équations (8) and (9) les statistiques de déplacement de chaque élément dans la poutre peuvent être exprimées comme suit :

$$(\sigma_q)^{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_q^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \\ \bar{\Phi}_q^{inc} \bar{\mu}^{inc} & \bar{\Phi}_q^{ref} \bar{\mu}^{ref} \end{pmatrix} (\sigma_Q)^{(k)} + \begin{pmatrix} \sigma_{\Phi_q^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} \\ \sigma_{\Phi_q^{inc}} \bar{\mu}^{inc} + \bar{\Phi}_q^{inc} \sigma_{\mu^{inc}} & \sigma_{\Phi_q^{ref}} \bar{\mu}^{ref} + \bar{\Phi}_q^{ref} \sigma_{\mu^{ref}} \end{pmatrix} \bar{Q}^{(k)} \quad (19)$$

### 3.1 Energy density propagation

En supposant que la longueur de l'élément est suffisamment faible, les densités d'énergie varient faiblement dans un sous-système. En utilisant cette hypothèse la densité d'énergie cinétique stochastique pour le  $k^{eme}$  élément peut être écrite :

$$\tilde{E}_c^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}^{(k)H} \tilde{M} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}^{(k)} \quad (20)$$

L'expansion et la projection sur les polynômes de chaos conduit à identifier l'ordre un comme suit :

$$\sigma_{E_c}^{(k)} = \frac{\omega^2}{4d} \left( (\sigma_q)^{(k)H} \bar{M} \bar{q}^{(k)} + \bar{q}^{(k)H} \bar{M} (\sigma_q)^{(k)} + \bar{q}^{(k)H} \sigma_M \bar{q}^{(k)} \right) \quad (21)$$

En suivant la même procédure déjà présentée, la densité d'énergie potentielle stochastique peut être exprimé comme suit :

$$\tilde{E}_p^{(k)} = \frac{1}{4d} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}^H \tilde{K} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \quad (22)$$

$E$ (MPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$d$ (m)	$\eta$ (%)	$\sigma_{E,\rho}$ (%)	$\mathbf{F}$ (N)	$S$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )
$2 \cdot 10^{11}$	7800	$7 \cdot 10^{-4}$	2	2	1	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$4.166 \cdot 10^{-6}$

TABLE 1 – Caractéristiques de la poutre

ainsi, l'écart type est exprimé :

$$\sigma_{\mathbf{E}_p}^{(k)} = \frac{1}{4d} \left( (\sigma_{\mathbf{q}})^{(k)H} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}}^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)} \bar{\mathbf{K}} (\sigma_{\mathbf{q}})^{(k)} + \bar{\mathbf{q}}^{(k)H} \sigma_{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}}^{(k)} \right) \quad (23)$$

Enfin, l'écart-type de la densité d'énergie totale est exprimé par :

$$\sigma_{\mathbf{E}}^{(k)} = \sigma_{\mathbf{E}_e}^{(k)} + \sigma_{\mathbf{E}_p}^{(k)} \quad (24)$$

## 4 Exemple numérique

La validation de la formulation sera présentée dans cette partie. Soit une poutre soumise a un effort de flexion . Les caractéristiques de cette poutre sont présentées dans le tableau 1 : Le module d'Young est supposé comme paramètre aléatoire. Ces figures représentent les moyennes des différents quantités

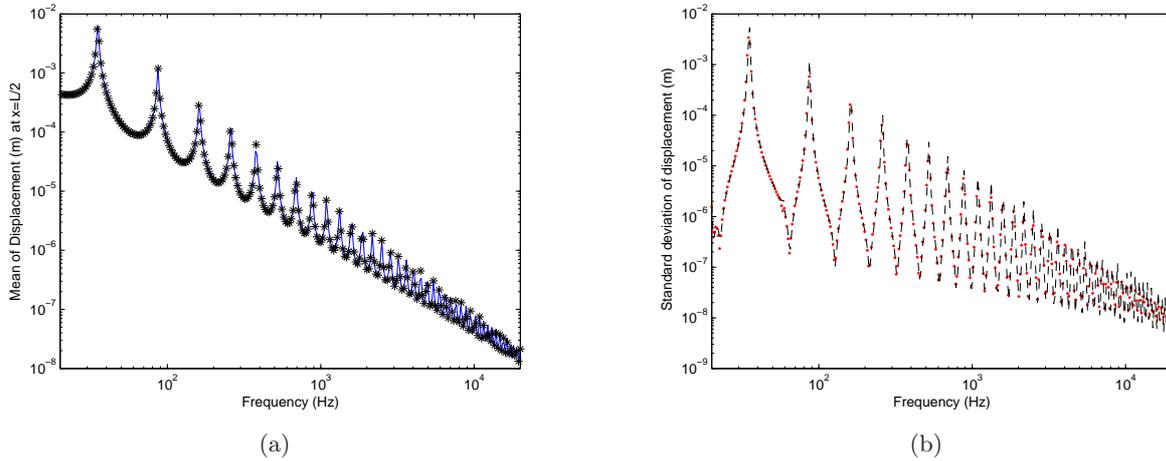


FIGURE 2 – (a) Moyenne du déplacement, (b) écart type du déplacement : Moyenne analytique (\*), WFE (—), SWFE (---), Monte Carlo (.)

cinématique ainsi que énergétiques. On remarque que la solution du modèle présenté coïncide avec les simulation de Monte Carlo(3000 itérations). Ce qui prouve l'efficacité de la formulation.

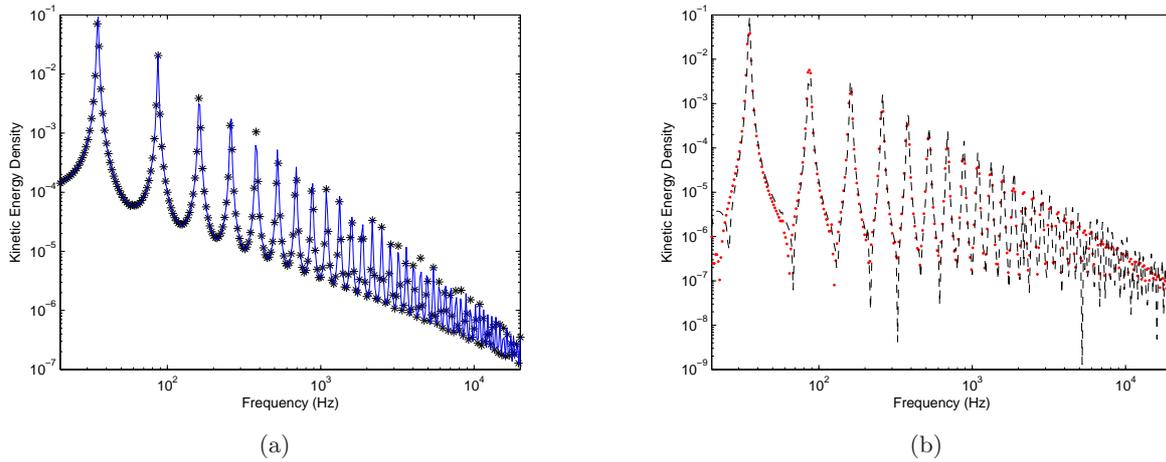


FIGURE 3 – (a) Moyenne de la densité d'énergie cinétique, (b) écart type de la densité d'énergie cinétique : Moyenne analytique (\*), WFE (–), SWFE (– –), Monte Carlo (.)

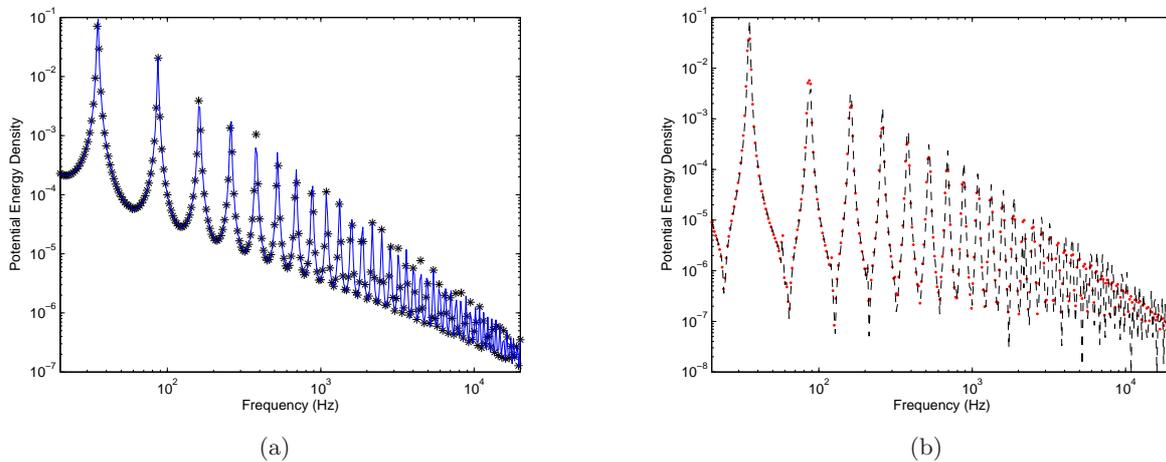


FIGURE 4 – (a) Moyenne de la densité d'énergie potentielle, (b) écart type de la densité d'énergie potentielle : Moyenne analytique (\*), WFE (–), SWFE (– –), Monte Carlo (.)

## Remerciement

Les auteurs remercient le projet Marie Curie, GA-214909 'MID-FREQUENCY CAE Methodologies for Mid-Frequency Analysis in Vibration and Acoustics'

## Références

- [1] M N Ichchou, J Berthaut, and M Collet. Multi-mode wave propagation in ribbed plates : part i, wavenumber-space characteristics ; part ii, predictions and comparisons. *International Journal of Solids and Structures*, 45(5) :1179–1216, 2008.
- [2] J M Mencik and M N Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(5) :877–898, 2005.
- [3] L Houillon. *Modélisation Vibratoire des Carrosseries Automobiles en Moyennes et hautes Fréquences*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1999.

- 
- [4] H.G.D. Goyder. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part i : Introduction and approximation analysis of beam and plate-like. *journal of sound and vibration*, 68(1) :59–75, 1980.
- [5] M. Ichchou. *Formulations energetiques pour l'étude moyenne et hautes frequence des systemes : Theorie et applications*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1996.
- [6] A Bocquillet. *Méthode Énergétique de Caractérisations Vibroacoustiques des Réseaux Complexes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [7] R. S. Langley. On the forced response of one-dimensional periodic structures : vibration localisation by damping. *journal of sound and vibration*, 178(3) :411–428, 1994.
- [8] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer, New York, NY, 1991.