

Simulation numérique directe en dynamique du contact rugueux

Viet Hung DANG^a, Alain LE BOT^a

a. Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon, 36 Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex

Résumé :

Le bruit de frottement entre deux surfaces rugueuses est dû à la vibration verticale engendrée par les impacts inter-aspérités de deux solides frottés. Les expérimentations ne donnent pas accès aux grandeurs mécaniques locales comme l'intensité de choc, la déformation d'aspérité, la pression locale... Afin de révéler la relation entre ces derniers et les paramètres macroscopiques, on propose une approche numérique 1D basée sur la méthode de décomposition modale, les formulations de Lagrange et pénalité, et plusieurs schémas d'intégration temporelle.

Abstract :

The origin of the roughness noise is the shock-induced normal vibration of antagonist asperities. Several experiments demonstrate the logarithm law between the speed and the radiated acoustic power with the arithmetic roughness of the surface. In order to analyze the relations between the dynamical characteristics and the macro parameters, we propose a numerical approach with model 1D based on the general equations of beam vibration. Two methods to determine the contact force are used either the penalty or Lagrange multiplier with several integration schema

Mots clefs : simulation numérique ; contact dynamique ; Bruit de frottement

1 Introduction

Lorsque deux objets sont frottés l'un contre l'autre, ils engendrent du bruit de frottement. Ces bruits se rencontrent très souvent dans la vie quotidienne comme : le brossage, le bruit entre les mains, le freinage de voiture, le crissement de porte. Du point de vue physique, on peut les classer en au moins deux grandes familles selon les pressions de contact : les bruits d'instabilités mécaniques comme le stick-slip avec de grandes pressions et le bruit de rugosité avec de faibles pressions de contact. Dans ce dernier cas, le mécanisme générateur du bruit est intimement lié à la rugosité des surfaces. Lors du frottement des solides, les surfaces rugueuses engendrent des impacts inter-aspérités qui provoquent des vibrations. Ces vibrations rayonnent ensuite le bruit dans l'environnement acoustique. Le problème canonique que nous cherchons à résoudre numériquement est donc constitué de deux profils rugueux en interaction plan-plan comme sur figure 1. Le profil du haut se déplace horizontalement avec une vitesse

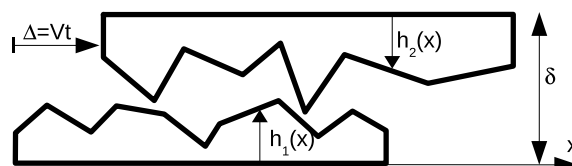


FIGURE 1 – Glissement de deux profils rugueux. Les altitudes h_i sont comptées de manière opposée. L'écart entre les deux profils est δ . À l'instant t , le décalage horizontal est imposé $\Delta = Vt$.

constante V , alors que celui du bas est fixé aux deux extrémités. La forme des profils est donnée par

l'altitude $h_i(x)$ de l'ensemble des points de la surface. L'écart initial entre les deux profils est δ . Dans cet article, on présente une approche numérique par l'utilisation de la technique de décomposition modale pour résoudre l'équation du mouvement, les méthode de pénalisation et des multiplicateurs de Lagrange pour la gestion du contact, et différents schémas d'intégration temporelle. Les calculs sont effectués avec les hypothèses suivantes :

- Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli en flexion transverse seulement sans déformation longitudinale.
- A chaque pas de temps, la position horizontale des points de la poutre supérieure est imposée.
- Condition de non-pénétration (Kuhn-Tucker) des aspérités en contact.

2 Equation des poutres

L'équation du mouvement des poutres en flexion est,

$$D_i \Delta^2 u_i + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f(t, x), \quad (1)$$

où u_i est la déformée transverse de la poutre et f le champ de force de contact s'appliquant à la poutre. $D_i = E_i I_i$ est la rigidité de la poutre, E_i module d'Young et I_i moment d'inertie, m_i est la masse linéaire. Les conditions aux limites pour une poutre en appuis simples aux extrémités $x = 0$ et $x = L_i$,

$$u_i(0) = u_i''(0) = u_i(L_i) = u_i''(L_i) = 0. \quad (2)$$

Les modes ψ_i^k avec $k = 0, 1, \dots$ de la poutre i sont définis de sorte que,

$$\int_0^{L_i} \psi_i^k(x) \psi_i^l(x) dx = \delta^{kl} \quad (3)$$

$$D_i \Delta^2 \psi_i^k = m_i (\omega_i^k)^2 \psi_i^k \quad (4)$$

avec

$$\psi_i^k(x) = \sqrt{\frac{2}{L_i}} \sin(k+1) \frac{\pi x}{L_i} \text{ et } \omega_i^k = \sqrt{\frac{D_i}{m_i}} \left(\frac{(k+1)\pi}{L_i} \right)^2 \quad (5)$$

À chaque instant t , on peut développer la déformée u_i dans la base modale,

$$u_i(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} U_i^k(t) \psi_i^k(x) \quad (6)$$

Il s'agit de trouver et résoudre les équations sur les amplitudes modales U_i^k .

$$m_i \left[\ddot{U}_i^k + (\omega_i^k)^2 U_i^k \right] = F_i^k(t) \quad (7)$$

avec F_i^k la force modale définie par $F_i^k(t) = \int_0^{L_i} f(t, x) \psi_i^k(x) dx$.

Dans le cas d'une structure amortie, l'équation du mouvement dans la base modale devient

$$m_i \left[\ddot{U}_i^k + 2\zeta_i^k \omega_i^k \dot{U}_i^k + (\omega_i^k)^2 U_i^k \right] = F_i^k(t) \quad (8)$$

Nous écrivons l'équation du mouvement sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i^k \\ \dot{V}_i^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_i^k)^2 & -2\omega_i^k \zeta_i^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^k \\ V_i^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_i^k \end{bmatrix} \quad (9)$$

En posant $y = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$ ces équations se retrouvent la forme générale du problème de Cauchy :

$$\dot{y} = g(y) ; y(0) = 0 \quad (10)$$

Afin de résoudre cette équation différentielle, on discrétise en temps et en espace. Le pas de temps est τ et le vecteur temps est $t^m = m\tau$. Le pas de distance est χ_i et le vecteur position est $x_i^n = n\chi_i$. Les déformées, force et distance deviennent $u_i^{m,n} = u_i(t^m, x_i^n)$, $f^{m,n} = f(t^m, x_i^n)$ et $e^{m,n} = e(t^m, x_i^n)$. Les quantités modales deviennent $U_i^{m,k} = U_i^k(t^m)$ et $\psi_i^{k,n} = \psi_i^k(x_i^n)$. Enfin, les profils sont $h_i^n = h_i(x_i^n)$.

3 Calcul de la force de contact

On considère un point quelconque sur le profil supérieur, sa distance normale avec le deuxième profil est donné par la formule

$$g(t, x) = h_1(x) + u_1(t, x) + h_2(x - \Delta) + u_2(t, x - \Delta) - \delta \quad (11)$$

Si f désigne la pression de contact en ce point, la condition de non-pénétration se manifeste donc sous forme suivant :

$$g \geq 0 ; f \leq 0 ; g \cdot f = 0 \quad (12)$$

S'il n'y a pas de contact, $g > 0$, la pression de contact est naturellement nulle. Au contraire, si le contact se produit, il engendre une pression qui a tendance à écarter les deux corps solides.

Pour la simulation numérique du problème de contact, les deux méthodes les plus populaires sont celle de pénalité et celle des multiplicateurs de Lagrange.

La méthode de pénalité : dans cette méthode, on autorise une légère pénétration des points de contact dans le corps solide antagoniste, qui vaut $e=H(g)$. où $H(g) = 0$ si $g < 0$ et $H(g) = g$ si $g > 0$. la pression de contact est fournie par une relation linéaire : $f(t, x) = \kappa e(t, x)$ où κ est le coefficient de pénalité. Sa valeur obtenue empiriquement ne soit pas être trop faible en raison de pénétration irréaliste et ne doit pas être trop grande ce qui va conduire une instabilité numérique.

La méthode des multiplicateurs : on respecte parfaitement le condition de non-pénétration, $g \geq 0$, juste avant l'instant de contact, on introduit λ qui s'appelle un multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur jouant le rôle de pression de contact fictive va empêcher les déformations conduisant à la pénétration.

L'avantage de la méthode pénalité est sa facilité de mise en oeuvre, mais il faut choisir délicatement la valeur du coefficient et accepter une pénétration non-physique. Alors que la méthode des multiplicateurs de Lagrange, donne des solutions très proches de réalité, mais elle introduit des variables supplémentaires qui alourdissent considérablement le calcul.

4 Intégration temporelle

Méthode	Différences centrées	Euler	Euler modifié	RK2	RK4	RK8
Pas du temps	$\tau < \frac{2}{\omega_i^k}$	instable	$\tau < \frac{2}{\omega_i^k}$	$\tau < \frac{\sqrt{2}}{\omega_i^k}$		
Erreur locale		$o(\tau)$	$o(\tau)$	$o(\tau^2)$	$o(\tau^4)$	$o(\tau^5)$
Propriété	Explicite pas multiple	Explicite un pas	Explicite un pas	Explicite un pas	Explicite un pas	Explicite un pas

TABLE 1 – Schéma d'intégration temporelle

Comme le problème se manifeste sous la forme d'un problème général de Cauchy, on va utiliser les schémas intégrations temporelles ordinaires pour le résoudre numériquement. Ces schémas nous permettent d'obtenir la déformation, la vitesse, la force des points sur le profil à chaque pas de temps. Dans cette étude, on propose 6 schémas d'intégration temporelle. L'évaluation d'un schéma se base sur 3 critères : la consistance, la stabilité et la convergence. Le schéma est consistant si la somme de l'erreur locale tend vers 0 lorsque le pas de temps devient petit. D'autre part, si la propagation des erreurs d'arrondi peut être contrôlée au fil des calculs, le schéma est stable. Un schéma consistant et stable est dit convergent c'est-à-dire que l'erreur globale tend vers 0 lorsque le pas devient petit. Le tableau 1 résume le nom et les caractères des schémas utilisés. En se basant sur la clarté des propriétés et de la facilité d'implantation, on a choisi le schéma Euler modifié comme le schéma principal pour effectuer les calculs.

5 Validation du programme Ra1D

Un cas test très simple entre deux surfaces glissées à vitesse constante (voir figure 2) est utilisé pour comparer les deux programme ra1D (code maison) et Abaqus explicite. La solide inférieur est appuyé aux deux extrémités. Le maillage utilisé est de type triangulaire quadratique, 6 noeuds par élément pour abaqus. Il a été raffiné au niveau des aspérités des surfaces en contact. Les hauteurs d'aspérités sont de l'ordre de $1e^{-6}$ (m). Pas spatial au niveau de l'interface $\chi = 1e^{-4}m$.

Les dimensions de deusx solides sont $L = 0.01$ m (longueur), $H = 0.0005$ m (hauteur). Les ca-

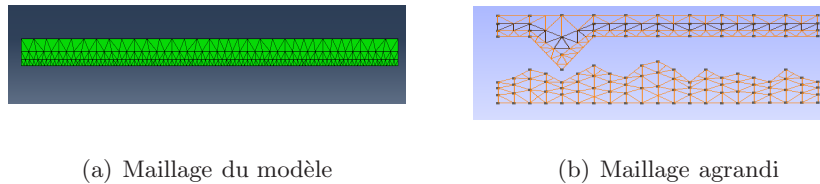


FIGURE 2 – Maillage du cas test sixChocs

ractéristiques mécaniques du matériau sont $E = 69000Mpa$ pour le module d'Young, $\mu = 0.33$ pour le coefficient de Poisson, et $\rho = 2000kg/m^3$ pour la masse volumique. Coefficient de pénalité : $\kappa = 1e^{13}Pa$. Pas du temps $\tau = 2e^{-9}s$ et durée de simulation $T = 0.001s$. Dans ce cas test, on néglige la force de gravité, la friction, et l'amortissement structural. La figure 3 montre le déplacement et la pression de contact au point M le plus haut du profil supérieur. Une bonne cohérence est observée entre Ra1D et Abaqus. Les temps CPU, il sont 280s avec Abaqus et seulement 30s avec Ra1D.

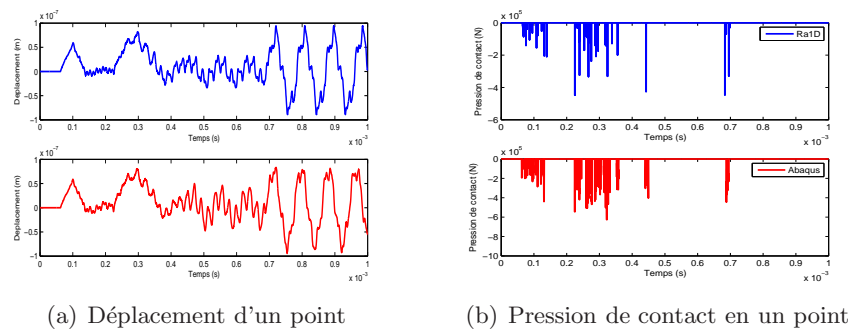


FIGURE 3 – Comparaison de résultat entre Ra1D avec Abaqus

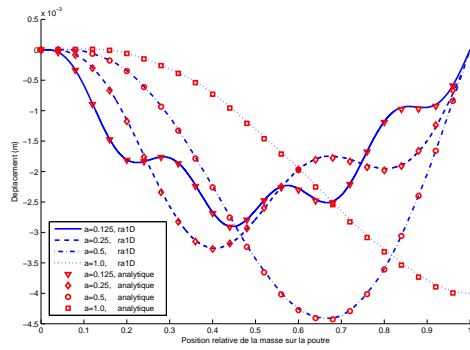
Pour le deuxième cas test, on compare Ra1D avec une solution analytique dans le cas de la vibration d'une poutre provoqué par le déplacement d'une masse. La solution analytique est présentée dans M.Olsson [5] Sur la figure 4, on trace la déflexion du milieu de la poutre au cours du temps avec différentes vitesses de déplacement de la masse. Avec P est le poids de la masse mobile se déplaçant à vitesse V , $\alpha = v\frac{T}{L}$ et $T1$: période du premier mode de la poutre. Une concordance parfaite avec les résultats obtenues par la solution analytique, a été observée.

6 Résultats de calculs

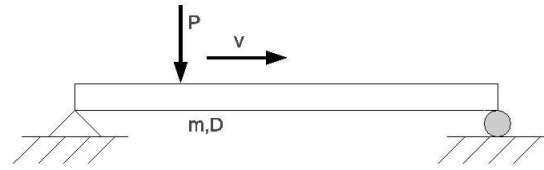
Les profils sont gaussiens et générés numériquement. Les paramètres de topographie sont indiqués tableau 2. Les poutres sont en acier avec un module d'Young $E = 210$ GPa et une masse volumique $\rho = 7800 kg/m^3$. Elles ont pour longueur $L = 120mm$, épaisseur $b = 4mm$. Le taux d'amortissement modal est $\xi = 0,01$. Les valeurs des fréquences propres sont présentées tableau 3.

Les données nécessaires pour la simulation sont pas de temps $\tau = 1e^{-8}s$, pas spatial $\chi = 8\mu m$, durée de simulation $T = 1s$.

Le premier résultat obtenu est que le temps CPU de Ra1D est beaucoup plus petit que celui d'Abaqus (10h contre 7 jours). Sur la figure 5, un exemple d'audiogramme simulé et sa densité spectrale de puissance sont montrés. On trouve que les pics les plus hauts correspondent aux fréquences propres



(a) Déplacement du point au milieu de la poutre selon le temps.



(b) Masse déplacée sur une poutre

$$u(x, t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 D} \sum_{n=1, \alpha \neq n}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2(n^2 - \alpha^2)} \left(\sin\left(\frac{n\pi tv}{L}\right) - \frac{\alpha}{n} \sin\left(\frac{n^2\pi tv}{\alpha L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] + \frac{2PL^3}{\pi^4 D} \left[\frac{1}{2\alpha^4} \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi tv}{L}\right) - \frac{\alpha\pi tv}{L} \cos\left(\frac{\alpha\pi tv}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{\alpha\pi x}{L}\right) \right]$$

FIGURE 4 – Comparaison Ra1D / solution analytique pour une masse mobile sur poutre

Rq (μm)	Rt (μm)	Rz (μm)	Ra (μm)	Rsk	Rku	RSm (μm)
02	12.8	6.0	1.7	0.012	3.6	1574
04	27.8	12.2	3.5	-0.009	4.6	1520
08	53.0	23.5	6.8	0.041	3.6	1560
12	86.7	36.1	10.4	-0.019	3.8	1552
20	138	61	17.6	-0.125	4.2	1546

TABLE 2 – Propriétés topographiques

Mode	1	2	3	4	5	6
f(Hz)	1.31e+03	5.23e+03	1.18e+04	2.09e+04	3.27e+04	4.71e+04

TABLE 3 – Fréquences propres des profils

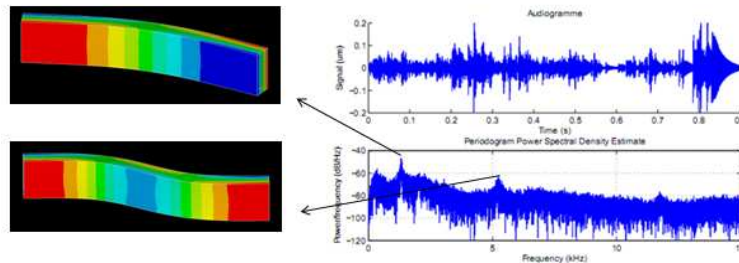


FIGURE 5 – Audiogramme simulé

des poutres découplées. Le niveau de la vibration est défini comme

$$Lv(dB) = 20 \log\left(\frac{V_{RMS}}{V_0}\right) \tag{13}$$

$$V_{RMS} = \frac{1}{N_{temps}} * \frac{1}{N_{noeud}} \sum V_{i,j} \tag{14}$$

Où $V_0 = 1e^{-9} m/s$ est la vitesse vibratoire de référence. V_{RMS} est la vitesse moyenne quadratique, $V_{i,j}$ est la vitesse du noeud i à l'instant j . N et N_t sont respectivement le nombre de noeuds et de pas de temps. La relation entre le niveau de vibration et la rugosité ou la vitesse de glissement est montré dans fig 6 on trouve que Lv est proportionnel au log de la rugosité de la surface et également de la

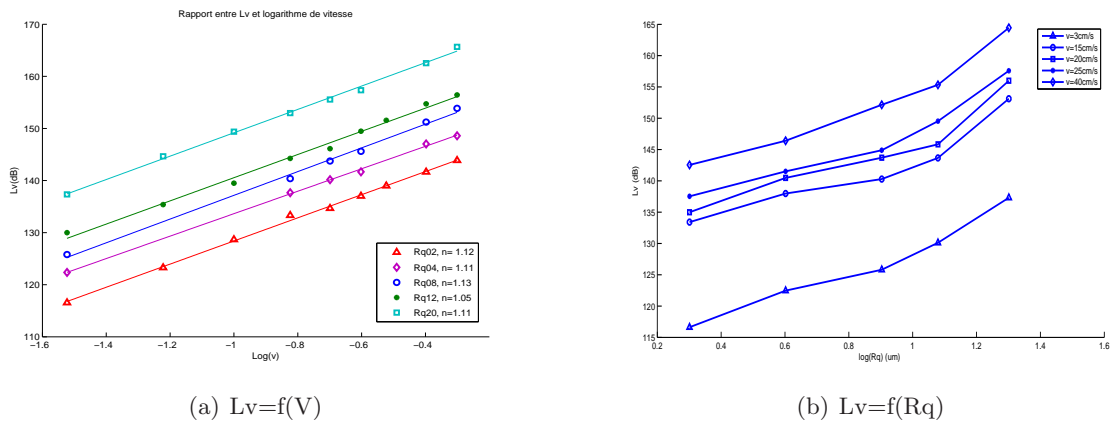


FIGURE 6 – Variation du niveau de la pression acoustique L_v (dB) en fonction de la vitesse et de la rugosité

vitesse de frottement qui s'accorde avec la formule suivante :

$$\Delta L_v(\text{dB}) = 20 \log \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^m \right] \text{ avec } m \simeq 1, 1 \quad (15)$$

Ces résultats montrent une bonne cohérence avec les expériences réalisées dans H. Ben Abdelounis[4]

7 Conclusion

Le système modèle étudié ici permet de calculer précisément la dynamique locale de deux surfaces rugueuses en glissement relatif. L'équation du mouvement est résolue numériquement grâce à la technique de décomposition modale et la double discrétisation en temps et en espace. Plusieurs schémas d'intégration temporelle ont été programmés et comparés. Le code obtenu, limité au cas plan, est plus rapide que la méthode des éléments finis standard. Le logiciel est validé en comparaison avec Abaqus, la formule analytique et les résultats expérimentaux

Références

- [1] Le Bot A., Bou-Chakra E. 2009 Measurement of friction noise versus contact area of rough surfaces weakly loaded. *Tribology Letters*. **vol. 37**, 273-281
- [2] Le Bot A., Bou-Chakra E., Michon G. 2011 Dissipation of Vibration in Rough Contact. *Tribology letters* **vol. 41**, 47-53
- [3] BAILLET Laurent, SASSI Taoufik 2003 Numerical implementation of different finite element methods for contact problems with friction. *Comptes rendus. Mécanique* **vol. 331**, 789-796
- [4] Ben Abdelounis H., Le Bot A., Perret-Liaudet J., Zahouani H. 2010 The roughness effect on the frequency of frictional sound. *Wear A*. **vol. 268**, 335-345
- [5] OLsson M. 1991 On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration* **vol. 145**, 299-307
- [6] AKAY Adnan 2002 Acoustics of friction . *The Journal of the Acoustical Society of America* **vol. 111**, 1525-1548
- [7] FORD I. J. 1993 roughness effect on friction for multi-asperity contact between surface. *Journal of physics. D, Applied physics* **vol. 26**, 2219-2225
- [8] STOIMENOV Boyko L., MARUYAMA Suguru, ADACHI Koshi, KATO Koji 2007 The roughness effect on the frequency of frictional sound. *Tribology international* **vol. 40**, 659-664