

# Modélisation du comportement dynamique des engrenages: Étude de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge par la méthode des éléments finis tridimensionnels.

H. JERRAR, M. BOUDI

Université Mohammed V, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs (EMI) de Rabat  
Département génie mécanique, équipe de recherche TURBOMACH  
BP N° : 765, avenue Ibn Sina Agdal, Rabat (Maroc). Courriel: [jerrarhicham@gmail.com](mailto:jerrarhicham@gmail.com)

## Résumé :

*Un processus de détermination de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge est présenté. Ce processus est basé sur l'exploitation du champ des déplacements obtenu par la méthode des éléments finis tridimensionnels. Vu l'importance et l'influence de ces deux paramètres sur les résultats des simulations du comportement dynamique des engrenages : L'effet du raffinement du maillage est analysé, une méthode rapide d'amélioration de la précision exploitant la forme parabolique de la raideur du couple de dents conjuguées en prise des engrenages cylindriques droits est proposée en plus d'une approche utilisant l'extrapolation de Richardson pour évaluer et améliorer ladite précision.*

## Abstract :

*A workflow of determining the meshing stiffness and the quasi-static transmission error under load is presented. This workflow is based on the exploitation of the displacements field obtained by the use of three-dimensional finite elements method. Considering the importance and the influence of these two parameters on the results of the gears dynamic behaviour simulations: The effect of mesh refining is analyzed, a fast method to improve the precision, using the parabolic property of the spur gear stiffness is proposed in addition to an approach based on the Richardson extrapolation to evaluate and improve that precision.*

**Mots clefs:** raideur d'engrènement, erreur de transmission quasi-statique sous charge, méthodes des éléments finis tridimensionnels, extrapolation de Richardson,

## 1. Introduction

Avant de pouvoir effectuer des simulations du comportement dynamiques des engrenages, il est nécessaire d'estimer de la façon la plus précise possible : la raideur d'engrènement et l'erreur de transmission. En effet, ces deux paramètres constituent les principales causes d'excitations associées à l'engrènement et servent d'entrées auxdites simulations [1].

Pour répondre à cette nécessité, la première partie du présent travail est consacrée à la présentation d'un processus de détermination de la raideur équivalente d'engrènement ( $K_{eng,eq}$ ) et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge ( $E_{tqs/ch}$ ). Ce processus est basé sur l'exploitation des champs des déplacements obtenus par la méthode des éléments finis tridimensionnels (MEF-3D) en utilisant le logiciel commercial CATIA V5R19.

Ensuite, dans la deuxième partie, l'effet du raffinement du maillage est analysé suivi de la proposition d'une méthode rapide (tirant profit de la propriété de forme parabolique des engrenages cylindriques droits [2]) de détermination de ces deux paramètres et d'amélioration de leur précision. Dans ce contexte, une approche basée sur la méthode d'extrapolation de Richardson est introduite, pour quantifier l'impact de l'erreur de discrétisation de la méthode des éléments finis linéaires uniformes tridimensionnels (MEFLU-3D) et qui permet elle aussi d'améliorer la précision.

## 2. Processus de détermination de la raideur d'engrènement et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge à l'aide de la MEF-3D :

### 2.1 Description du processus:

Ce processus se compose de trois étapes principales (figure 1):

- La construction géométrique et modélisation 3D du couple « pignon + roue »,
- Le calcul par la MEF-3D des déplacements équivalents au niveau des deux dents en prise,
- Le calcul de la raideur d'engrènement équivalente et de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge.

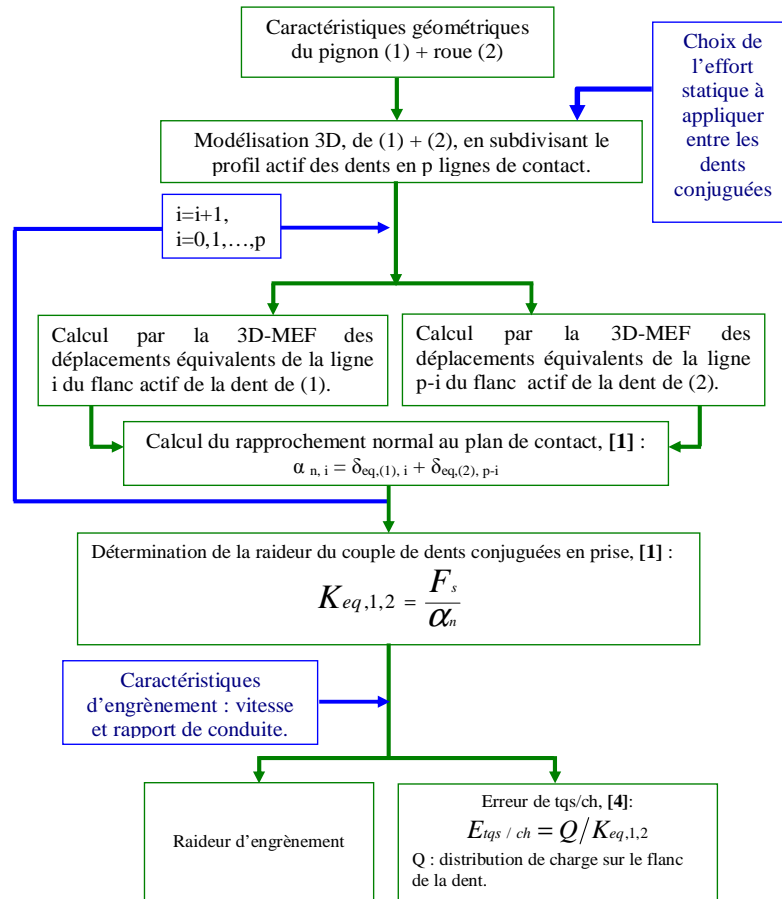


FIG. 1 – Processus de détermination de la  $K_{eng,eq}$  et de l' $E_{tqs/ch}$  à l'aide de la MEF-3D.

### 2.2 Application:

Nous allons l'appliquer à un cas de la littérature fourni par [3] qui a été basé sur une MEF-2D pour déterminer  $K_{eng,eq}$ . Il s'agit d'un engrènement d'inversion de sens (le pignon est identique à la roue, figures 2–a & 2–b), dont les caractéristiques sont : Nombre de dents  $Z = 28$ ; Largeur de denture  $L = 6,250\text{mm}$ ; Module  $M = 3,175\text{mm}$ ; Angle de pression  $\alpha = 20^\circ$ ; Angle d'hélice  $\beta = 0^\circ$ ; Coefficient de creux  $hf/M = 1,4$ ; Coefficient de saillie  $ha/M = 1$ ; Rayon de raccordement en pied de dent  $Rc = 0,635\text{mm}$ ; Diamètre intérieur  $\Phi_{int} = 24\text{mm}$  (figures 2-a). La construction géométrique de la dent et la préparation des points appartenant au profil de la dent en développante de cercle sont présentées à la figure 2–c. Ces points sont utilisés par la fonction extrusion, pour générer les lignes de contact présentées à la figure 2–d. La roue est encadrée au niveau de son diamètre intérieur et l'effort statique  $F_s = 1615\text{N}$  est appliqué perpendiculairement au profil à chaque ligne de contact, au fur et à mesure de façon à simuler l'évolution du contact entre deux dents conjuguées. Au cours de l'application du processus (figure 1), nous obtenons la raideur adimensionnée d'un couple de dents conjuguées en prise. Cette raideur et celle obtenue par [3] sont présentées à la figure 3–a. Nous remarquons que la MEFLU-3D présente l'avantage de retrouver la forme parabolique de la raideur de denture, qui en est une propriété [2]. Ce qui offre la possibilité de l'approximer par un polynôme, ici :

$$K(s) = -0,0205 \times s^2 + 0,0336 \times s + 0,0359 \quad (1)$$

Où  $s$  : est la distance parcourue par le point de contact le long de la ligne de contact, comptée à partir du début de contact et rapportée au pas de base.

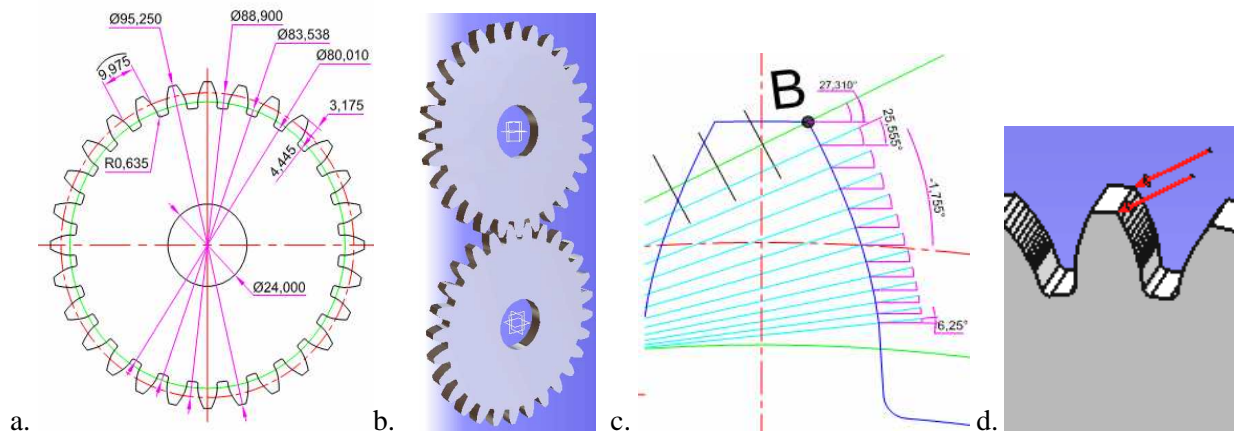


FIG. 2 –a: Détails géométriques (en mm) de la roue dentée. –b: vue 3D de l’engrenage d’inversion de sens –c : Construction géométrique 2D de la dent et préparation des points appartenant au profil de la dent en développante de cercle. –d: lignes de contact et application de  $F_s$ .

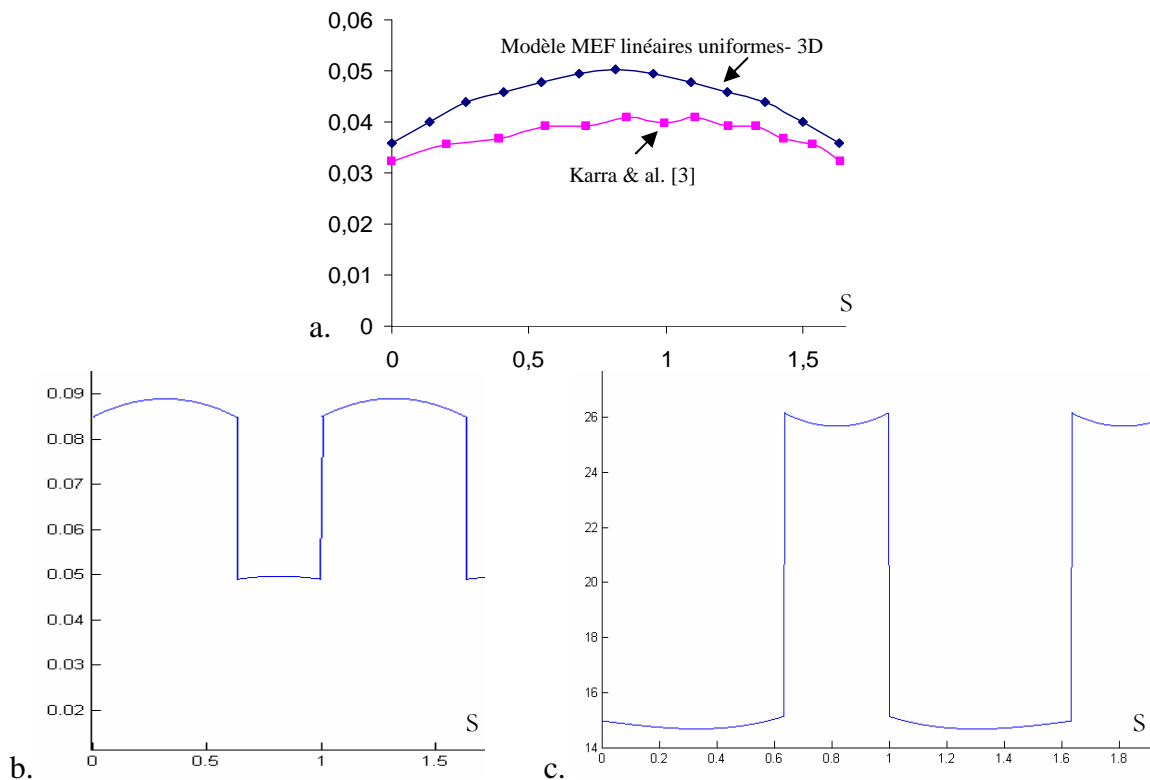


FIG. 3 –a : Raideur adimensionnée d’un couple de dents conjuguées en prise du modèle EFLU-3D et de [3]. –b, c:  $K_{eng,eq}$  adimensionnée et  $E_{tqs/ch}$  obtenues par le processus de la figure 1.

La raideur adimensionnée d’engrènement, quant à elle, elle est donnée par la figure 3–b. À une translation près (d’environ +0,01), la raideur d’engrènement obtenue et celle de [3], sont en accord. En exploitant le modèle de distribution de charge fourni par [4], l’ $E_{tqs/ch}$  est donnée par la figure 3–c: Nous avons obtenus la même tendance que [4] pour le cas d’engrenages cylindriques à développante de cercle en l’absence de modification de profil ou erreurs d’usinage ou montage.

### 3. Effet du raffinement de maillage et extrapolation de Richardson pour l'évaluation et l'amélioration de la précision des valeurs de la $K_{eng,eq}$ et de l' $E_{tqs/ch}$ :

Les valeurs de raideur d'engrènement jouent un rôle déterminant dans le comportement dynamique des engrenages, en effet l'augmentation des valeurs de cette raideur permet, [5] :  
-de supprimer les sauts d'amplitudes des résonances super harmoniques et change la nature de la résonance principale passant du « type hard » au « type soft ».

-et particulièrement, l'augmentation de la partie de raideur exprimant le contact entre une seule paire de dents, permet de diminuer les mouvements à double impact (séparation de dents suivie de collision avec la dent arrière) et de diminuer l'amplitude de la réponse fréquentielle.

En outre, nous avons toujours intérêt à avoir une erreur de transmission la plus faible possible. D'où, l'importance d'avoir des valeurs de la  $K_{eng,eq}$  et de l' $E_{tqs/ch}$  les plus précises possibles.

#### 3.1 Effet du raffinement du maillage sur la $K_{eng,eq}$ et de l' $E_{tqs/ch}$ :

Nous avons effectué un calcul à base d'EFLU de taille 6 mm, et un autre plus raffiné à base d'EFLU de taille 0,3472 mm. La raideur  $K_{eq,1,2}$  (pour les deux maillages) est donnée par la figure 4-a. Nous constatons que :

- Une faible qualité de maillage a tendance à surévaluer la raideur  $K_{eq,1,2}$  et par conséquent  $K_{eng,eq}$  (nous sommes passé de  $K_{eng,eq,moyenne} = 0,075$  à  $0,064$ , soit une variation de  $-14,67\%$ ). Cette surévaluation peut induire en erreur les calculs dynamiques et donner l'impression qu'on est à l'abri des phénomènes précités par [5].
- La courbure parabolique reste conservée.
- Le fait de raffiner le maillage, a un effet de translation vers le bas, de tous les points de la courbe  $K_{eq,1,2}$ , d'une valeur pratiquement constante suivant  $s$ , ici égale à  $0,0064$ .

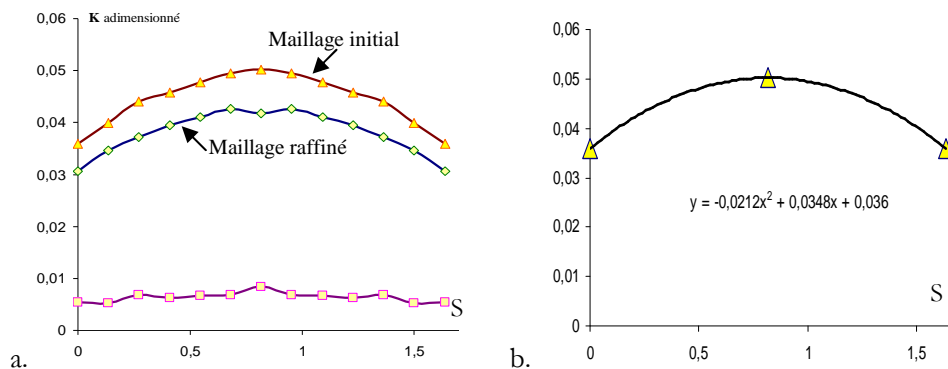


FIG. 4 –a. : Raideur adimensionnée  $K_{eq,1,2}$ , 4 –b. : Interpolation parabolique de 3 points.

#### 3.2 Méthode rapide de détermination de la $K_{eng,eq}$ et de l' $E_{tqs/ch}$ :

Constatant que la MEFLU-3D permet de retrouver la forme parabolique de la  $K_{eq,i}$ , il est possible de calculer cette dernière au niveau des trois lignes de contact (qui sont d'ailleurs les plus faciles à déterminer géométriquement): à savoir la saillie, le cercle primitif et le creux, et interpoler les trois valeurs obtenues par une parabole de 2<sup>ème</sup> degré comme montré à la figure 4 –b. Ici la parabole d'interpolation est de :

$$K(s) = -0,0212 \times s^2 + 0,0348 \times s + 0,0360 \quad (2)$$

Très proche de celle obtenue par le calcul aux 13 lignes de contact figure 3 –b. En effet, la valeur absolue de l'optimum de la différence entre les deux paraboles est de  $6,1425 \cdot 10^{-4}$ , soit une erreur relative maximale de 1,2 %. En plus, il suffit de faire le calcul à base de maillage initial aux 3 lignes, suivi d'un calcul à la saillie et un autre au creux à base d'un maillage suffisamment raffiné uniforme ou de préférence adaptatif pour obtenir la valeur de translation de la parabole.

#### 3.3 Relation entre $E_{d,t,i}$ et $K_{eq,i}$ :

Pour pouvoir tracer l'énergie de déformation totale du modèle de la roue  $i$  ( $E_{d,t,i}$ ) et la flexibilité de la même

roue  $i$  ( $1/K_{eq,i}$ ) de la dent (y compris la contribution du corps de la roue) le long du profil actif de la dent (en fonction de la coordonnée  $S$ ). Nous exploitons le champ des déplacements fourni par la MEF-3D à base d'EFLU de taille 0,3472mm, en suivant le processus présenté à la figure 1. L'évolution de  $E_{dt,i}$  (en joule) et de  $1/K_{eq,i}$  (adimensionnée) est présentée à la figure 5-a. L'évolution de ces deux grandeurs montre l'existence d'une possible proportionnalité entre elles :

$$\frac{1}{K_{eq,i}} = C_i \times E_{dt,i} \quad (3)$$

L'évolution du coefficient  $C_i$  déterminé par le rapport  $(1/K_{eq,i}) / E_{dt,i}$ , qui dans ce cas est noté par  $C_{i,r}$  est présenté sur la figure 5-b : le  $C_{i,r}$  présente une décroissance en fonction de la coordonnée  $S$ .

Par ailleurs, nous savons que pour une structure élastique, sous les hypothèses de: Déformations isothermes, dissipations internes négligées et actions extérieures appliquées lentement, le principe de la conservation de l'énergie stipule que l'énergie de déformation est égale au travail des forces extérieures :  $E_{dt} = W_{ext}$ , et que :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \times F \times D \quad (4)$$

Où :  $F$  = la force et  $D$  la composante parallèle à cette force du déplacement du point d'application de la force. Pour notre cas, la force statique  $F_{s,j}$  est appliquée à la  $j^{\text{ème}}$  ligne de contact du profil actif de la dent. On a donc :

$$E_{dt,j} = 0,5 \times F_{s,j} \times D_{//F_{s,j}} \quad (5)$$

$D_{//F_{s,j}}$  est la composante parallèle à  $F_{s,j}$  du déplacement  $D_j$  de la  $j^{\text{ème}}$  ligne de contact.

Vu ce qui précède, nous obtenons l'énergie de déformation totale au  $j^{\text{ème}}$  contact, en introduisant le déplacement équivalent  $\delta_{eq,j}$  :

$$E_{dt,j} = 0,5 \times F_s \times \delta_{eq,j} \times \cos(\vec{F}_{s,j}, \vec{D}_j) \quad (6)$$

Ainsi:

$$E_{dt,i} = F_s^2 \times \cos(\theta_i) \times (2.L.E.K_{eq,i})^{-1} \quad (7)$$

Où  $E$  est le module d'élasticité du matériau de la roue, et  $\theta_i$  l'angle que fait la direction de la force  $\vec{F}_s$  avec la direction du déplacement.

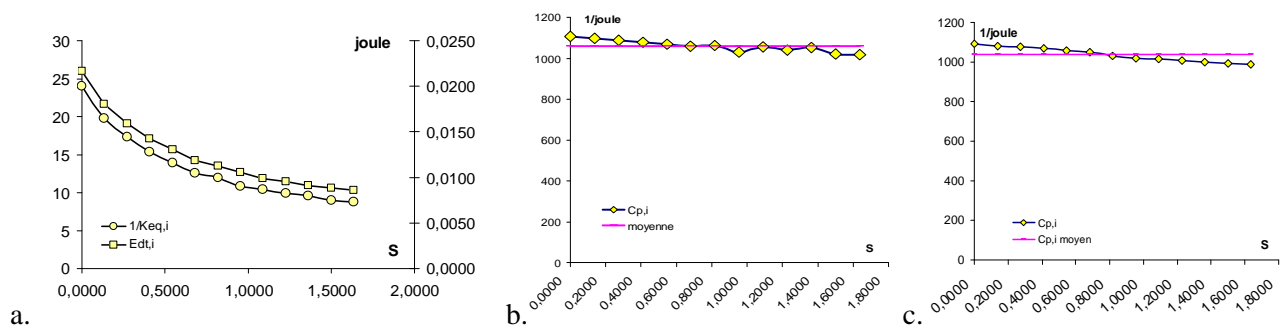


FIG. 5 –a : Évolution de  $E_{dt,i}$  et de  $1/K_{eq,i}$ . –b : Evolution de  $[C_{i,r} = (1/K_{eq,i}) / E_{dt,i}]$ . –c :  $C_{i,c}$  calculé

Nous déduisons la formule de calcul du  $C_i$ , qui est noté dans ce cas  $C_{i,c}$  :

$$C_{i,c} = 2.L.E.(F_s^2 \times \cos(\theta_i))^{-1} \quad (8)$$

En exploitant le champ de déplacement obtenu par la MEF-3D, nous pouvons calculer  $\cos(\theta_i)$  en fonction de la coordonnée  $S$ , et ainsi tracer  $C_{i,c}$  à l'aide de l'équation (8), figure 5-c.

Nous remarquons, que  $C_{i,r}$  et  $C_{i,c}$  ont la même tendance, des valeurs moyennes proches ( $C_{i,r,moyen} = 1060,24 \text{ j}^{-1}$  et  $C_{i,c,moyen} = 1036,60 \text{ j}^{-1}$ ), et une décroissance plus régulière pour le  $C_{i,c}$ .

### 3.4 L'extrapolation de Richardson pour estimer l'erreur de discrétisation :

Lorsqu'on ne peut obtenir une solution analytique de l'énergie totale, l'extrapolation de Richardson [6], [7], [8] et [9], permet d'approcher la solution exacte :

$$E_{t,exacte}^2 - E_{t,approchée}^2 \approx C \times N_k^{-2r_c} \quad (9)$$

Où : N est le nombre de degrés de liberté (ddl), C est une constante et  $r_c$  le taux de convergence asymptotique de l'erreur. La méthode comporte trois étapes : Effectuer en premier lieu une série d'analyses par la MEF :  $(N_1, E_{t,approchée,1}^2), (N_2, E_{t,approchée,2}^2), (N_3, E_{t,approchée,3}^2) \dots etc.$ , calculer ensuite le taux de convergence  $r_c$  et calculer enfin la constante C. Après ces étapes, il est possible d'estimer l'énergie de déformation et l'erreur de discrétisation par :

$$E_{t,exate}^2 = E_{t,approchée,k}^2 + C \times N_k^{-2r_c} \quad (10)$$

Où  $C \times N_k^{-2r_c}$  est l'erreur de discrétisation du modèle EFLU-3D, et k est l'ordre de l'analyse EF.

#### 3.4.1 Application de l'extrapolation de Richardson :

Pour cela, nous effectuons trois analyses éléments finis, de tailles EF successives  $(L; L/2^2; L/2^3) = (6,2500; 1,5625; 0,7812)$  en mm, à base d'EFLU-3D, lorsque la force est appliquée au saillie (point B, figure 2-c).

Les résultats des trois analyses, sont présentés comme suit, sous la forme (Nombre ddl ;  $E_{dt,i}^2$  en  $j^2$ ) :

$(11\ 724 ; 2,8224.10^{-4})$ ,  $(46\ 785 ; 3,3819.10^{-4})$ ,  $(215\ 655 ; 4,1209.10^{-4})$ . Le calcul du taux de convergence  $r_c$  demande de résoudre l'équation suivante :

$$(E_1^2 - E_2^2)/(E_2^2 - E_3^2) = (N_1^{2r_c} - N_2^{2r_c})/(N_2^{2r_c} - N_3^{2r_c}) \quad (11)$$

Un simple programme itératif permet de trouver la valeur de  $r_c = 0,0614$ . D'où :

$$C = \frac{1}{2} \times (E_1^2 - E_2^2) \times (N_1 N_2)^{2r_c} / (N_1^{2r_c} - N_2^{2r_c}) \quad (12)$$

Soit :  $C = 5,6562.10^{-4} j^2$ .

Nous pouvons écrire alors, en utilisant l'équation (10) :  $E_{t,exate}^2 = 4,1209.10^{-4} + 1,2518.10^{-4} = 5,3727.10^{-4} j^2$ .

Par conséquent, même avec un raffinement EFLU-3D de taille  $L/2^3$ , l'erreur estimée est de  $1,2518.10^{-4} j^2$ , soit une précision estimée de 23,3%.

En utilisant le  $C_{i,c}$  à la ligne B, qui est égale à  $1107,24 j^{-1}$ , dans l'équation (3), on obtient:

$$1/K_{eq,i} = C_{i,c} \times E_{t,exacte} = 25,6650.$$

De même pour le point du creux, en appliquant l'extrapolation de Richardson, nous obtenons :

$$E_{t,exate}^2 = E_{t,approchée,k}^2 + C \times N_k^{-2r_c} = 6,2078.10^{-5} + 2,3984.10^{-5} = 8,6062.10^{-5} j^2 \text{ et } 1/K_{eq,(p-i)} = 9,1546.$$

D'où, nous obtenons la raideur équivalente des deux dents conjuguées en prise, au début (ou bien à la fin) du contact :  $K_{eq,1,2} = (25,6650 + 9,1546)^{-1} = 28,7194.10^{-3}$ . Ce qui augmente encore l'écart entre les résultats du maillage initial et ceux obtenus par extrapolation de Richardson, soit une valeur de translation d'environ -0,007246 de la courbe de raideur par rapport au maillage initial figure 4-a. En plus, en appliquant l'extrapolation de Richardson au niveau de la ligne correspondant au cercle primitif, nous pouvons avoir trois points de la raideur équivalente des deux dents conjuguées en prise et ainsi interpoler par un polynôme du deuxième degré, et avoir la raideur le long du contact. L'erreur de surévaluation de la raideur équivalente des deux dents conjuguées en prise engendrée par l'erreur de discrétisation au maillage EFLU-3D, peut être estimée en chaque ligne de contact par l'équation (13) :

$$Err = (C_{i,c,1} \times E_{t,approchée,k,1} + C_{(p-i),c,2} \times E_{t,approchée,k,2})^{-1} - (C_{i,c,1} \times E_{t,exacte,1} + C_{(p-i),c,2} \times E_{t,exacte,2})^{-1} \quad (13)$$

Pour la taille  $L/2^3$  : l'erreur de surévaluation de  $K_{eq,1,2}$  au début/fin du contact est 0,004383. Soit une erreur relative (par rapport à la raideur la plus précise) de 15%. Tout calcul fait, l'erreur de discrétisation au maillage EFLU-3D de taille  $L/2^3$  surévalue le Min de  $K_{eq,eng}$  d'une valeur d'environ : 0,004383 ( $\approx 15\%$ ) et sous-évalue le Max de  $E_{tqs/ch}$  d'une valeur d'environ : 5,84 $\mu\text{m}$  ( $\approx 16,8\%$ ).

#### 4. Conclusion :

Un processus de détermination de l'erreur de transmission quasi-statique sous charge et de la raideur d'engrènement, basé sur la méthode des éléments finis tridimensionnels a été présenté. Son application à un engrenage simple étage cylindrique droit à développante de cercle a permis de dégager les résultats suivants:

- La méthode EFLU-3D a permis de retrouver la courbure parabolique de la raideur.
- Le fait de raffiner le maillage, agit sur toute la courbe parabolique de la raideur, en la translatant vers le bas d'une valeur pratiquement constante.
- Une méthode d'obtention rapide de  $K_{eng,eq}$  et  $E_{tqs/ch}$ , a été proposée, utilisant les 02 résultats précédents.
- Un maillage de raffinement faible, a tendance à surévaluer la raideur (et sous-évaluer l'erreur de transmission), ce qui peut fausser les interprétations en quasi-statique et donner l'impression qu'on est à l'abri de phénomènes destructifs en dynamique. Par conséquent et afin de garantir les résultats obtenus par la méthode des éléments finis tridimensionnels, une analyse de l'erreur s'impose.
- Enfin, une approche utilisant la méthode d'extrapolation de Richardson a été proposée, et qui a permis d'évaluer l'impact de l'erreur de discrétisation sur la  $K_{eng,eq}$  et  $E_{tqs/ch}$  et aussi améliorer la précision si combinée avec la méthode rapide (3<sup>ème</sup> section). Son application a nécessité la mise en évidence de la relation entre l'énergie de déformation totale et la flexibilité, par le biais d'un coefficient variant le long du contact, donnant ainsi la possibilité d'utiliser tout estimateur d'erreur faisant intervenir l'énergie de déformation pour évaluer l'impact sur les deux grandeurs objet du présent travail.

#### Références:

- [1] Bard C. « Modélisation du comportement dynamique des transmissions par engrenages », thèse de doctorat 1995, INSA de Lyon.
- [2] Spinnler G. « Conception des machines : principes et applications, Tome 1 : Statique » 2002.
- [3] Karra et al. « Modélisation bidimensionnelle par éléments finis d'un engrenage droit: étude de la raideur d'engrènement et des contraintes au pied de la dent » TCSME, Vol 33, N° 2, 2009.
- [4] Lin & al. « Profile Modification to minimize spur gear dynamic loading » NASA Technical Memorandum 89901. The Design Engineering Technical Conference, 1988.
- [5] Aissaoui H. « Vibrations non linéaires d'un système d'engrenage droit avec une rigidité d'engrènement variable et un jeu de denture » thèse de doctorat 2006, à l'EMI.
- [6] Richardson L.F. « The approximate Arithmetical Solution by Finite Difference of Physical Problems involving Differential Equations with an application to the Stresses in a Masonry Dam ». Trans. Roy. Soc. (London) , A210, 307-357 , 1910.
- [7] Babuška I., Szabo B. « On the rates of convergence of the finite element method ». Int. J. Num Meth. Engng., Vol. 18, 323-341 , 1982.
- [8] Gago J.P., DE S.R. «A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method ». Ph.D thesis , Univ. of Wales, Swansea, U.K, 1982.
- [9] Boudi M. « Analyse de l'erreur de discrétisation pour des éléments finis de coques planes » Thèse de doctorat à l'Université de Liège, 1994.