

Modélisation du comportement dynamique des engrenages: Évaluation et prise en compte des flexibilités dans les modèles à paramètres concentrés.

H. JERRAR, M. BOUDI

Université Mohammed V, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs (EMI) de Rabat
Département génie mécanique, équipe de recherche TURBOMACH
BP N° : 765, avenue Ibn Sina Agdal, Rabat (Maroc). Courriel: jerrarrhicham@gmail.com

Résumé :

Un processus de calcul des différentes contributions des flexibilités (denture, fondation de la denture, roue, arbre et pression de contact) est proposé. Ce processus est basé sur la théorie de Hertz pour la pression de contact et sur l'exploitation des champs des déplacements donnés par la méthode des éléments finis pour le reste des contributions. Ensuite, ledit processus est utilisé pour l'étude progressive de l'effet des contributions sur la raideur d'engrènement. Les résultats montrent qu'il n'est pas toujours possible de réduire la raideur d'engrènement à la contribution de la flexibilité de denture uniquement, dans les modélisations d'engrenages à paramètres concentrés.

Abstract:

A workflow of determining different contributions of compliances (tooth, tooth foundation, wheel, shaft and pressure contact) is proposed. This workflow is based on Hertz theory for the pressure contact, and on the exploitation of the displacements fields given by the three-dimensional finite elements method, for the rest of contributions. After that, the workflow is used to study the progressive compliance contributions effect. The results show that it is not always possible to consider the effect of tooth mesh stiffness only, in gears concentric parameters modeling.

Mots clés: raideur d'engrènement, erreur de transmission, modélisations d'engrenages à paramètres concentrés, méthodes des éléments finis tridimensionnels, pression de Hertz.

1. Introduction

Dans la littérature, plusieurs modèles ont été élaborés pour s'approcher le maximum possible des conditions réelles afin de prédire le comportement dynamique des engrenages. Historiquement, les modèles se basent sur une modélisation masse-ressort et à paramètres concentrés (figure 1), considérant l'engrènement : deux cylindres rigides reliés par une raideur d'engrènement. Plusieurs de ces modèles privilégient les effets torsionnels et négligeaient ceux flexionnels afin d'obtenir des modèles à un seul degré de liberté par roue, nous citons les plus récentes : [1] et [2]. D'autres études, mais ce n'est que récemment, se basent sur des paramètres distribués pour tenir compte du couplage de différentes contributions des flexibilités [3]. Le présent travail vise à évaluer l'effet de la prise en compte des contributions de flexibilités (denture, fondation de la denture, corps de la roue, arbre et pression de contact) sur la raideur d'engrènement et sur l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, pour décider sur la possibilité de réduire ou ne pas réduire la raideur d'engrènement à l'unique contribution de la déformation élastique de la denture dans les modèles à paramètres concentrés.

La première partie est consacrée à la proposition et la description d'un processus de calcul des différentes contributions des flexibilités (denture, fondation de la denture, corps de la roue, arbre et pression de contact). La déformation due à la pression de contact est calculée par la théorie de Hertz tandis que le reste des flexibilités sont déterminées à partir des champs des déplacements donnés par la méthode des éléments finis tridimensionnels (MEF-3D), pour laquelle nous utilisons le logiciel commercial CATIA V5R19. La deuxième partie quant à elle, est une application dudit processus progressivement à un cas

d'engrenage d'inversion de sens pour analyser l'effet des contributions sur la raideur d'engrènement et l'erreur de transmission quasi-statique sous charge.

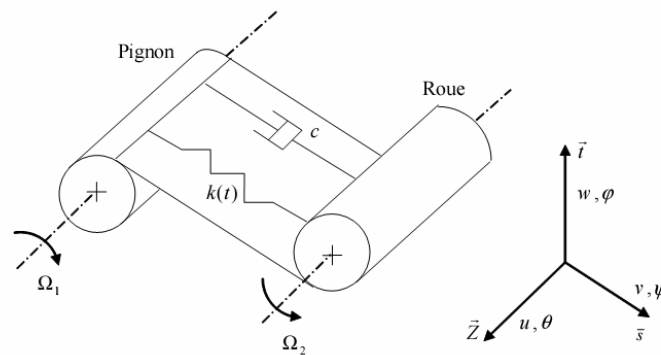


FIG. 1 – Modèle à paramètres concentrés d'après [1].

2. Processus de calcul des différentes contributions des flexibilités:

Ledit processus se compose de trois étapes principales (figure 2):

- La construction géométrique et modélisation 3D du couple « pignon + roue avec arbres »,
- La détermination de la raideur du couple de dents conjuguées en prise à partir du rapprochement normal au contact tenant compte de la contribution:
 - des flexibilités (denture, fondation de la denture, corps de la roue et arbre) par la MEF-3D.
 - et de l'écrasement dû à la pression de contact par la théorie de Hertz.
- Enfin, le calcul de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge.

Afin de déterminer l'écrasement induit par la pression de contact, nous utiliserons la formulation tridimensionnelle de Lundberg [6], équation (1):

$$\delta = 2 \frac{F}{b} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left[\frac{1}{2} + \log(2) + \log\left(\frac{b}{a_H}\right) \right] \quad (1)$$

Avec F/b : charge par unité de longueur, E : module d'élasticité, ν : coefficient de poisson,

et $a_H = \sqrt{8 \frac{F}{b} r \frac{1-\nu^2}{\pi E}}$: est la demi largeur du contact hertzien (figure 3) et $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$: le rayon de

courbure équivalent au point de contact considéré, r_m étant celui de la roue dentée m ($m=1,2$). Le rayon de courbure évolue le long du contact (figure 5-d).

3. Effet des contributions des flexibilités sur la raideur d'engrènement et sur l'erreur de transmission quasi-statique sous charge:

La raideur équivalente totale d'un couple de dents en prise, est donnée par [7], équation (2):

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_{ec}} + \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_t} \quad (2)$$

Avec : K_f est la raideur de flexion des dents, K_{ec} est la raideur à l'écrasement, K_v est la raideur des voiles des corps des roues et K_t la raideur à la torsion des lignes d'arbres. Certains auteurs, par exemple [2], considèrent $1/K_{ec}$, $1/K_v$ et $1/K_t$ suffisamment petites pour être négligées et réduisent la raideur équivalente à l'unique raideur de flexion des dents. Nous nous proposons d'appliquer le processus de la figure 2, progressivement pour mettre en évidence la contribution de chaque flexibilité, et offrir ainsi une méthodologie permettant de décider sur les contributions à négliger et celles à considérer.

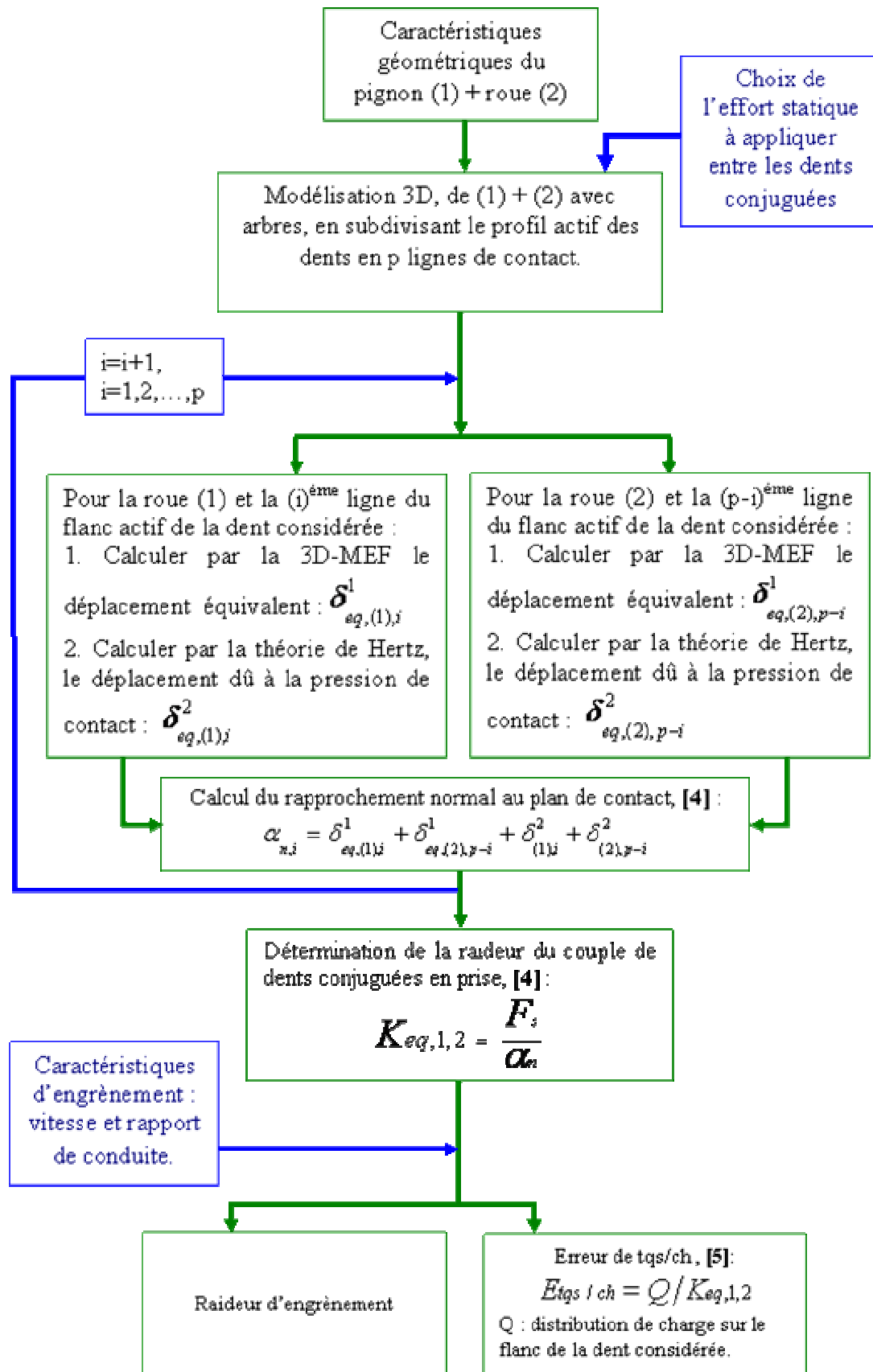


FIG. 2 – Processus de calcul des différentes contributions des flexibilités (denture, fondation de la denture, corps de la roue, arbre et pression de contact) à l'aide de la MEF-3D et la théorie de Hertz

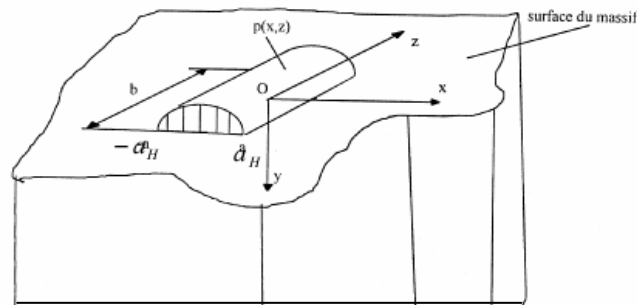


FIG. 3 – Demi espace élastique soumis à une distribution hertzienne pour la formule de Lundberg, d’après [1]

L’engrenage, objet de l’application du processus, est issu de la littérature [8]. Mais pour pouvoir l’appliquer progressivement, il y a lieu de réaliser la construction tridimensionnelle d’une dent isolée, puis la roue dentée sans arbres et enfin la roue dentée avec arbre (figure 4) :

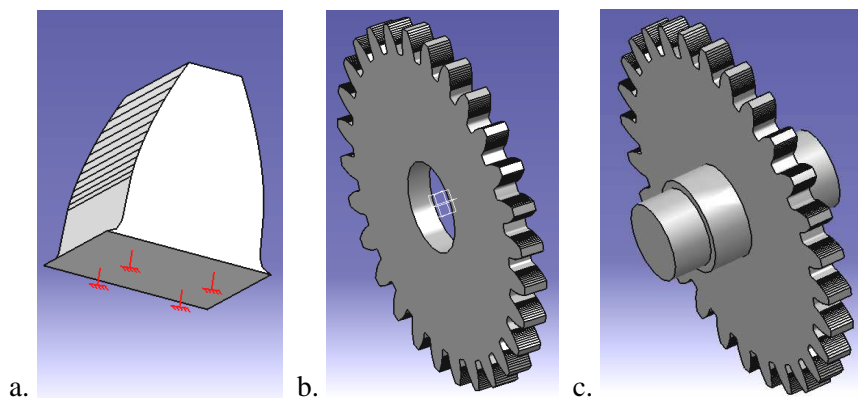


FIG. 4 – Modélisations tridimensionnelles pour application du processus (figure 2) progressivement :
 4-a: dent isolée encastée à sa base, 4-b: roue sans arbre, 4-c: roue avec arbre (continuité matière).

Les caractéristiques de l’engrenage étudié sont: Nombre de dents $Z = 28$; Largeur de denture $L = 6,250\text{mm}$; Module $M = 3,175\text{mm}$; Angle de pression $\alpha = 20^\circ$; Angle d’hélice $\beta = 0^\circ$; Coefficient de creux $hf/M = 1,4$; Coefficient de saillie $ha/M = 1$; Rayon de raccordement en pied de dent $R_c = 0,635\text{mm}$; Diamètre intérieur $\Phi_{\text{int}} = 24\text{ mm}$ (figure 5-a). La construction géométrique de la dent et la préparation des points appartenant au profil de la dent en développante de cercle sont présentées à la figure 5-b. Ces points sont utilisés par la fonction extrusion, pour générer les lignes de contact présentées à la figure 5-c. Le matériau est de l’acier et l’effort statique $F_s = 1615\text{ N}$ appliqué perpendiculairement au profil à chaque ligne de contact, au fur et à mesure de façon à simuler l’évolution du contact entre deux dents conjuguées.

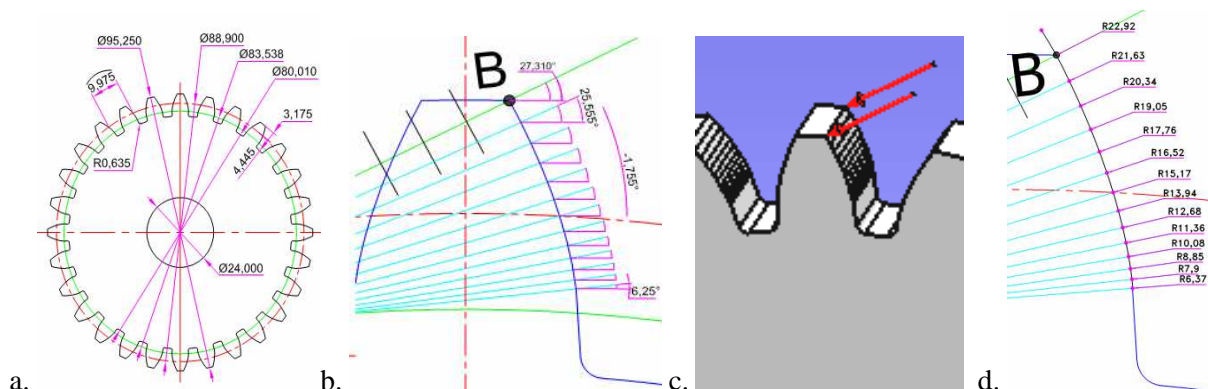


FIG. 5 –a: Détails géométriques (en mm) de la roue dentée. –b: Construction géométrique 2D de la dent et des points du profil de la dent en développante de cercle. –c: lignes de contact et application de F_s . –d : rayons de courbure aux lignes de contact considérées pour le calcul par la formulation de Lundberg.

Les résultats de l’application progressive (En utilisant à chaque fois, la méthode des éléments finis

tridimensionnels linéaires uniformes MEFLU-3D de taille $L/2^3$) du processus sont présentés à la figure 6: la pression de contact, suivie de la dent isolée encastrée à sa base, puis la roue dentée sans arbre encastrée à son diamètre intérieur (pour tenir compte de la flexibilité de la dent, sa fondation et le corps de la roue), et enfin la roue dentée avec son arbre encastrée au niveau des portées de roulements. Nous constatons que le fait de prendre en compte les différentes contributions agit de façon importante sur les valeurs de la flexibilité du couple de dents conjuguées en prise, et par conséquent sur la raideur d'engrènement et l'erreur de transmission quasi-statique sous charge. Et que la seule contribution qui peut être négligée ici, est celle de l'écrasement par la pression de contact. En effet, la moyenne de la flexibilité de l'écrasement est de 0,005835, soit 0,055 % de la moyenne de flexibilité de la dent isolée et 0,0155 % de celle de la roue avec arbre (contenant toutes les contributions flexionnelles). A noter que la moyenne trouvée pour la flexibilité adimensionnée de la dent isolée est égale à 10,55 , et que les normes [9] permettent de trouver une moyenne adimensionnée pour la même contribution égale à 12,14 , qui sont deux valeurs de même ordre de grandeur. Et que toutes les flexibilités (par conséquent, toutes les raideurs) de l'engrènement étudié, retrouvent la forme parabolique qui en est une propriété [9].

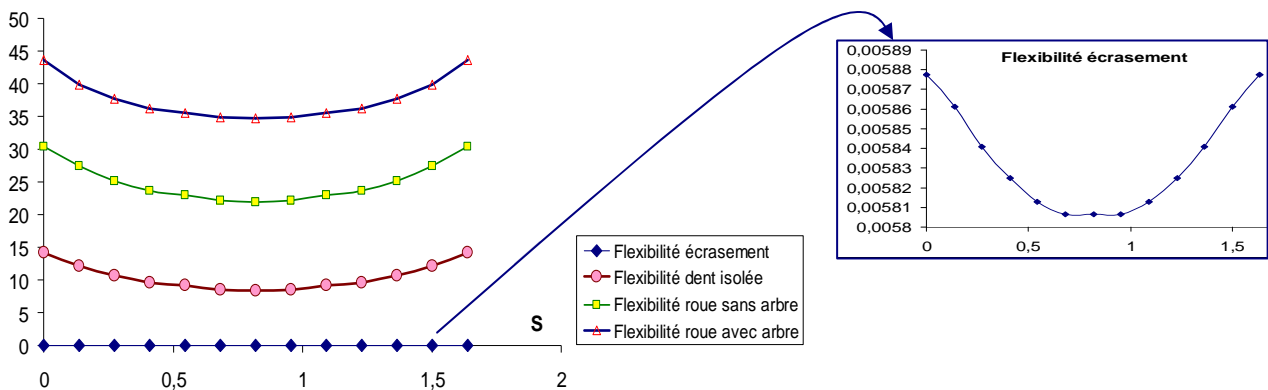


FIG. 6 – Flexibilités adimensionnées du couple de dents selon les contributions prises en compte.

En inversant la flexibilité adimensionnée (du couple de dents) tenant compte de la contribution de l'écrasement, la denture, sa fondation, le corps de la roue et l'arbre, nous obtenons la raideur $K_{eq,1,2}$ permettant de déterminer à l'aide du processus de la figure 2 : la raideur d'engrènement de la dent isolée est donnée à la figure 7–a, et celle de la roue avec arbre (toute contribution prise en compte) est donnée par la figure 7–b. Quant à l'erreur de transmission quasi-statique sous charge : celle de la dent isolée est présentée à la figure 8–a et celle de la roue avec arbre est présentée à la figure 8–b.

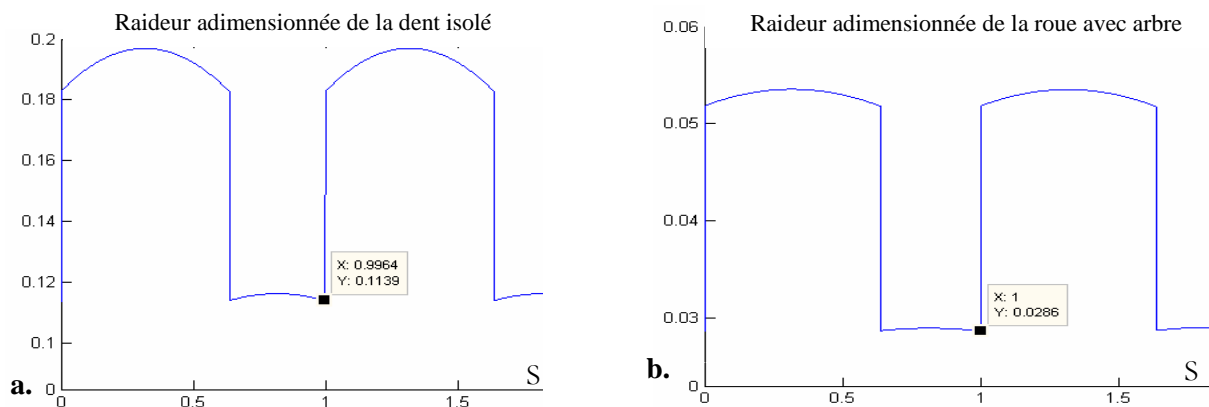


FIG. 7 – a : Raideur d'engrènement de la flexion de la dent isolée.
 – b : Celle de la roue avec arbre (toute contribution incluse).

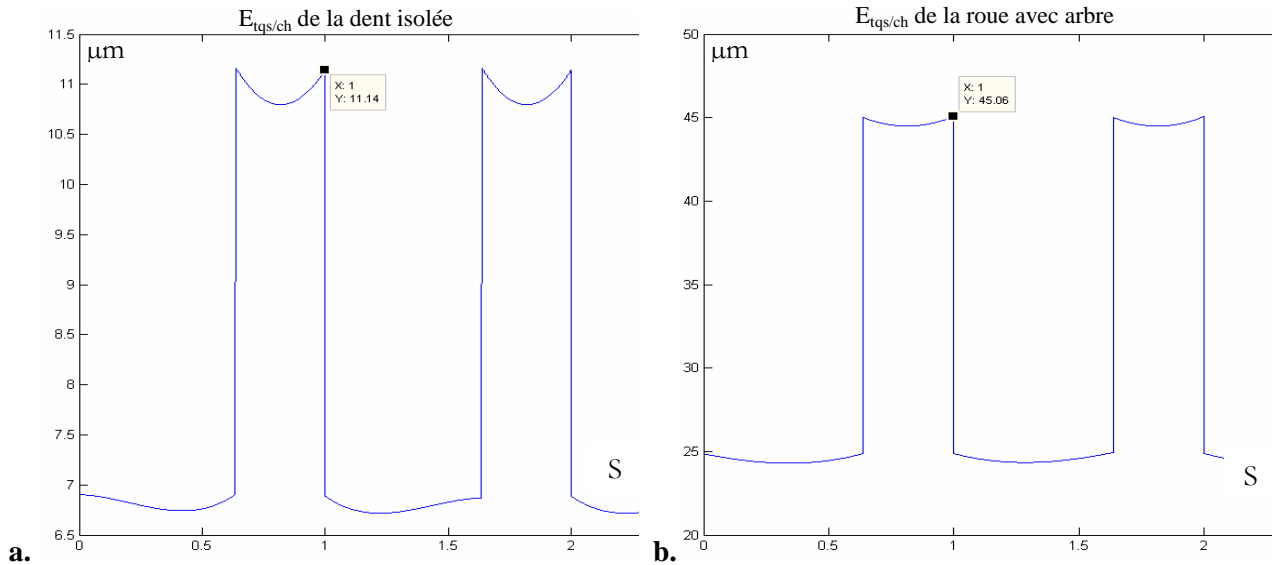


FIG. 8 – a : Erreur de transmission quasi-statique sous charge de la dent isolée.
– b : Celle de la roue avec arbre (toute contribution incluse).

Le fait d'avoir réduit la raideur d'engrènement à l'unique contribution de la flexion de la dent (figure 7-a) donne une raideur minimale de $0,1139/0,0286 = 4$ fois plus supérieure que si nous avons considéré toutes les contributions (figure 7-b), ce qui peut induire en erreur les simulations du comportement dynamiques des engrenages et donner l'impression qu'on est à l'abri de phénomènes destructifs: Car les valeurs élevées de raideur d'engrènement permettent [10], de supprimer les sauts d'amplitudes des résonances super harmoniques et changent la nature de la résonance principale passant du « type hard » au « type soft ». Et particulièrement, l'augmentation de la partie de raideur exprimant le contact entre une seule paire de dents (partie de la raideur d'engrènement minimale), permet de diminuer les mouvements à double impact et de diminuer l'amplitude de la réponse fréquentielle.

De même, l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, en ne considérant que la contribution de la flexion de la denture (figure 8-a), donne une erreur maximale de $45,06\mu m/11,14\mu m = 4$ fois plus inférieure que si nous avons considéré toute les contributions (figure 8-b), alors que nous avons intérêt à avoir une erreur de transmission la plus faible possible, ce qui donnera une fausse évaluation de la précision de l'engrenage à concevoir et donnera une sous-évaluation du coefficient de chargement dynamique, étant donnée sa relation de proportionnalité avec l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, [5].

4. Conclusion :

Un processus de détermination de la raideur d'engrènement équivalente et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est proposé. Ce processus permet de prendre en considération toutes les contributions des flexibilités, à savoir : l'écrasement engendré par la pression de contact, la flexion de la denture, la fondation de la denture, le voile du corps de la roue et l'arbre. La théorie de Hertz est utilisée pour déterminer l'écrasement, tandis que la méthode des éléments finis tridimensionnels linéaires uniformes est utilisée pour les autres contributions. En plus, ledit processus offre un outil de décision sur les contributions à prendre en considération et celles à négliger dans les models à paramètres concentrés, et ceci par la prise en compte progressive des différentes contributions. L'application à un cas d'engrenage simple étage cylindrique droit à développante de cercle a permis de dégager les résultats suivants:
-La MEFLU-3D a permis de retrouver la forme parabolique des raideurs pour toutes les contributions.
-La prise en compte progressive des différentes contributions agit considérablement sur les résultats obtenus, et que la seule contribution qui peut être négligée dans le cas étudié est la flexibilité de l'écrasement.
-La réduction de la raideur à l'unique contribution de la flexion de la denture, a produit une augmentation de la valeur de la raideur d'engrènement de 4 fois, et la diminution de la valeur de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge de 4 fois, par rapport aux valeurs obtenues si toutes les contributions sont incluses.

Une fois la décision est prise concernant les contributions à prendre en considération, les précisions des

valeurs de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge, peuvent être améliorées par les approches proposées par [11].

Références:

- [1] Sika G., « Dynamique des transmissions en régime transitoire », thèse de doctorat 2008, INSA de Lyon.
- [2] Chaari & al., « Simulation numérique du comportement dynamique d'une transmission par engrenages en présence de défauts de denture » *Mécanique & Industries* 6, 625-633, 2006.
- [3] Bettaieb M., « Modélisation du comportement mécanique d'engrenages. Couplages entre engrènement et éléments de structures flexibles », thèse de doctorat 2006, INSA de Lyon.
- [4] Bard C., « Modélisation du comportement dynamique des transmission par engrenages », thèse de doctorat 1995, INSA de Lyon.
- [5] Lin & al., « Profile Modification to minimize spur gear dynamic loading » NASA Technical Memorandum 89901. The Design Engineering Technical Conference, 1988.
- [6] Lundberg G., « Elastiche berührung zweier halbraüne (Elastic contact of two half spaces) », *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, 1939, Vol.10, N°:5, P.201-211.
- [7] Vexlex P., « Contribution à l'analyse du comportement dynamique des engrenages à axes parallèles », thèse de doctorat 1984, INSA de Lyon.
- [8] Karra et al. « Modélisation bidimensionnelle par éléments finis d'un engrenage droit: étude de la raideur d'engrènement et des contraintes au pied de la dent » *TCSME*, Vol 33, N° 2, 2009.
- [9] Spinnler G. « Conception des machines : principes et applications, Tome 1: Statique » 2002.
- [10] Aissaoui H., « Vibrations non linéaires d'un système d'engrenage droit avec une rigidité d'engrènement variable et un jeu de denture » thèse de doctorat 2006, à l'EMI.
- [11] Jerrar H. & Boudi M., « Modélisation du comportement dynamique des engrenages: étude de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge par la méthode des éléments finis tridimensionnels », 20^{ème} Congrès Français de Mécanique, N° 699, 2011.