

# Analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants par le chaos polynomial généralisé multiélément

L. NECHAK<sup>a</sup>, S. BERGER<sup>a</sup>, E. AUBRY<sup>a</sup>

a. Laboratoire MIPS, 12 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse

## Résumé :

*Ce papier traite de l'analyse du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants sujets à des incertitudes probabilistes au niveau des lois de frottement. Le chaos polynomial généralisé multiélément (CPG-ME) est proposé pour traiter de ce problème. L'objectif principal est d'estimer la loi de probabilité régissant l'amplitude des cycles limites pour une dispersion donnée du coefficient de frottement. La méthode proposée affiche des performances notables en termes d'efficacité et de précision. Ce résultat découle d'une comparaison effectuée entre les performances du CPG-ME avec celles offertes par la méthode du chaos polynomial généralisé (CPG) et la technique référentielle de Monte Carlo (MC).*

## Abstract :

*This paper deals with the analysis of the dynamic behavior of nonlinear friction systems with probabilistic uncertainties in the friction laws. The multi-element generalized polynomial chaos (ME-GPC) formalism is proposed to treat this problem. The main objective is to estimate the density function governing the amplitude of the limit cycles corresponding to a given dispersion of the friction coefficient. The proposed method is shown to give interesting performances in terms of efficiency and accuracy. This result comes from a comparison carried out between the performances of the ME-GPC method with the ones given by the generalized polynomial chaos (GPC) method and the referential Monte Carlo (MC) technique.*

**Mots clefs :** Systèmes dynamiques non linéaires frottants, cycles limites, incertitudes, Chaos polynomial généralisé multiélément, schémas non intrusifs

## 1 Introduction

Les systèmes frottants occupent une place prépondérante dans beaucoup de domaines industriels tels que l'automobile, l'aéronautique et le ferroviaire. Cette importance a motivé beaucoup de recherches impliquant à la fois les industriels et les scientifiques et portant en particulier sur les systèmes de freinage, d'essuyage et d'embrayage [1]. La prédiction du comportement dynamique, en particulier des vibrations induites par le frottement, dans cette classe particulière des systèmes non linéaires est un axe très prisé. Plusieurs études ont mis en exergue la grande sensibilité de leurs comportements dynamiques aux lois de frottement [2]. Par ailleurs, il a été montré que le coefficient de frottement admet des dispersions liées en général aux processus de fabrication. Il est donc nécessaire de tenir en compte ces dispersions pour prédire de façon robuste le comportement dynamique et par le même les niveaux vibratoires, en mesure d'aider à une conception robuste des systèmes frottants.

Nombreuses sont les techniques de prise en compte des incertitudes dans la prédiction et l'analyse du comportement dynamique des systèmes non linéaires. La méthode de Monte Carlo (MC) est la plus connue [3]. C'est une méthode probabiliste qui permet de reconstruire la loi de probabilité de n'importe quelle variable aléatoire. Par contre, elle est confrontée à des difficultés considérables liées à la lenteur de sa convergence impliquant un coût exorbitant pour son utilisation. Dans ce contexte, la méthode du chaos polynomial généralisé, développée ces vingt dernières années, peut être vue comme une alternative très intéressante [4]. Basée sur une caractérisation probabiliste des incertitudes, elle formalise la possibilité d'exprimer un processus stochastique à variance finie par un développement en série de fonctions

polynomiales. Ces dernières sont orthogonales par rapport à une mesure de probabilité définie par rapport à certaines variables aléatoires indépendantes modélisant les incertitudes.

La méthode a été récemment utilisée pour prédire la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires frottants [5] ainsi que pour l'analyse robuste de leurs comportements dynamiques [6]. La méthode a offert des performances notables. Dans d'autres études menées au cours de cette dernière décennie [7], des limites de l'approche par le chaos polynomial généralisé ont été illustrées. L'outil s'est avéré inapproprié à modéliser les comportements oscillatoires s'étalant sur un nombre de période suffisamment grand. Cette limite est justifiée par l'incapacité du CPG à bien modéliser les fonctions fortement non linéaires et rapides dans la dimension stochastique. Des solutions palliant à cet inconvénient sont discutées dans l'étude à Le Maître [7]. Le chaos polynomial généralisé multiélément est une autre approche proposée pour surpasser les limites du chaos polynomial généralisé [8]. L'idée dans cette méthode est basée sur la décomposition de l'intervalle d'incertitude en plusieurs segments de probabilité appelés éléments. Dans chacun de ces derniers, une variable aléatoire locale est définie. Par rapport à chaque variable locale, une approximation via le CPG est construite localement pour le processus aléatoire. Une approximation globale du processus stochastique est enfin générée en recombinaison des approximations locales.

L'originalité de ce papier réside en la prise en compte des incertitudes dans l'analyse du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants. La méthode du CPG-ME est proposée pour traiter de ce problème. L'objectif est d'estimer la loi de probabilité gouvernant l'amplitude des vibrations induites par le frottement dont le coefficient est sujet à une dispersion probabiliste. Dans cette optique, un système à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage est considéré dans ce papier organisé de la façon suivante. Les formalismes mathématiques du CPG et du CPG-ME sont présentés dans les sections 2 et 3. L'apport de la méthode du CPG-ME est montré à travers la comparaison de sa performance à celle du CPG sur le problème d'analyse du comportement dynamique du système de freinage dont le coefficient de frottement est supposé être régi par une loi de probabilité uniforme. Tous les résultats sont présentés et analysés dans la section 4.

## 2 Chaos polynomial généralisé

Considérons la classe des systèmes dynamiques non linéaires décrits dans l'espace de phase par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu) \quad (1)$$

où  $f$  désigne un champs de vecteurs non linéaires et  $\mu$  un paramètre aléatoire régi par une loi uniforme sur un intervalle  $[a, b]$  et modélisé par une variable aléatoire  $\xi$  uniformément distribuée sur l'intervalle  $[-1, 1]$  telle que  $\mu = \bar{\mu}_0 + \bar{\mu}_1 \xi$  où  $\bar{\mu}_0 = (a+b)/2$  et  $\bar{\mu}_1 = (b-a)/2$ .  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  désigne le vecteur de variables d'état qui définissent, de part l'incertitude du paramètre  $\mu$ , des processus aléatoires  $x_i(t, \xi)$  avec  $i = 1, \dots, n$ .

La théorie du chaos polynomial généralisé formalise la possibilité d'exprimer tout processus stochastique du second ordre (à variance finie) par un développement, convergent, en séries de fonctions polynomiales de variables aléatoires indépendantes. Le schéma d'Askey a établi un schéma de correspondance optimale entre des familles de loi de probabilité et des familles de polynômes [9]. Suivant ce schéma, les polynômes de Legendre sont les plus appropriés à traiter des incertitudes régies par des lois uniformes. Par conséquent les processus  $x_i(t, \xi)$  peuvent être approximés comme suit :

$$x_i(t, \xi) = \sum_{j=0}^P \bar{x}_{i,j}(t) L_j(\xi) \quad (2)$$

où les  $\bar{x}_i$  désignent les modes stochastiques et représentent les coordonnées du processus dans la base du chaos polynomial générée par les polynômes  $L_j$  vérifiant la propriété d'orthogonalité sur  $[-1, 1]$  telle que :

$$\langle L_j, L_k \rangle = \int L_j(\xi) L_k(\xi) W(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \langle L_j, L_j \rangle & j = k \end{cases} \quad (3)$$

où  $W(\xi)$  représente la densité de probabilité de la variable  $\xi$  et  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'opérateur du produit interne. Le nombre  $P$  est déterminé dans le cas général en fonction du nombre  $r$  de variable aléatoire et du degré  $d$  maximal fixé pour les fonctions  $L_j$  tel que  $P = ((r+d)!/r!d!) - 1$ . Le cas traité dans ce papier est  $r = 1$  par conséquent  $P = d$ .

Plusieurs techniques non intrusives sont introduites en littératures telles que la méthode de régression et la technique de projection non intrusive [10]. La technique de projection spectrale non intrusive exploite la propriété d'orthogonalité des polynômes de chaos pour exprimer les modes stochastiques comme suit :

$$\bar{x}_j(t) = \left(1/\langle L_j^2(\xi) \rangle\right) \int x(t) L_j(\xi) W(\xi) d\xi \quad (4)$$

Des méthodes d'intégration numériques sont utilisées pour approximer (4) telles que la méthode de Monte Carlo et la méthode de Gauss-Legendre.

### 3 Chaos polynomial généralisé multiélément

La méthode du chaos polynomial généralisé multiélément est basée sur la décomposition de l'aléa  $B$  (dans le cas traité dans ce papier,  $B = [-1, 1]$ ) en plusieurs segments de probabilité appelés éléments [8]. Cette décomposition  $D$  est formellement exprimée comme suit :

$$D = \begin{cases} B_k = [a_k, b_k], k = 1, \dots, m \\ B = \bigcup_{k=1}^m B_k \\ B_k \cap B_j = \emptyset \quad j \neq k \end{cases} \quad (5)$$

A base de la décomposition précédente, une variable indicatrice  $Z_k$  aléatoire est définie.

$$Z_k = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi \in B_k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6)$$

De nouvelles variables aléatoires  $\zeta_k : Z_k^{-1}(1) \mapsto B_k$ , munies de densité de probabilité conditionnelles  $f_{\zeta_k} = 1/(2^d \Pr(Z_k = 1))$  avec  $\Pr(Z_k = 1) = (b_k - a_k)/2$ , est définie pour modéliser l'aléa dans chaque élément. En pratique, le développement en chaos polynomial généralisé multiélément est implémenté en utilisant un vecteur de variables  $\bar{\xi}_k$  uniformes sur  $[-1, 1]$  pour exploiter les avantages de la base de chaos de Legendre. Les variables  $\zeta^k$  sont ainsi exprimés par :  $\zeta_k = ((b_k - a_k)/2)\bar{\xi}_k + ((b_k + a_k)/2)$ . Le chaos polynomial généralisé est, par la suite, utilisé, tel que présenté dans la section précédente, pour approximer localement (dans chaque élément) les processus aléatoires. Les processus sont reconstruits à base des approximations locales comme suit :

$$x_i(t, \xi) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^P \bar{x}_{i,k,j}(t) L_{k,j}(\bar{\xi}_k) Z_k \quad (7)$$

### 4 Application

Dans cette section, un modèle à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage, représenté dans FIG.1, est considéré pour évaluer la capacité de la méthode du chaos polynomial multiélément à traiter du problème de l'analyse du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants incertains. L'objectif est d'estimer la loi de probabilité gouvernant l'amplitude des cycles limites pour une dispersion donnée du coefficient de frottement. Celui-ci est supposé être régi par une loi de probabilité uniforme. Le

système a été utilisé par Hultèn dans son étude pour analyser les vibrations dans les systèmes de freinage [11]. On réfère donc à cette étude pour plus de détails sur la description du modèle et l'équation différentielle gouvernant la dynamique du système. Cette équation est donnée par le système (8).

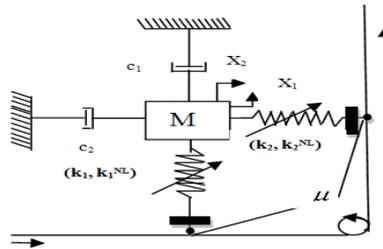


FIG. 1 – Système d'Hultèn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \omega_{0,1} & 0 \\ 0 & \eta_2 \omega_{0,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2 & -\mu \omega_{0,2}^2 \\ \mu \omega_{0,1}^2 & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1^{NL} X_1^3 + \mu \varphi_2^{NL} X_2^3 \\ -\mu \varphi_1^{NL} X_1^3 - \varphi_2^{NL} X_2^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $\eta_i = c_i / \sqrt{M k_i}$  et  $\omega_{0,i} = \sqrt{k_i / M}$ ,  $k_i$  et  $k_i^{NL}$  désignent respectivement les facteurs d'amortissement relatifs, les pulsations propres, les raideurs linéaires et non linéaires du système tandis que  $\varphi_i^{NL} = k_i^{NL} / M$  ( $i = 1, 2$ ) avec  $M = 1$  Kg,  $\omega_1 = 2\pi \times 100$  rad/s,  $\omega_2 = 2\pi \times 75$  rad/s,  $\eta_1 = \eta_2 = 0.02$ ,  $\varphi_1^{NL} = \omega_1^2$  and  $\varphi_2^{NL} = 0$ . Par ailleurs le coefficient de frottement  $\mu$  est considéré uniformément distribué dans l'intervalle  $[0.3, 0.33]$ . Le système (10) y est soumis à des instabilités de type flottement.

Le système est réécrit dans l'espace d'état sous la forme (1) en posant  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = dX_1/dt$ ,  $x_3 = X_2$  et  $x_4 = dX_2/dt$ .

#### 4.1 Application du chaos polynomial de Legendre

Le modèle (2) est utilisé pour prédire le comportement dynamique du système (8) en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement  $\mu$ . L'objectif est de proposer une démarche qui permet d'éviter la solution des équations différentielles (8), une tâche difficile et coûteuse dans le cas des systèmes non linéaires à grand nombre de degré de liberté. Plusieurs ordres  $P$  sont considérés pour analyser l'influence de l'ordre du chaos sur la précision du modèle (2). Le modèle (2) est calculé en utilisant la méthode de collocation de Gauss-Legendre. Un exemple de réalisation du déplacement  $X_1$  reconstruite par (2) et par la solution de (8) via ODE 45 de Matlab est illustré dans FIG.2.

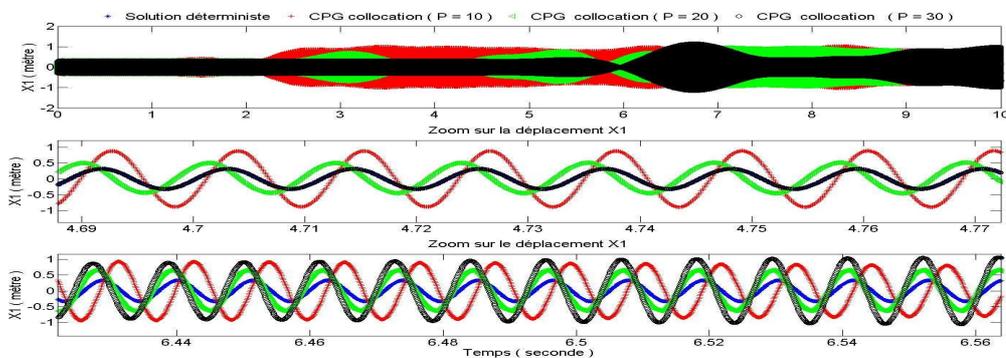


FIG. 2 – Réalisation du déplacement  $X_1$  correspondant à  $\mu = 0.33$  par le CPG de Legendre.

Dans FIG.2, il peut être observé que l'ordre  $P$  nécessaire pour une prédiction précise de l'évolution

de  $X_I$  dépend du temps. L'ordre  $P = 10$  qui est suffisant pour prédire l'évolution sur la première seconde ne l'est plus sur la deuxième seconde. De même,  $P = 20$  devient insuffisant également à partir de la troisième seconde tandis que les limites de  $P = 30$  apparaissent à partir de la cinquième seconde. Cette perte de précision s'explique par l'incapacité du modèle (2) à bien approximer l'évolution de  $X_I$  qui devient fortement non linéaire dans la dimension stochastique modélisée par l'intervalle d'orthogonalité  $[-1, 1]$ . Ce fait est illustré dans FIG.3. L'évolution de  $X_I$  dans la dimension stochastique  $y$  est représentée. Elle est estimée en utilisant le modèle (2) et la méthode de MC.

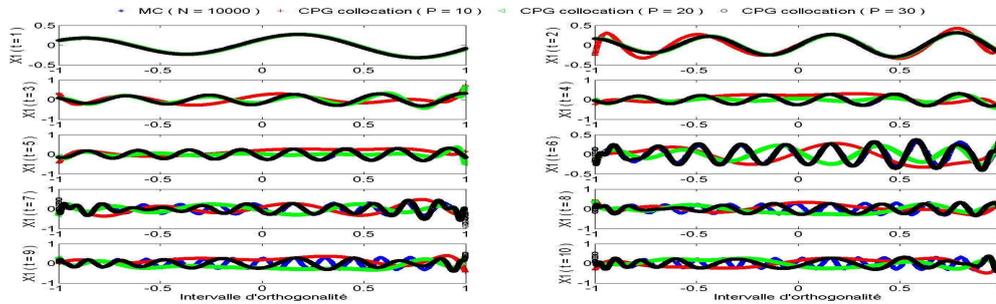


FIG. 3 – Evolution du déplacement  $X_I$  dans la dimension stochastique.

### 4.2 Application du chaos polynomial de Legendre multiélément

Le modèle (7) est utilisé pour pallier aux insuffisances du modèle (2). Deux éléments puis quatre éléments ( $m = 2$  et  $m = 4$ ) sont considérés. La méthode de collocation de Gauss-Legendre est aussi utilisée pour calculer les modes stochastiques dans (7) pour chaque élément. La même réalisation de  $X_I$  considérée précédemment est reconstruite par le modèle (7) et comparée à celle obtenue par la solution déterministe de (8). Elle est illustrée dans FIG.4. Il peut y être observé la bonne précision de la prédiction de l'évolution temporelle de  $X_I$  sur tout l'intervalle  $[0, 10]$  contrairement au résultat offert par le modèle (2).

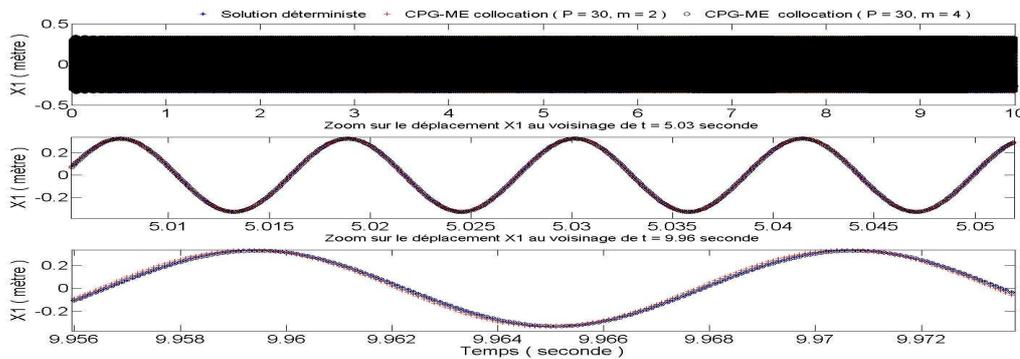


FIG. 4 – Réalisation du déplacement  $X_I$  correspondant à  $\mu = 0.33$  par le CPG-ME.

Visiblement, la précision de la prédiction avec  $m = 4$  est similaire à celle obtenue avec  $m = 2$ . Le modèle multiélément (7) a permis effectivement de surpasser l'inconvénient illustré du modèle par chaos polynomial de Legendre (2). Il est utilisé pour estimer les lois de probabilité gouvernant les amplitudes du déplacement  $X_I$  et de la vitesse correspondante  $dX_I/dt$ . Un jeu de valeurs est tout d'abord généré en échantillonnant la distribution du coefficient de frottement puis  $X_I$  et  $dX_I/dt$  sont reconstruits en évaluant leurs modèles multiéléments en chaque point du jeu obtenu. La méthode est moins coûteuse que la méthode classique de MC qui nécessite la solution du système (8) pour chaque tirage. Cette opération engage un coût exorbitant en particulier dans le cas des systèmes non linéaires complexes. 10.000 tirages sont utilisés dans le cadre du problème traité. Les résultats de l'estimation de la densité de probabilité sont illustrés dans FIG.5. Une bonne estimation est obtenue avec le modèle multiélément en particulier avec  $m = 4$ . Les caractéristiques

statistiques de l'amplitude des cycles limites correspondant à la dispersion considérée du coefficient de frottement sont relevées dans TAB.1. La précision du modèle (7) est très intéressante. L'erreur relative d'estimation sur l'enveloppe des cycles limites ne dépasse pas 0.5% avec  $m = 4$ .

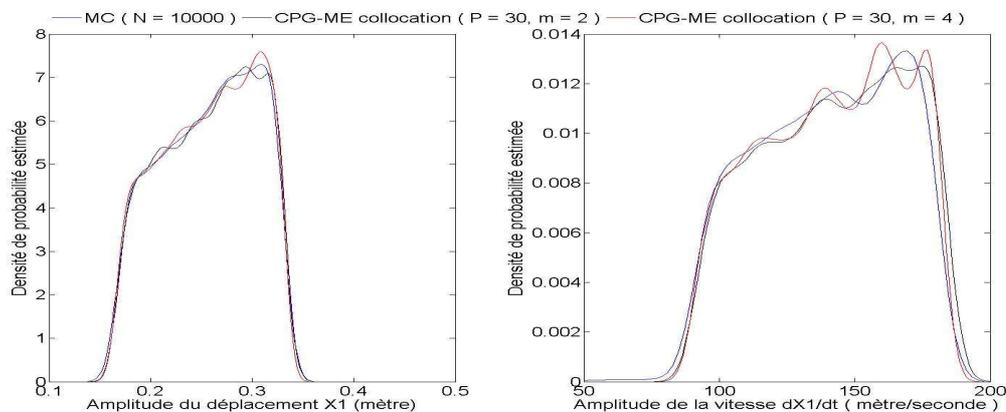


FIG. 5 – Densité de probabilité de l'amplitude de  $X_1$  et de  $dX_1/dt$ .

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC ( $X_1$ )	$0.2571 \pm 0.0012$	0.0465	-0.3309	0.3309
CPG-ME ( $X_1$ )	$0.2574 \pm 0.0012$	0.0467	-0.3330	0.3330
MC ( $dX_1/dt$ )	$138.6277 \pm 0.7457$	28.9007	-181.0107	181.0107
CPG-ME ( $dX_1/dt$ )	$141.3615 \pm 0.6713$	26.0196	-183.4838	183.4761

TAB. 1 – Estimation des statistiques de l'amplitude du déplacement  $X_1$  et de la vitesse  $dX_1/dt$ .

## References

- [1] Sinou, J-J., Truc B., Dereure, O., Mazet, F., Thouverz, F., Jezequel, L., Friction-induced vibration for an aircraft brake system-Part 1: Experimental approach and stability analysis, International Journal of Mechanical Sciences, 48(5), 536-554
- [2] Ibrahim, R. A., Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal and Chaos: Part I-Mechanics of contact and friction, ASME Applied Mechanics Reviews., 47(7), 209-226, 1994.
- [3] Fishman, G. S., Monte Carlo: concepts algorithms and applications, Springer Verlag 1996.
- [4] Ghanem, R., Spanos, P. D., Stochastic finite elements: A spectral approach, Speinger Verlag, 1991.
- [5] Nechak, L., Berger, S., Aubry, E., Stability of uncertain nonlinear dynamic friction systems, Premier Colloque international IMPACT 2010, Djerba, Tunisie.
- [6] Nechak, L., Berger, S., Aubry, E., Robust analysis of uncertain dynamic systems: combination of the centre manifold and polynomial chaos theories., WSEAS Transaction on Systems, 9, 386-395, 2010.
- [7] Le Maitre. O. P., Knio. M., Najm. H. N., Ghanem. R. G., Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions, Journal of Computational Physics, 197, 28-57, 2004.
- [8] Wan. X., Karniadakis. G., An adaptive multi-element generalized polynomial method for stochastic differential equations, Journal of Computational Physics, 209, 617-642, 2005.
- [9] Xiu. D., Karniadakis. G. E., Modelling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos, Journal of Computational Physics, 187, 137-167, 2003.
- [10] Crestaux, T., Le Maitre, O., Martinez, J. M., Polynomial Chaos Expansion for Sensitivity Analysis, Reliability Engineering and System Safety, 94, 1161-1172, 2009.
- [11] Hulten, J., Drum brake squeal- a self exciting mechanism with constant friction, in SEA Track and Bus Meeting, Detroit, 1993.