

Réverbérations d'ondes et frottement

T. Putelat^a, J. R. Willis^b & J. H. P. Dawes^c

^aLaboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 7649, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
putelat@lms.polytechnique.fr

^bInstitute of Theoretical Geophysics & Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics
University of Cambridge, Centre for Mathematical Sciences, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, U.K.

^cDepartment of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath BA2 7AY, U.K.

Résumé : Nous proposons qu'une origine possible de glissement saccadé et erratique de couches élastiques cisailées l'une contre l'autre est associée à la réverbération des ondes qui rayonnent et se réfléchissent aux niveaux des interfaces en frottement solide. Dans le cadre des lois de frottement à variable interne, nous montrons que la dynamique du glissement interfacial est déterminée par un système différentiel avec délai correspondant au temps caractéristique des réverbérations fixé par l'épaisseur des couches. La stabilité du glissement stationnaire et des solutions périodiques est analysée.

Abstract : We propose that the complex stick-slip sliding of elastic continua may originate from the reverberation of elastic waves which radiate and reflect from frictional interfaces and system boundaries. In the framework of rate-and state friction we show that the interfacial slip is determined by a differential-difference system whose delay corresponds to the characteristic time of reverberation set by the layers' thickness. A criterion of stability for the steady-state sliding is given. Period-doubling and torus bifurcations of stick-slip periodic orbits are found.

Mots-clefs : frottement héréditaire ; stabilité ; stick-slip ; délai.

1 Introduction

Il est commun d'observer que le glissement saccadé de deux solides en contact frottant est erratique, même à faible vitesse [e.g. 1, 2]. Par une prise en compte simplifiée de la propagation des ondes élastiques, nous verrons qu'il est possible d'engendrer des modes de glissement complexes sans faire appel à plusieurs variables internes ou des fluctuations de la contrainte normale pour que l'espace des phases soit de dimension ≥ 3 . Il sera de dimension infinie dans notre cas.

Pour cela, nous considérons un système formé de deux couches élastiques identiques infinies horizontalement et d'épaisseur $h/2$, de module de cisaillement $G = \rho c_s^2$ et entraînées en directions opposées à vitesse constante $\pm V/2$. Ces couches frottent l'une contre l'autre au niveau d'une interface plane caractérisée par un glissement uniforme. On suppose en effet que le déplacement $u(z, t)$ dans les couches est horizontal et uniforme sauf dans la direction verticale z . L'hypothèse essentielle de ce travail est alors de considérer un champ de vitesse $\dot{u}(z, t)$ dans la couche supérieure¹ de la forme

$$\dot{u}(z, t) = V/2 + f(t - (z - h/2)/c_s) - f(t + (z - h/2)/c_s). \quad (1)$$

Nous prenons ainsi en compte la réverbération d'ondes de cisaillement, de célérité c_s , qui rayonnent et se réfléchissent de bas en haut à partir de l'interface frictionnelle et des frontières $z = \pm h/2$ du système.

Bien que d'autres lois soient envisageables, nous nous limitons aux lois de frottement héréditaire² définies par

$$\tau = F(v, \phi; \sigma), \quad \dot{\phi} = -G(v, \phi; \sigma). \quad (2)$$

Les contraintes normale et cisailante sont notées σ et τ . La variable v représente le taux glissement interfacial et ϕ correspond à une variable interne qui décrit la résistance au glissement de l'interface. Sa

¹Le champ de vitesse dans la couche inférieure s'obtient par symétrie.

²i.e. *rate-and-state friction*

loi d'évolution (2)₂ modélise l'histoire du glissement. La contrainte normale σ est considérée ici comme un paramètre constant. En glissement stationnaire $v = V = \text{const.}$, la loi (2) se réduit à

$$\tau = F_{ss}(V; \sigma), \quad (3)$$

car l'état de l'interface n'évolue pas et vaut $\phi = \phi_{ss}(V)$ solution de $G(V, \phi_{ss}) = 0$. Un exemple classique de loi (2) est donné par la loi de Dieterich où

$$\tau = [a_* + a \ln(v/V_*) + b \ln(\phi/\phi_*)] \sigma \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = 1 - v\phi/L. \quad (4)$$

On note que V_* et ϕ_* sont le taux de glissement et l'état interfacial de référence correspondant à un coefficient de frottement de référence a_* au voisinage duquel le coefficient de frottement instantané $\mu \equiv \tau/\sigma$ varie. La longueur L permet de définir le temps caractéristique L/V durant lequel τ relaxe vers $\tau_{ss} = F_{ss}(V)$ en réponse à un saut de vitesse.

Dans ce cadre, nous rappelons que le glissement stationnaire d'un système patin-ressort tiré à vitesse constante V par un ressort de raideur k , dont l'équation du mouvement est

$$M\dot{v} = k(Vt - x) - \tau, \quad (5)$$

devient instable [3, 4, 5, 6] dès que la raideur est réduite en deçà d'une valeur critique k_c et donne naissance par une bifurcation de Hopf à des oscillations de période $2\pi/\omega_c$ données par

$$k_c = -G_\phi F'_{ss} + M\omega_c^2 \quad \text{et} \quad \omega_c^2 = -G_\phi^2 F'_{ss}/F_v. \quad (6)$$

À mesure que la raideur est diminuée, l'amplitude des oscillations croît et des saccades régulières de type *stick-slip* se développent sous forme d'oscillations de relaxation [7] de période

$$T \sim \Delta\tau/(kV) \quad \text{où la chute de contrainte} \quad \Delta\tau = \max \tau - \min \tau. \quad (7)$$

Nous généralisons ici ces résultats et établissons un lien entre la dynamique d'un système patin-ressort et celle de couches élastiques.

2 Formulation

L'équation (1) implique que le taux de glissement interfacial $v(t) = \dot{u}(0^+, t) - \dot{u}(0^-, t)$ et que le taux de variation $\dot{\tau}(t)$, obtenu par la loi de Hooke $\dot{\sigma}_{xz} = G\dot{u}_z$, sont donnés par

$$v = V + 2[f(t + h/(2c_s)) - f(t - h/(2c_s))] \quad \text{et} \quad \dot{\tau} = -\rho c_s [f'(t + h/(2c_s)) + f'(t - h/(2c_s))]. \quad (8)$$

Combinées avec la loi de frottement (2), et en notant la fonction inconnue $g(t) = f(t + h/(2c_s))$, ces équations conduisent au système différentiel avec délai

$$\begin{cases} \tau_{ss}(V) - \rho c_s [g(t) + g(t - h/c_s)] &= F[V + 2[g(t) - g(t - h/c_s)], \phi], \\ \dot{\phi} &= -G[V + 2[g(t) - g(t - h/c_s)], \phi], \end{cases} \quad (9)$$

qui détermine la dynamique de l'interface. Son intégration est possible dès que la courbe des données initiales $g(t) = \gamma(t)$ est spécifiée sur l'intervalle $-h/c_s \leq t \leq 0$.

Si nous supposons de plus que l'état interfacial varie peu pendant le temps h/c_s qui caractérise l'aller-retour des ondes, nous pouvons développer en série de Taylor les fonctions $f(t \pm h/(2c_s))$ et $f'(t \pm h/(2c_s))$. À l'ordre $O(h/c_s)^3$, ces développements réduisent (8) à un système linéaire pour $f'(t)$ et $f'''(t)$ dont la solution permet de relier $f'(t)$ et $f'''(t)$ à $v(t)$ et $\dot{\tau}(t)$. La double dérivée de $f'(t)$ devant être égale à l'expression obtenue pour $f'''(t)$ conduit à une approximation différentielle de l'équation du mouvement (9)₁ de l'interface

$$\dot{\tau} = (G/h)(V - v) - (\rho h/8)\ddot{v} - (h/c_s)^2 \ddot{\tau}/24. \quad (10)$$

Nous reconnaissons en cette équation celle du mouvement d'un bloc de masse $M = \rho h/8$ tiré à vitesse V par un ressort³ de raideur $k = G/h$ connecté en parallèle avec un "piston" à l'origine de la force dissipative

$$F_r = (h/c_s)^2 \ddot{\tau}/24, \quad (11)$$

qui traduit le rayonnement élastique. Notons que cette force généralise celle obtenue par [8].

Choisissant les échelles caractéristiques de longueur L , de temps L/V_* et de contrainte σ , le système (9) et l'équation (10) adimensionnés font apparaître les deux paramètres de contrôle

$$\epsilon = \rho c_s V_*/\sigma \quad \text{et} \quad r = (h/c_s)/(L/V_*), \quad (12)$$

qui représentent l'impédance et le délai (sans dimension) du système relativement aux échelles σ/V_* (impédance interfaciale) et L/V_* (mémoire interfaciale) qui caractérisent la résistance au mouvement de l'interface due au frottement. En plus de V , cette paramétrisation reflète le fait que ce sont σ et h qui sont les deux paramètres (dimensionnels) de contrôle du système, et qui peuvent a priori être aisément variés expérimentalement. Notons que la raideur (sans dimension) du système dépend de ϵ et r selon

$$\kappa = kL/\sigma = \epsilon/r, \quad (13)$$

et ne représente donc plus une paramétrisation astucieuse. Le système sans dimension correspondant à (9) s'obtient formellement en remplaçant ρc_s par ϵ et h/c_s par r ; la forme sans dimension de (10) s'obtient par les substitutions $G/h \rightarrow \epsilon/r$ et $\rho h \rightarrow \epsilon r$. Les résultats qui suivent sont présentés par rapport aux formes sans dimension de (9) ou (10).

3 Stabilité du glissement

La linéarisation du système (9) autour de la solution stationnaire $(g, \phi) = (0, \phi_{ss}(V))$ correspondant au glissement à vitesse V de l'interface conduit à l'équation transcendente $Q(s, r) = 0$ qui détermine le taux de croissance exponentiel s d'une perturbation. On trouve que

$$Q(s, r) = A(s) + C(s) e^{-sr} = 0, \quad (14)$$

où $A(s) = (F_v + \epsilon/2)s + G_\phi(F'_{ss} + \epsilon/2)$ et $C(s) = -(F_v - \epsilon/2)s - G_\phi(F'_{ss} - \epsilon/2)$. Les dérivées partielles de F et G par rapport à v et ϕ sont notées F_v, F_ϕ, G_v, G_ϕ , et sont évaluées à $(v, \phi) = (V, \phi_{ss}(V))$.

Quand r augmente, l'analyse de (14) montre qu'une paire de racines complexes conjuguées $s = s_r + i\omega$ traversent l'axe imaginaire⁴ pour une fréquence et un délai critiques

$$\omega_c^2 = -G_\phi^2 F'_{ss}/F_v \quad \text{et} \quad r_c = \frac{\tan^{-1}(r_* \omega_c/2)}{\omega_c/2}. \quad (15)$$

La valeur critique de r dans l'approximation quasi-statique est notée $r_* = -\epsilon/(G_\phi F'_{ss})$; elle correspond à la limite $r_* \omega_c \rightarrow 0$ dans (15)₂. La frontière de stabilité dans le plan (ϵ, r) est quant à elle donné par

$$\epsilon_c = -G_\phi F'_{ss} \frac{\tan(r \omega_c/2)}{\omega_c/2}. \quad (16)$$

Notons que le développement de (15)₂ dans la limite quasi-statique $r_* \omega_c \rightarrow 0$ conduit à la raideur critique (sans dimension) $\kappa_c = \epsilon/r_c = \kappa_* + \epsilon r_* \omega_c^2/12 + \dots$ pour laquelle $\kappa_* = \epsilon/r_* = -G_\phi F'_{ss}$ correspond à la raideur critique quasi-statique. On reconnaît l'expression (6)₁ de la raideur critique du système patin-ressort de masse adimensionnelle $\epsilon r_*/12$.

Les frontières de stabilité (15)₂ et (16) qui délimitent les domaines de glissement stationnaire stable du domaine de *stick-slip* sont représentées à la figure 1 pour la loi de Dieterich. Elles y sont de plus comparées à leurs approximations $\tilde{r}_c = r_* + 2r_* \sin(\theta/3 - \pi/6)/\cos^{1/3}(\theta)$ et $\tilde{\epsilon}_c = -G_\phi F'_{ss} r \frac{r^2 - 24/\omega_c^2}{3(r^2 - 8/\omega_c^2)}$, où $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{\alpha})$ et $\alpha = (1 + 8/(r_* \omega_c)^2)^3 - 1 > 0$, obtenues à partir de l'approximation différentielle (10) de (9).

³Nous définissons par y la force élastique telle que $\dot{y} = (G/h)(V - v)$ d'après l'équation du mouvement (10).

⁴du domaine stable $s_r < 0$ au domaine instable $s_r > 0$;

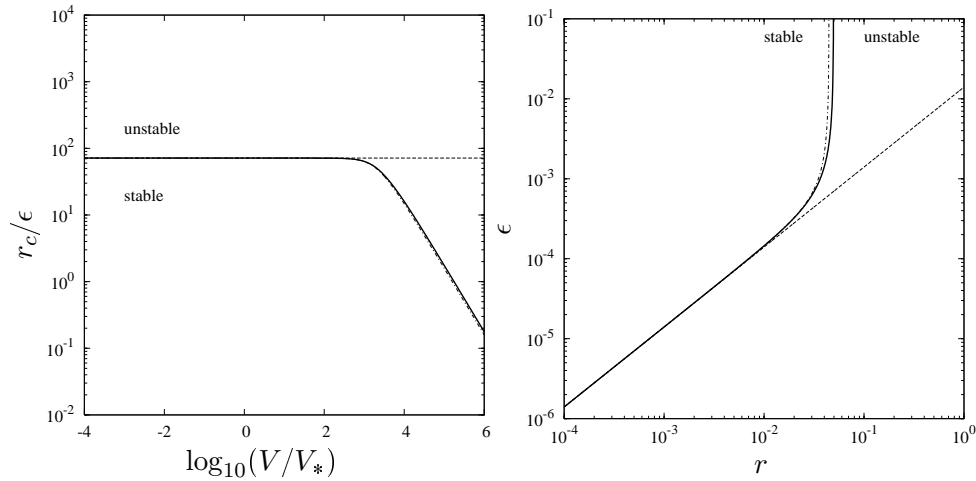


FIG. 1 – Frontières de stabilité (15)₂ et (16) pour la loi de Dieterich (—). Le glissement stationnaire est stable pour $r \leq r_c$ ou $\epsilon \geq \epsilon_c$. Les lignes ---- correspondent aux approximations de r_c et ϵ_c obtenues pour (10). La ligne ---- représente la frontière r_* du cas quasi-statique (sans propagation d’onde). Paramètres : $\epsilon = \rho c_s V_*/\sigma = 2.8 \times 10^{-5}$, $V/V_* = 100$; $a_* = 0.369$, $a = 0.0349$, $b = 0.0489$, $L = 0.9 \mu\text{m}$, $V_* = 1 \mu\text{m/s}$, $\phi_* = L/V_*$.

4 Complexité du glissement

Pour différentes valeurs du délai $r > r_c$, nous illustrons maintenant l’effet de la réverbération des ondes sur la dynamique de l’interface à travers quelques résultats numériques obtenus pour la loi de Dieterich et des valeurs des paramètres $V = 100V_*$ et $\epsilon = 2.8 \times 10^{-5}$.

Il est intéressant de commenter tout d’abord les prédictions de l’approximation différentielle (10). La figure 2(a) présente un cycle limite stable pour une valeur du délai $r = 10^{-2.68}$ voisine de la valeur critique $r_c \approx 10^{-2.69}$. Nous voyons que des oscillations de la force de frottement μ , rapides et d’amplitude non négligeable, se superposent à l’accroissement de la force élastique $y \sim (\epsilon/r) Vt$ pendant la phase quasi-statique du cycle [7]. Pendant cette phase, $v \ll V$ et l’inertie $\epsilon r \dot{v}/8$ est négligeable. La force de frottement obéit alors à l’oscillateur harmonique $r^2 \ddot{\mu}/24 + \dot{\mu} \approx (\epsilon/r) V$, de période $T_\nu = \pi r/\sqrt{6}$ qui est donc déterminée clairement par le délai r .

Concernant le système exact (9), cette conclusion est confirmée. La période des oscillations correspond exactement au délai suite à (8)₁. En effet, comme $v \ll V$, la fonction $g(t) = f(t + r/2)$ est déterminée par l’équation aux différences linéaire $g(t) \approx g(t - r) - V/2$. La figure 2(b) montre que les solutions numériques des systèmes exact (9) et approché (10) sont voisines. Le système approché (10) sous-estime cependant la durée totale d’un cycle complet de *stick-slip* : on trouve $T_{(9)} \approx 73.5$ et $T_{(10)} \approx 70.7$ (mesurée en unité temps h/c_s). La figure 3(a) montre que la période du *stick-slip* du système avec délai est encadrée par ces diverses approximations. Il est enfin important de noter que le cycle complet de *stick-slip* du système (9) est circonscrit par celui d’un système patin-ressort “moyen” correspondant à une masse $M = \epsilon r/12$ que donne l’analyse de [7].

Ces résultats sont résumés par le diagramme de bifurcation de la figure 3(b) qui représente l’évolution de l’amplitude de la chute de contrainte $\Delta y = \max y - \min y$ avec r pour le système différentiel (10). Son amplitude est plus faible que celle de $\Delta \mu = \max \mu - \min \mu$ à cause de ses oscillations rapides. On voit que ces amplitudes minorent légèrement celles du système exact. Il est par ailleurs intéressant de voir (fig. 3(b)) que les cycles de *stick-slip* naissant à partir de la bifurcation de Hopf deviennent instables, d’abord par des bifurcations par doublement de période (fig. 3(c)), puis par une bifurcation de type Neimark-Sacker ($r_{\text{TR}} = 10^{-2.468}$) après laquelle l’orbite primaire n’est plus restabilisée.

La figure 4 illustre enfin pour les deux systèmes l’apparition de modes de glissement complexes lorsque que le délai r est choisi bien à l’intérieur du domaine instable, ici pour $r = 10^{-2.3}$. Nous notons

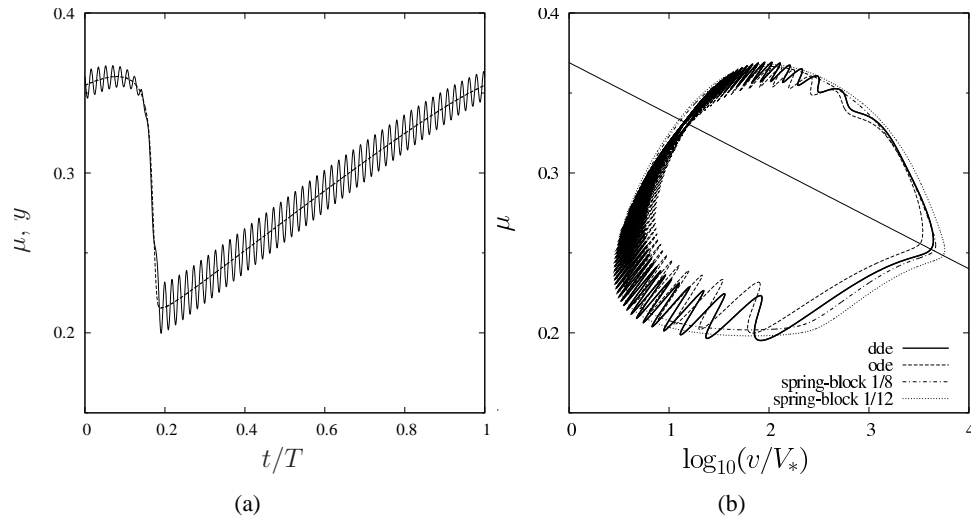


FIG. 2 – Un exemple de cycle limite stable de l’approximation (10) pour la loi de Dieterich. Notons les oscillations rapides de μ durant la phase quasi-statique. Symbols : (a) μ —, y ---- ; (b) Les cycles dde et ode correspondent aux systèmes exact (9) et approché (10). La droite — représente $\mu_{ss}(V)$. Paramètres : $V/V_* = 100$, $r = 10^{-2.68}$, $\epsilon = 2.8 \times 10^{-5}$.

toutefois leurs multiples différences qui illustrent les limites de l’approximation différentielle (10). Tout d’abord, les oscillations rapides pendant la phase quasi-statique restent sinusoidales (mais d’amplitude variable) entre deux glissements inertiels par rapport à celles prédites par le système exact. Pour celui-ci, il est très intéressant de noter la richesse de leur structure temporelle très dentelée. La phase inertielle est aussi différente. Alors qu’elle montre de oscillations de grande amplitude de type *stick-slip* pour le système différentiel, cette phase reste pincée le long de $\mu_{ss}(V)$ pour le système exact. Dans ce cas, le cycle obtenu rappelle celui des oscillations de relaxation du système patin-ressort décrit par [7], exception faite des oscillations rapides de la phase quasi-statique.

5 Conclusion

Nous avons montré que la dynamique non-linéaire du frottement de deux couches élastiques identiques est contrôlée, en plus de la vitesse V , par l’impédance relative $\epsilon = \rho c_s V_*/\sigma$ et le temps de réverbération relatif $r = (h/c_s)/(L/V_*)$. Le mode de glissement stationnaire devient instable par une bifurcation de Hopf si $r \geq r_c$ ou, de façon équivalente, si $\epsilon \leq \epsilon_c$.

Il est possible d’approcher la dynamique du système différentiel avec délai qui détermine le mouvement des couches par un système d’équations différentielles ordinaires s’interprétant comme celui d’un patin de masse $M = \rho h/8$ mû par un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt de raideur $k = G/h$ et dont le piston développe une force dissipative $F_r = (h/c_s)^2 \ddot{\gamma}/24$.

Concernant les oscillations de *stick-slip*, l’inertie des couches impliquée dans la propagation des ondes élastiques n’est pas négligeable et est à l’origine d’oscillations rapides de période r pendant la phase quasi-statique, et ceci indépendamment de la loi de frottement.

Les cycles de *stick-slip* peuvent devenir instables pour des valeurs de r ou ϵ suffisamment différentes de leurs valeurs critiques. Des modes de glissement complexes sont alors possibles. Leur caractérisation fait l’objet d’une étude en cours.

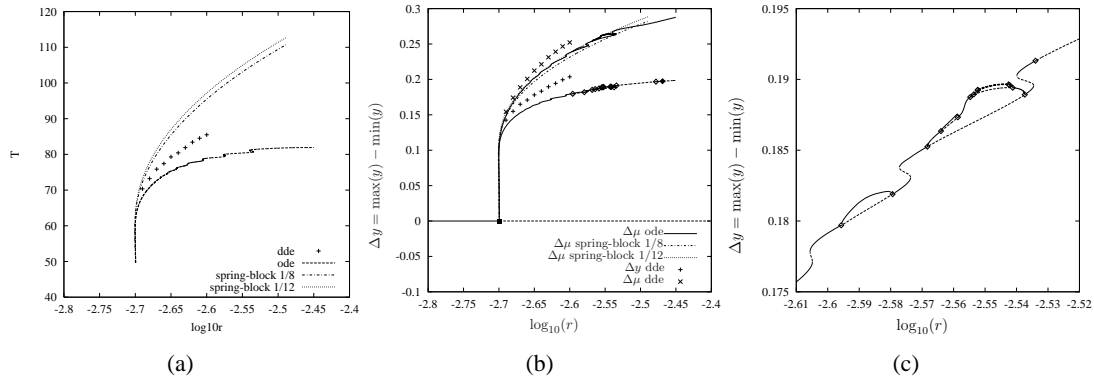


FIG. 3 – (a) Comparaison des périodes du *stick-slip* (en unité h/c_s). (b) Diagramme de bifurcation montrant la chute de contrainte élastique $\Delta y := \max(y) - \min(y)$ pour l'approximation (10). Points de bifurcation : \blacksquare : Hopf ; \diamond : doublement de période ; \blacklozenge : Neimark-Sacker. Pour comparaison, les courbes en train fin donnent des estimations de $\Delta\mu$ pour les diverses approximations de type patin-ressort (cf. légende). (c) Zoom du diagramme de bifurcation sur Δy représentant l'amplitude des orbites créées par doublement de période. Paramètres : $\epsilon = 2.8 \times 10^{-5}$, $V/V_* = 100$.

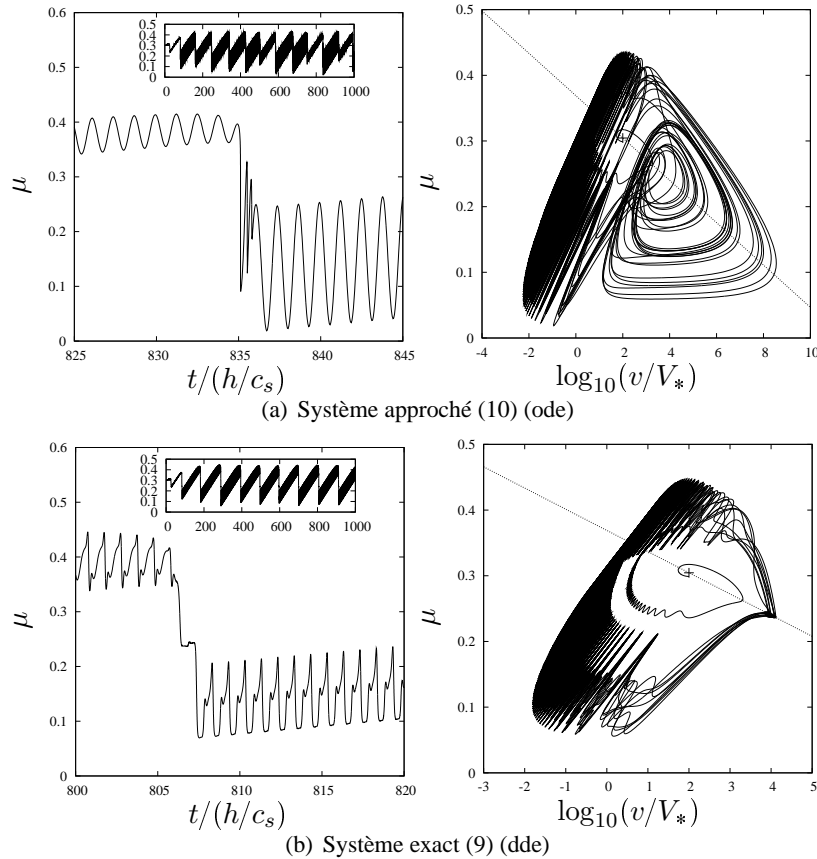


FIG. 4 – Comparaison des modes de glissement complexes dynamics des systèmes exact et approché calculés par intégration temporelle. Paramètres : $r = 10^{-2.3}$, $\epsilon = 2.8 \times 10^{-5}$, $V/V_* = 100$.

Références

- [1] A. Ruina. Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.*, 88 :10,359–10,370, 1983.
- [2] Y. Gu and T.-F. Wong. Nonlinear dynamics of the transition from stable sliding to cyclic stick-slip in rock. In W.I. Newman, A. Gabrielov, and D.L. Turcotte, editors, *Nonlinear Dynamics and Predictability of Geophysical Phenomena*, number 83 in IUGG Geophysical Monograph, pages 15–35. American Geophysical Union, 1994.
- [3] J. R. Rice and A. L. Ruina. Stability of steady frictional slipping. *J. App. Mech.*, 50 :343–349, 1983.
- [4] J. C. Gu, J. R. Rice, A. L. Ruina, and S. T. Tse. Slip motion and stability of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction. *J. Mech. Phys. Solids*, 32 :167–196, 1984.
- [5] F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli. Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics : Experiments and a heuristic model. *Phys. Rev. E*, 49 :4973–4988, 1994.
- [6] T. Putelat, J. H. P. Dawes, and J. R. Willis. Regimes of frictional sliding of a spring-block system. *J. Mech. Phys. Solids*, 58 :27–53, 2010.
- [7] T. Putelat, J. R. Willis, and J. H. P. Dawes. On the seismic cycle seen as a relaxation oscillation. *Phil. Mag.*, 88 :3219–3243, 2008.
- [8] A. Johansen and D. Sornette. Acoustic radiation controls dynamic friction : evidence from a spring–block experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :5152–5155, 1999.