

# Influence de défauts sur la dynamique d'une structure intelligente

B. Chomette<sup>a</sup>, A. Fernandes<sup>a</sup>

a. Institut Jean Le Rond d'Alembert, UPMC Paris 6, 75252 PARIS Cedex 05

## Résumé :

*La détection de défauts par des méthodes non destructives est devenue un facteur majeur d'intérêt dans de nombreux domaines industriels, pour des raisons économiques et de fiabilité des systèmes. L'étude proposée s'intéresse plus particulièrement à l'influence de fissures sur les caractéristiques dynamiques d'une structure intelligente, instrumentée d'actionneurs et de capteurs piézoélectriques reliés par une boucle de contrôle des vibrations et repose sur une modélisation par éléments finis de la structure fissurée.*

## Abstract :

*Damage detection using non destructive methods is a major factor of interest in industries for economic reasons and to increase system security. The proposed study focusses on the influence of cracks on smart-structures with piezoelectric actuators and sensors linked by a control loop. The study is based on a finite element model of the cracked structure.*

**Mots clés : Fissures ; Contrôle ; Composants Piézoélectriques**

## 1 Introduction

Les méthodes non destructives de détection de défauts peuvent s'appuyer sur la variation des fréquences propres induites par la fissure [1] ou sur la variation de l'amplitude des modes propres ou de la fonction de réponse fréquentielle [2]. Un état de l'art des principales méthodes de détection est proposé par Montalvao [3]. Les matériaux piézoélectriques sont couramment utilisés comme actionneurs ou capteurs pour détecter les défauts et contrôler la dynamique des structures endommagées. Park et al [4] introduisent une méthode basée sur l'utilisation de transducteurs piézoélectriques. Chomette et al [5] proposent une stratégie modale de contrôle des vibrations utilisant des transducteurs piézoélectriques pour limiter l'endommagement de cartes électroniques embarquées. De nombreuses approches peuvent être utilisées pour modéliser un défaut, plus particulièrement une fissure : une variation locale de raideur [7], [8] ou des approches plus complexes à 2 ou 3 dimensions. La modélisation des éléments piézoélectriques utilise classiquement des éléments 3D mais une approche de type 2D ou 1D est plus efficace dans le cas des plaques et des poutres. Sadilek et Zemeik [9] proposent en 2010 un modèle d'éléments piézoélectriques de type poutre dédié à la détection et l'identification de défauts. Peu de recherches portent sur la détection de défauts appliquée à des structures contrôlées. Les performances et la stabilité d'un contrôleur sont néanmoins très sensibles aux modifications de structures [5]. L'étude proposée s'intéresse à l'influence de fissures sur les caractéristiques dynamiques d'une structure instrumentée d'actionneurs et de capteurs piézoélectriques reliés par une boucle de contrôle des vibrations et repose sur une modélisation par éléments finis de la structure fissurée.

## 2 Modèle éléments finis de la structure intelligente fissurée

### 2.1 Modèle éléments finis de la fissure

Christides et Barr [10] ont introduit la variation de raideur induite par une fissure, sur une poutre de section rectangulaire sous forme exponentielle

$$EI(x) = \frac{EI_0}{1 + C \exp(-2\alpha|x - x_j|/e_p)}, \quad (1)$$

où  $C = (I_0 - I_c)/I_c$ ,  $I_0$  et  $I_c$  étant les moments quadratiques des sections non fissurées et fissurées, tels que

$$I_0 = \frac{le_p^3}{12}, \quad I_c = \frac{l(e_p - e_c)^3}{12}, \quad (2)$$

où  $l$  et  $e_p$  désignent la largeur et l'épaisseur de la poutre et  $e_c$  la profondeur de la fissure.  $E$  est le module d'Young de la poutre,  $x_j$  l'abscisse de la fissure et  $\alpha$  une constante issue d'expériences [10] et évaluée à 0.667. La raideur de la zone influencée par la fissure peut s'exprimer sous forme simplifiée dans le repère local lié à l'élément (voir figure 1) en fonction de l'indice  $k$  de l'élément considéré et de l'abscisse  $x_e$  sur l'élément

$$EI^-(x_e, k) = EI_0 - \frac{E(I_0 - I_c)}{l_c}(x_e + (k-1)l_e - x_{c1}), \quad (3)$$

$$EI^+(x_e, k) = EI_c + \frac{E(I_0 - I_c)}{l_c}(x_e + (k-1)l_e), \quad (4)$$

où  $^+$  et  $^-$  désignent les zones à gauche et à droite de la fissure,  $l_c$  la demi longueur de la zone influencée par la fissure délimitée par les abscisses  $x_{c1}$  et  $x_{c2}$ . La variation de raideur pour un élément  $k$  situé à gauche et à droite de la fissure est représentée sur la figure 1.

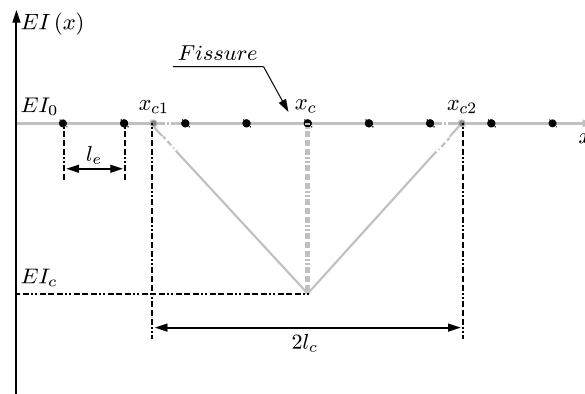


FIGURE 1 – Discretisation par éléments finis de la zone influencée par la fissure.

La matrice de raideur d'un élément  $k$  influencé par la fissure est obtenue à partir des fonctions de forme  $N_e$  et de la raideur de l'élément

$$\mathbf{K}_{e,crack}^- = \int_0^{l_e} EI^-(x_e, k) \mathbf{N}_e''(x_e) \mathbf{N}_e''(x_e) dx_e \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{e,crack}^+ = \int_0^{l_e} EI^+(x_e, k) \mathbf{N}_e''(x_e) \mathbf{N}_e''(x_e) dx_e \quad (6)$$

La matrice de raideur de l'élément fissuré  $\mathbf{K}_{e,crack}^-$  peut également s'exprimer en fonction de la matrice de raideur de l'élément non fissuré  $\mathbf{K}_e$  à laquelle est soustraite la raideur induite par la fissure  $\mathbf{K}_{c_e}^-$

$$\mathbf{K}_{e,crack} = \mathbf{K}_e - \mathbf{K}_{c_e}. \quad (7)$$

Ce modèle suppose que la zone soumise à l'influence de la fissure est libre d'effort. Il sera néanmoins utilisé ici avec des éléments piézoélectriques présents dans cette zone pour avoir une première idée de l'influence de la fissure sur les paramètres des éléments piézoélectriques.

## 2.2 Modèle incluant les éléments piézoélectriques

Le modèle éléments finis de la structure fissurée comportant des éléments piézoélectriques s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{uu}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{uu}^{cc} - \mathbf{K}_{crack})\mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\phi}\phi = \mathbf{F} \\ \mathbf{K}_{\phi u}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{\phi\phi}\phi = \mathbf{Q} \end{cases}, \quad (8)$$

où  $\mathbf{M}_{uu}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}_{uu}^{cc}$  la matrice de raideur de la structure saine avec les éléments piézoélectriques en court-circuit,  $\mathbf{K}_{crack}$  la matrice de raideur induite par la fissure,  $\mathbf{K}_{u\phi}$  la matrice de couplage électromécanique,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  la matrice diélectrique,  $\mathbf{u}$  le vecteur des degrés de liberté mécaniques,  $\phi$  le vecteur des degrés de liberté électriques,  $\mathbf{F}$  le vecteur force et  $\mathbf{Q}$  le vecteur des charges électriques. Le modèle est en contraintes planes et de type poutre (éléments de type Euler Bernoulli). L'efficacité des transducteurs piézoélectriques est caractérisée par le coefficient de couplage électromécanique modal

$$\kappa_k^2 = \frac{f_{co,k}^2 - f_{cc,k}^2}{f_{co,k}^2}, \quad (9)$$

où  $f_{co,k}$  et  $f_{cc,k}$  désignent les fréquences propres du  $k^{\text{ième}}$  mode de la structure avec les éléments piézoélectriques en circuit ouvert et en court-circuit. Les performances d'un système de contrôle dépendent fortement de ce paramètre. Une erreur sur sa valeur peut limiter les performances ou déstabiliser le système contrôlé. L'objectif de cette étude est de mettre en évidence numériquement les variations du coefficient de couplage en fonction de la profondeur de la fissure et de la position de l'élément piézoélectrique et ses répercussions sur le contrôleur.

## 3 Contrôle modal

Le système linéaire est représenté sous sa formulation d'état

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}W \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \quad (10)$$

où  $u$  est la commande du système,  $W$  est la perturbation extérieure et  $\mathbf{Y}$  la sortie du système. Le vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , la matrice de la dynamique du système  $\mathbf{A}$ , les matrices actionneur  $\mathbf{B}$  et capteur  $\mathbf{C}$  ainsi que la matrice de perturbation  $\mathbf{G}$  sont définies par

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n,n} & \mathbf{Id}_{n,n} \\ -diag(\omega_i) & -diag(2\xi_i\omega_i) \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{\Pi}^a \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n,1} \\ \mathbf{\Pi}^f \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (\mathbf{\Pi}^c \quad \mathbf{0}_{1,n}), \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

où  $\omega_i$  et  $\xi_i$  sont les pulsations propres et le facteur d'amortissement modal de la structure,  $\mathbf{Id}$  la matrice identité,  $\mathbf{q}$  le vecteur des déplacements modaux,  $\mathbf{\Pi}^f$  le vecteur modal de la perturbation,  $\mathbf{\Pi}^a$  et  $\mathbf{\Pi}^c$  les vecteurs de couplage électromécanique actionneur et capteur. Si les formes modales de la structure sont supposées identiques avec les éléments piézoélectriques en court-circuit et en circuit ouvert, le vecteur de couplage électromécanique peut s'écrire pour le  $k^{\text{ième}}$  mode

$$(\Pi_k^{a,c})^2 = \frac{(\kappa_k^{a,c})^2 C_p^{a,c} (\omega_{cc_k}^2)^2}{1 - (\kappa_k^{a,c})^2}, \quad (12)$$

où  $\kappa_k^{a,c}$  et  $C_p^{a,c}$  sont respectivement le coefficient de couplage électromécanique et la capacité de l'actionneur ou du capteur,  $\omega_{cc_k}$  la pulsation propre avec les éléments piézoélectriques en court-circuit. L'algorithme de contrôle utilisé est de type Linéaire Quadratique Gaussien (LQG). La fonction de transfert du système en boucle ouverte peut s'écrire

$$\mathbf{HBO}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}}{W} = \mathbf{C}_s(j\omega\mathbf{Id} - \mathbf{A}_s)^{-1}\mathbf{G}_s, \quad (13)$$

où  $\omega$  est la pulsation propre.  $(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{G}_s)$  est le modèle d'état représentant la structure dans les simulations numériques et déterminé à partir des paramètres modaux déduits du modèle éléments finis. La fonction de transfert du système contrôlé peut s'écrire

$$\text{HBF}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}}{W} = \mathbf{C}_s \left( j\omega \text{Id} - \left( \mathbf{A}_s - \mathbf{B}_s \mathbf{K} \left( j\omega \text{Id} - (\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{K} - \mathbf{L} \mathbf{C}_m) \right)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{C}_s \right) \right)^{-1} \mathbf{G}_s, \quad (14)$$

où  $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$  est le modèle d'état utilisé par l'observateur pour estimer le vecteur d'état,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  sont les matrices des gains du contrôleur et de l'observateur obtenues à partir du critère quadratique LQG.

## 4 Résultats numériques

Le système étudié, de type poutre encastree/libre, comporte quatre fissures et est instrumenté d'un actionneur et d'un capteur piézoélectrique colocalisé (système représenté sur la figure 2).

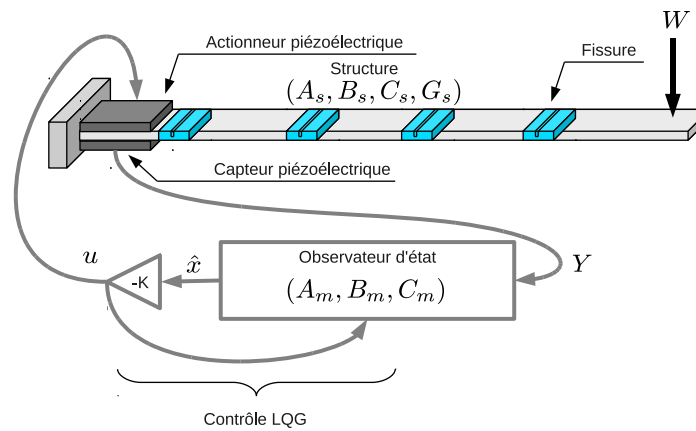
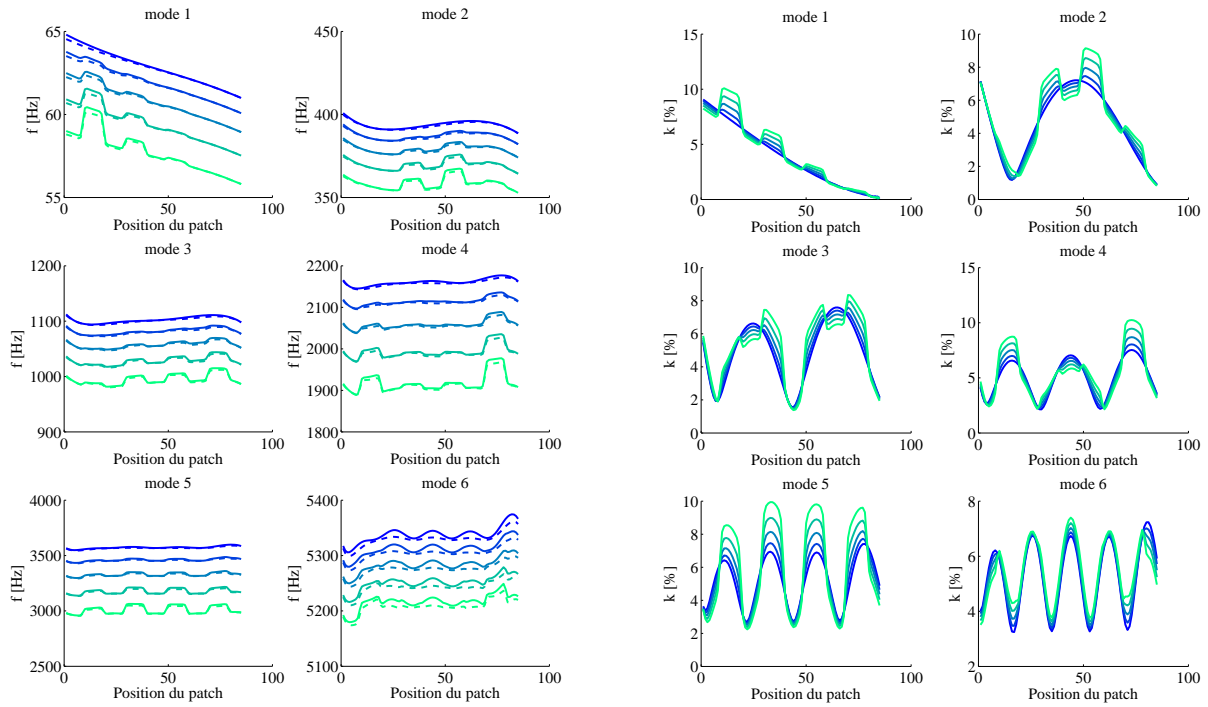


FIGURE 2 – Poutre multi-fissurée "intelligente" instrumentée d'actionneurs et de capteurs piézoélectriques reliés par une boucle de contrôle.

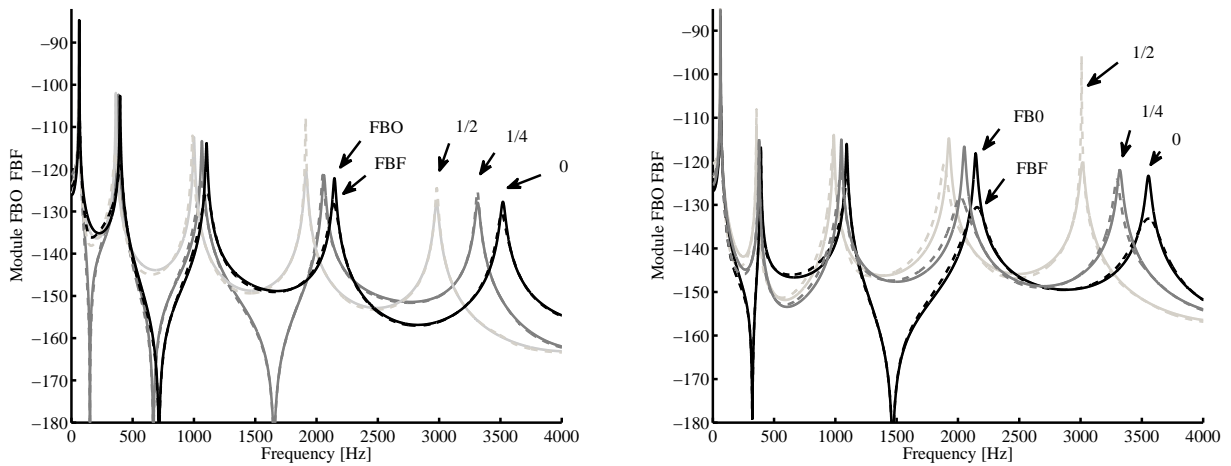
La poutre est excitée par une force extérieure  $W$  constante appliquée en bout de poutre. L'étude s'intéresse plus particulièrement à l'influence de la fissure sur les caractéristiques de couplage électromécanique lorsque le couple actionneur/capteur est éloigné de la fissure ou dans la zone influencée par la fissure, c'est à dire à raideur variable en fonction de l'abscisse sur la poutre. Le modèle réalisé intègre donc la variation de raideur induite par la fissure ainsi que les éléments piézoélectriques. Les variations des fréquences propres de la poutre avec les composants piézoélectriques en court-circuit et en circuit ouvert ainsi que celle du coefficient de couplage électromécanique sont présentées sur les figures 3(a) et 3(b). La présence de fissures se traduit par une diminution de la raideur du système et donc par une diminution des fréquences propres  $f$ . Le coefficient de couplage  $\kappa$  est particulièrement sensible aux fissures lorsque les deux composants piézoélectriques sont proches des zones fissurées. La perte de raideur de la structure se traduit par une forte augmentation du couplage électromécanique qui accroît l'efficacité des actionneurs et la sensibilité des capteurs. On note également une légère variation moins localisée. Dans le cas d'un système non colocalisé, la raideur mécanique induite par les éléments piézoélectriques étant plus faible, le coefficient de couplage électromécanique devrait être plus sensible à la présence de fissure, mais d'une valeur plus faible.

Ces variations des caractéristiques mécaniques et de couplage se traduisent par une modification des performances du contrôleur appliqué (voir figure 4). Suivant la position du couple actionneur/capteur, la présence de fissures peut ainsi induire soit une diminution totale des performances du contrôleur (mode 3 sur les figures 4(a) et 4(b)) soit une amplification du niveau de certains modes (mode 4 sur la figure 4(a) ou mode 5 sur la figure 4(b)).



(a) Fréquences en circuit ouvert et en court-circuit (— : circuit ouvert, - - : circuit fermé). (b) Coefficient de couplage électromécanique.

FIGURE 3 – Variables modales en fonction de la position du patch piézoélectrique et de la profondeur de la fissure  $\mu = \frac{ec}{ep}$  pour les 6 premiers modes (■ :  $\mu = 0$ , ■ :  $\mu = 1/8$ , ■ :  $\mu = 1/4$ , ■ :  $\mu = 3/8$ , ■ :  $\mu = 1/2$ ).



(a) Patch piézoélectrique hors de la zone influencée par la fissure. (b) Patch piézoélectrique sur la zone influencée par la première fissure.

FIGURE 4 – Fonctions de transfert du système en boucle ouverte (FBO : —) non contrôlé et en boucle fermée (FBF : - -) contrôlé, pour  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1/4$  et  $\mu = 1/2$ , contrôle des six premiers modes.

## 5 Conclusions

La présence d'une fissure sur une structure se traduit classiquement par une diminution des fréquences propres et une variation quasiment négligeable des formes modales. L'étude réalisée démontre que la fissure peut se traduire également par une variation des paramètres de couplage électromécanique modaux dans le cas d'une structure instrumentée de composants piézoélectriques. Cette variation peut avoir des conséquences importantes sur la dynamique des structures contrôlées et induire soit une variation des performances du contrôleur soit la divergence du système en boucle fermée. Cette première étude souligne la possibilité d'identifier des défauts sur une structure contrôlée en utilisant la variation des performances du contrôleur et montre la nécessité de réactualiser le contrôleur dans le cas d'une variation des paramètres modaux induite par une ou plusieurs fissures.

La présence de fissures permet également d'optimiser le rapport de raideur entre les composants piézoélectriques et la structure, ce qui se traduit par une augmentation du coefficient de couplage électromécanique. Dans le cas où elle n'endommage pas la structure, une légère fissuration localisée permettrait d'accroître le couplage sur certains modes.

## Références

- [1] Salawu O.S. 1997 Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Engineering Structures* **19** (9) 718-723
- [2] Owolabi G.M., Swamidas A.S.J., Seshadri R. 2003 Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration* **265** 1-22.
- [3] Montalvao D., Maia N.M.M., Ribeiro A.M.R. 2006 A Review of Vibration-based Structural Health Monitoring with Special Emphasis on Composite Materials. *The Shock and Vibration Digest* **38**(4) 1-30
- [4] Park G., Cudney H., Inman D.J. 1999 Impedance-Based Health Monitoring Technique for Civil Structures. *Structural Health Monitoring* Stanford University Palo Alto California USA 523-532
- [5] Chomette B., Chesné S., Remond D., Gaudiller L. 2010 Damage reduction of on-board structures using piezoelectric components and active modal control - Application to a printed circuit board. *Mechanical Systems and Signal Processing* **24** (2) 352-364
- [6] Chomette B., Remond D., Chesné S., Gaudiller L. 2008 Semi-adaptive modal control of on-board electronic boards using an identification method. *Smart Material and Structures* **17** 1-8
- [7] Sinha J.K., Friswell M.I., Edwards S. 2002 Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data. *Journal of Sound and Vibration* **251**(1) 13-38
- [8] Friswell M.I., Penny J.E.T. 2010 Crack Modeling for Structural Health Monitoring. *Structural Health Monitoring* **9** 47-360
- [9] Sadilek P., Zemcik R. 2010 Frequency response analysis of hybrid piezoelectric cantilever beam. *Engineering Mechanics* **17** (2) 73-82
- [10] Christides S., Barr A.D.S. 1984 One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. *Journal of Mechanical Science* **26** 639-648