

# Diagonalisation des modèles linéaires simple-entrée structurés en second ordre

J. GUILLET<sup>a</sup>, B. MOURLLION<sup>a</sup>

*a. Laboratoire Modélisation, Intelligence, Processus, Systèmes (MIPS-EA2332)  
Université de Haute-Alsace, ENSISA, 12 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France.  
e-mail: jerome.guillet@uha.fr, benjamin.mourllion@uha.fr*

## Résumé :

*Cet article traite de la diagonalisation des Modèles linéaires Structurés en Second Ordre (MSSO). La méthode traditionnelle de diagonalisation des MSSO par décomposition modale n'est possible que si le modèle respecte les conditions de Rayleigh-Caughey. Afin de s'affranchir de ces conditions, une nouvelle méthode est proposée. Elle se base sur la résolution du problème aux valeurs propres quadratique inverse et sur la transformation des MSSO en représentation d'état. Cette méthode permet de diagonaliser l'ensemble des modèles structurés en second ordre simple-entrée si la matrice d'état correspondant au MSSO est diagonalisable.*

## Abstract :

*The main purpose of this article is about the diagonalisation of Second Order Form Model (SOFM). Under Rayleigh-Caughey conditions, diagonalisation is done by modal decomposition. However, in the general case, diagonalisation is not allowed and a new method has to be provided. The proposed approach is based on a solution of the quadratic inverse eigenvalue problem and on the transformation of the SOFM into a state-space realisation. This method allows the diagonalisation of all single-input SOFM if the state matrix corresponding to the SOFM is diagonalisable.*

**Mots clefs :** Modèle linéaire structuré en second ordre ; Diagonalisation ; Conditions structurelles.

## Notations

$X^T$  est la transposée de la matrice  $X$ .

$X^+$  est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice  $X$ .

$\bar{X}$  et  $|X|$  sont respectivement le conjugué et le module de la matrice complexe  $X$ .

$X > 0$  (resp.  $X \geq 0$ ) est une matrice  $X$  définie positive (resp. semi-définie positive).

$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$\text{Re}(z)$  est la partie réelle du nombre complexe  $z$ .

$\mathbb{O}$  et  $\mathbb{I}$  sont respectivement la matrice nulle et la matrice identité de dimensions définies par le contexte.

$\mathbb{1}$  est un vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

## 1 Introduction

Les Modèles linéaires Structurés en Second Ordre (MSSO) sont utilisés dans différents domaines tels que la mécanique, la conception de circuit électrique, la dynamique des fluides, les processus thermiques ou l'analyse de structure. Les paramètres de ces modèles sont des éléments inertiels, des éléments dissipatifs et des éléments capacitifs liés aux paramètres physiques du système (voir le chapitre 2 de [2]). Lorsque le système est déduit des lois physiques, les matrices du modèle respectent les conditions structurelles.

La diagonalisation des MSSO permet d'identifier les modes propres du système. Lorsque la matrice des éléments capacitifs respecte une structure particulière, dite conditions de Rayleigh-Caughey, alors la diagonalisation peut être effectuée par décomposition modale. En revanche, dans le cas générale, la diagonalisation n'est

pas réalisable. Il existe des méthodes d'approximation de la matrice des éléments capacitifs pour que cette dernière respecte les conditions de Rayleigh-Caughey, telle la superposition modale [3], mais le MSSO initial est alors approximé. Basée sur la résolution du problème aux valeurs propres quadratique inverse et sur la représentation d'état d'un MSSO, nous proposons une nouvelle méthode pour diagonaliser les MSSO simple-entrée respectant les conditions structurelles.

Ce papier est organisé de la manière suivante : la deuxième Section formule la problématique ; la troisième Section présente le problème aux valeurs propres quadratique et le lien entre les conditions structurelles et les valeurs propres du modèle ; la quatrième Section est consacrée à la détermination d'une solution du problème aux valeurs propres quadratique inverse ; la cinquième Section présente la reconstruction d'un MSSO diagonal à partir de la représentation d'état du MSSO initial ; la sixième Section permet de retrouver les résultats de la décomposition modale lorsque le modèle respecte les conditions de Rayleigh-Caughey ; la dernière Section propose un exemple numérique pour illustrer l'efficacité de la méthode, avant la conclusion.

## 2 Formulation de la problématique

La formulation générale d'un MSSO définit par les matrices  $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, F, G_p, G_v, G_a)$  est donnée par

$$\Sigma: \begin{cases} \mathcal{M}\ddot{q}(t) + \mathcal{C}\dot{q}(t) + \mathcal{K}q(t) = Fu(t) & q(0) = q_0 \\ y(t) = G_p q(t) + G_v \dot{q}(t) + G_a \ddot{q}(t) & \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  est le vecteur des entrées du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  le vecteur des sorties.  $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$  est le vecteur des coordonnées généralisées du système avec  $\dot{q}(t)$  et  $\ddot{q}(t)$  respectivement sa première et seconde dérivée temporelle.  $q_0, \dot{q}_0 \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$  sont les conditions initiales. La matrice  $F \in \mathbb{R}^{n_q \times m}$  est la matrice de commande, les matrices  $\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  sont respectivement les matrices des éléments inertiels, des éléments dissipatifs et des éléments capacitifs généralisés et  $G_p, G_v, G_a \in \mathbb{R}^{p \times n_q}$  sont respectivement les matrices d'observation des positions, des vitesses et des accélérations. Lors de la modélisation d'un système par un MSSO, les conditions suivantes, appelées conditions structurelles, assurent que le système est stable et que le système a une cohérence avec les lois mécaniques :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \mathcal{M}^T > 0 & \text{éléments inertiels généralisés} \\ \mathcal{K} = \mathcal{K}^T \geq 0 & \text{éléments capacitifs généralisés} \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 & \text{avec } \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1^T \geq 0 \text{ éléments dissipatifs généralisés} \\ & \text{et } \mathcal{C}_2 = -\mathcal{C}_2^T \text{ éléments conservatifs généralisés} \end{cases} \quad (2)$$

L'objectif de la diagonalisation est de trouver un nouveau MSSO  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{F}, \tilde{G}_p, \tilde{G}_v, \tilde{G}_a)$  avec des matrices  $\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  diagonales dont la fonction de transfert égalise la fonction de transfert du modèle initial. Pour cela, nous utilisons une solution du problème aux valeurs propres quadratique.

## 3 Problème aux valeurs propres quadratique

Le problème aux valeurs propres quadratique (QEP pour *Quadratic Eigenvalue Problem*) permet de lier les valeurs propres du triplet matriciel  $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$  aux conditions structurelles.

**Définition 3.1** Les valeurs propres du triplet matriciel  $\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  sont l'ensemble  $\Lambda$  des scalaires  $\lambda_i$  tels que  $Q(\lambda_i)\phi_i = 0$  avec  $Q(\lambda_i) = \mathcal{M}\lambda_i^2 + \mathcal{C}\lambda_i + \mathcal{K}$  et  $\phi_i \neq \mathbb{0}$ . La quantité  $\phi_i$  est appelée vecteur propre à droite de  $Q(\lambda_i)$ .

Parmi l'ensemble des méthodes permettant de résoudre le QEP, la méthode par linéarisation est considérée [6]. Comme  $\mathcal{M}$  est inversible (assurée par les conditions structurelles), en réécrivant  $Q(\lambda_i)$  on obtient un problème aux valeurs propres classique (CEP pour *Classic Eigenvalue Problem*) écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{I} \\ -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_1\Lambda_1 & \Phi_2\Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_1\Lambda_1 & \Phi_2\Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

où  $\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_i)$ ,  $\Phi_{1i} = x_i$  pour  $i = 1, \dots, n_q$  et où  $\Lambda_2 = \text{diag}(\lambda_i)$ ,  $\Phi_{2i} = x_i$  pour  $i = n_q + 1, \dots, 2n_q$ . La linéarisation du problème aux valeurs propres quadratique est équivalent à la transformation d'un MSSO en réalisation d'état.

**Proposition 3.2** À un système du second ordre de la forme (1), avec  $\mathcal{M}$  non singulière, en posant  $x(t) = \begin{pmatrix} q(t)^T & \dot{q}(t)^T \end{pmatrix}^T$  on peut associer la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & -\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{M}^{-1}F \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} G_p - G_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} & G_v - G_a\mathcal{M}^{-1}\mathcal{C} \end{pmatrix} x(t) + G_a\mathcal{M}^{-1}Fu(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

où  $x(t)$  est le vecteur d'état et  $x_0$  les conditions initiales.

Ainsi, le spectre d'un MSSO coïncide avec le spectre de la matrice d'état donnée par l'équation (4). Comme la procédure de diagonalisation se base sur la solution du CEP, nous supposons que la matrice d'état de l'équation (4) est diagonalisable. Une condition nécessaire et suffisante est que la matrice d'état de dimension  $2n_q \times 2n_q$  possède  $2n_q$  valeurs propres différentes. Dans [6], un état de l'art complet sur le QEP et ses applications est donné avec, en particulier, les propriétés suivantes :

- si  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  sont réelles, alors les valeurs propres sont réelles ou en paires conjuguées ;
- si  $\mathcal{M}$  est hermitienne, définie positive et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  sont hermitiennes semi-définie positive, alors  $\text{Re}(\lambda) \leq 0$  ;
- si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}$  sont réelles, symétriques et définie positive et  $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^T$ , alors  $\text{Re}(\lambda) = 0$ .

Nous venons de voir l'ensemble des propriétés du spectre  $\Lambda$  d'un MSSO respectant les conditions structurelles. La prochaine étape consiste à reconstruire, à partir du spectre  $\Lambda$ , un triplet matriciel  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{K}})$  diagonal avec le problème aux valeurs propres quadratique inverse.

#### 4 Problème aux valeurs propres quadratique inverse

Le problème aux valeurs propres quadratique inverse (QIEP pour *Quadratic Inverse Eigenvalue Problem*) consiste à construire un triplet de matrices  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{K}})$  tel que les valeurs propres de ce triplet égalisent un jeu prédéfini de valeur propre  $\Lambda$ . Différents auteurs ont étudié la solvabilité du QIEP [4, 1, 5]. Ils recherchent l'ensemble des matrices solutions du QIEP sans pour autant donner une solution particulière permettant de respecter les conditions structurelles. Dans le cas où le triplet matriciel  $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$  respecte les conditions structurelles, nous allons montrer que l'on peut déterminer un triplet matriciel  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{K}})$  diagonal, respectant les conditions structurelles et possédant les mêmes valeurs propres que le triplet matriciel initial. Comme le spectre d'une matrice est invariant par transformation, pour résoudre le QIEP nous proposons une matrice de transformation  $T$  qui, appliquée à la matrice spectrale  $\Lambda$ , permet de retrouver la structure d'un MSSO sous forme de réalisation d'état défini par l'équation (4). La solution proposée est résumée par le théorème suivant :

**Théorème 4.1** Soit  $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n_q \times 2n_q}$  la matrice diagonale des valeurs propres du triplet matriciel  $(\mathcal{M}, \mathcal{C}, \mathcal{K})$  respectant les conditions structurelles telle que

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{r1} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{r2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

où :

- $\Lambda_c, \bar{\Lambda}_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  sont les matrices diagonales des  $2n_c$  valeurs propres complexes ;
- $\Lambda_{r1}, \Lambda_{r2} \in \mathbb{R}^{(n_q - n_c) \times (n_q - n_c)}$  sont deux matrices diagonales des valeurs propres réelles ;
- $\Lambda$  ne possède pas de valeurs propres multiples.

Alors  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}} = -\Lambda_1 - \Lambda_2$  et  $\tilde{\mathcal{K}} = \Lambda_1\Lambda_2$  est un triplet matriciel qui respecte les conditions structurelles et qui a pour valeurs propres  $\Lambda$ .

#### Démonstration

- La matrice  $\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix}$  étant diagonale de dimension  $2n_q \times 2n_q$ , sa décomposition en deux matrices  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  de dimension  $n_q \times n_q$  est toujours possible. De plus, les conditions structurelles assurent que ses valeurs propres sont réelles ou en paires complexes conjuguées. Ainsi, il est toujours possible de décomposer  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  suivant l'équation (5).

- On pose  $T = \begin{pmatrix} \Lambda_2 & -\mathbb{I} \\ -\Lambda_1 & \mathbb{I} \end{pmatrix}$ . Comme  $\Lambda$  n'a pas de valeur propre multiple,  $(\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}$  existe et la matrice  $T$  peut être inversée par bloc :  $T^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} & (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} \\ (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 & (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}\Lambda_2 \end{pmatrix}$ . Par la transformation  $T$  la matrice  $\Lambda$  devient :

$$T^{-1}\Lambda T = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Cette matrice a pour valeurs propres  $\Lambda$  et par identification avec l'équation (4), en posant  $\tilde{\mathcal{M}} = \mathbb{I}$  sans perte de généralité, on obtient  $\tilde{\mathcal{C}} = -\Lambda_1 - \Lambda_2$  et  $\tilde{\mathcal{K}} = \Lambda_1\Lambda_2$ .

- Le triplet matriciel respecte les conditions structurelles car

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \begin{pmatrix} |\Lambda_c|^2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r1}\Lambda_{r2} \end{pmatrix} \geq 0 \quad -\Lambda_1 - \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\Lambda_c - \bar{\Lambda}_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\Lambda_{r1} - \Lambda_{r2} \end{pmatrix} \geq 0$$

En effet, comme les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle,  $|\Lambda_c|^2$ ,  $\Lambda_{r1}\Lambda_{r2}$ ,  $-\Lambda_c - \bar{\Lambda}_c$  et  $-\Lambda_{r1} - \Lambda_{r2}$  sont des matrices diagonales à coefficients positifs ou nuls donc semi-définies positives. De plus, comme  $\Lambda_c$ ,  $\Lambda_{r1}$  et  $\Lambda_{r2}$  sont diagonales, les matrices  $\tilde{\mathcal{M}}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  sont diagonales et donc symétriques.  $\square$

Le QEP et le QIEP permettent de définir les conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir transformer la matrice spectrale  $\Lambda$  en un triplet matriciel  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{K}})$  diagonal respectant les conditions structurelles. L'étape suivante consiste à déterminer la matrice de commande et les matrices d'observation du MSSO diagonal en utilisant la projection dans la base modale de la représentation d'état défini par l'équation (4) :

$$A_d = \Phi^{-1}A\Phi = \Lambda \quad B_d = \Phi^{-1}B \quad C_d = C\Phi \quad D_d = D \quad (7)$$

où  $\Phi$  est la matrice des vecteurs propres de  $A$ . En appliquant la matrice de transformation  $T$  sur cette représentation d'état, le théorème 4.1 permet de reconstruire une matrice d'état dont la structure par bloc respecte l'équation (4). En revanche, la matrice  $T$  ne permet pas de reconstruire la matrice de commande en respectant la structure car, dans le cas générale,  $T^{-1}B_d \neq \begin{pmatrix} \mathbb{O}^T & \tilde{F}^T \end{pmatrix}^T$ . Une étape supplémentaire de transformation est donc nécessaire pour pouvoir extraire le MSSO diagonal de la représentation d'état.

## 5 Extraction d'un MSSO diagonal

La décomposition par bloc de l'ensemble des matrices de la représentation d'état projetée dans la base modale permet d'écrire sa fonction de transfert  $H(s)$  sous la forme :

$$H(s) = \begin{pmatrix} C\tilde{\Phi}_1 & C\tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & s\mathbb{I} - \Lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{i1}B \\ \tilde{\Phi}_{i2}B \end{pmatrix} + D$$

avec  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  partitionnées par blocs telles que  $\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix}$  et  $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{i1}^T & \tilde{\Phi}_{i2}^T \end{pmatrix}^T$ . Appliquer la matrice de transformation  $T^{-1}$  sur la matrice d'entrée donne :

$$T^{-1}B_d = \begin{pmatrix} (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}(\tilde{\Phi}_{i1} + \tilde{\Phi}_{i2})B \\ (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}(\Lambda_1\tilde{\Phi}_{i1} + \Lambda_2\tilde{\Phi}_{i2})B \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ainsi, il est nécessaire de trouver une nouvelle représentation d'état de la base modale telle que  $(\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}(\tilde{\Phi}_{i1} + \tilde{\Phi}_{i2})B = \mathbb{O}$  tout en conservant la structure de la matrice  $T^{-1}A_dT$ .

Une solution à cette problématique peut être trouvée dans le cas des systèmes simple-entrée (*i.e.*  $B \in \mathbb{R}^{2n_q \times 1}$ ). En posant  $\tilde{\Phi}_{i1}B = -X_1\mathbb{1}$  et  $\tilde{\Phi}_{i2}B = X_2\mathbb{1}$ ; en posant  $X_1 = -\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_{n_q})$  et  $X_2 = \text{diag}(b_{n_q+1}, b_{n_q+2}, \dots, b_{2n_q})$  où  $b_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\Phi^{-1}B$ ; alors la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = \begin{pmatrix} C\tilde{\Phi}_1X_1 & C\tilde{\Phi}_2X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & s\mathbb{I} - \Lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} + D \quad (9)$$

puisque les matrices  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $X_1$  et  $X_2$  sont diagonales.

En appliquant la transformation  $T$  sur la fonction de transfert (9), on a

$$A_T = T^{-1}A_d T = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad B_T = T^{-1}B_d = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$C_T = C_d T = C \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 X_1 \Lambda_2 - \tilde{\Phi}_2 X_2 \Lambda_1 & -\tilde{\Phi}_1 X_1 + \tilde{\Phi}_2 X_2 \end{pmatrix} \quad D_T = D_d \quad (11)$$

Le théorème 4.1 assure que la matrice  $A_T$  est à coefficients réels et il est clair que le vecteur  $B_T$  est aussi à coefficients réels. Pour montrer que  $C_T$  vérifie également cette propriété, il est nécessaire de décomposer par blocs les matrices  $\Phi_i$ ,  $X_i$  et  $\Lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) en partie réelle et partie complexe conjuguée. Basé sur cette décomposition, on montre que la matrice  $C_T$  est aussi à coefficients réels.

Afin d'extraire de la réalisation d'état (11) les matrices du second ordre, nous devons extraire de la matrice  $D_T$  la matrice  $\tilde{G}_a$  selon l'équation  $\tilde{G}_a \tilde{F} = D_T$ . Comme  $\tilde{F}$  est un vecteur colonne, en utilisant la pseudo inverse  $\tilde{F}^+ = (\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1} \tilde{F}^T$  de  $\tilde{F}$  on a directement  $\tilde{G}_a = D_T \tilde{F}^+$ . Comme  $\tilde{F} = \mathbf{1}$ , alors  $(\tilde{F}^T \tilde{F})^{-1} = \frac{1}{n_q}$  est donc  $\tilde{G}_a = \frac{1}{n_q} G_a \mathcal{M}^{-1} F \tilde{F}^T$ . Au final, le MSSO diagonal est donné par

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{M}} = \mathbf{I} & \tilde{G}_p = C(\tilde{\Phi}_1 X_1 \Lambda_2 - \tilde{\Phi}_2 X_2 \Lambda_1) + \tilde{G}_a \tilde{\mathcal{K}} & \tilde{F} = \mathbf{1} \\ \tilde{\mathcal{C}} = -\Lambda_1 - \Lambda_2 & \tilde{G}_v = C(-\tilde{\Phi}_1 X_1 + \tilde{\Phi}_2 X_2) + \tilde{G}_a \tilde{\mathcal{C}} & \tilde{q}_0 = (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} (X_1^{-1} \tilde{\Phi}_{i_1} + X_2^{-1} \tilde{\Phi}_{i_2}) x_0 \\ \tilde{\mathcal{K}} = \Lambda_1 \Lambda_2 & \tilde{G}_a = \frac{1}{n_q} G_a \mathcal{M}^{-1} F \tilde{F}^T & \dot{\tilde{q}}_0 = (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} (\Lambda_1 X_1^{-1} \tilde{\Phi}_{i_1} + \Lambda_2 X_2^{-1} \tilde{\Phi}_{i_2}) x_0 \end{cases} \quad (12)$$

On peut constater qu'il n'est pas nécessaire d'écrire l'ensemble des transformations permettant d'obtenir l'équation (12). En effet, il suffit de résoudre le CEP (équation (3)) pour déterminer les matrices  $\Phi_i$ ,  $X_i$  et  $\Lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ). Ensuite, les autres étapes sont constituées de tris et de multiplications de matrices. Ainsi, la méthode échoue seulement si le calcul des valeurs et vecteurs propres échoue.

## 6 Conditions de Rayleigh-Caughey

La méthode de diagonalisation d'un MSSO fait habituellement appel aux conditions de Rayleigh-Caughey qui imposent une matrice  $\mathcal{C}$  de la forme :  $\mathcal{C} = \mathcal{M} \sum_{i=0}^{n_q-1} a_i (\mathcal{M}^{-1} \mathcal{K})^i$  où les  $a_i$  sont des coefficients réels convenablement choisis pour que  $\mathcal{C}$  respecte les conditions structurelles. Sous les conditions de Rayleigh-Caughey, un MSSO est diagonalisable par les équations  $\tilde{\mathcal{M}} = \Phi_m^T \mathcal{M} \Phi_m$ ,  $\tilde{\mathcal{C}} = \Phi_m^T \mathcal{C} \Phi_m$  et  $\tilde{\mathcal{K}} = \Phi_m^T \mathcal{K} \Phi_m$  où  $\Phi_m$  est la matrice des vecteurs propres (ou matrice modale) solution du CEP :  $\mathcal{M}^{-1} \mathcal{K} \Phi_m = \Phi_m \Lambda$ . Ce résultat est déduit des conditions d'orthogonalité des modes propres d'un MSSO. Un mode propre est défini par deux valeurs propres associées et leurs vecteurs propres co-linéaires.

La méthode de diagonalisation proposée dans cet article ne fait aucune hypothèse sur la structure de la matrice  $\mathcal{C}$ . Mais si cette dernière respecte les conditions de Rayleigh-Caughey, elle permet de retrouver les résultats de la diagonalisation traditionnelle à condition d'associer correctement les valeurs propres. En effet, dans le théorème 4.1, les valeurs propres sont associées par paires dans les matrices  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ . Or, si l'association est clairement définie dans le cas des valeurs propres complexes, aucune condition d'association n'est donnée dans le cas des valeurs propres réelles. Pour obtenir un résultat équivalent à la méthode traditionnelle, il faut donc associer les valeurs propres réelles définissant un même mode propre. Pour cela, il suffit de déterminer les paires de vecteurs propres co-linéaires et d'associer dans  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  les valeurs propres correspondantes.

Les conditions de Rayleigh-Caughey assurent l'absence de couplage entre les coordonnées au travers de la matrice  $\mathcal{C}$ . Or la méthode proposée permet de découpler les coordonnées quelques soient la structure de cette matrice. Ainsi, les couplages ne sont plus dans les équations de la dynamique et il est possible de constater qu'ils se retrouvent dans les matrices d'observation. C'est-à-dire que pour un MSSO ne respectant pas les conditions de Rayleigh-Caughey, dont seules les positions sont observées (*i.e.*  $G_v = G_a = \mathbf{O}$ ), alors le MSSO diagonal correspondant n'aura pas, dans le cas général, une matrice d'observation des vitesses nulles, autrement dit  $G_v = \mathbf{O} \not\Rightarrow \tilde{G}_v = \mathbf{O}$ .

## 7 Exemple numérique

Afin de montrer l'efficacité de la méthode, nous l'appliquons sur un exemple de système mécanique constitué de trois masses, liées en série par des ressorts et/ou des amortisseurs, représenté à la FIGURE 1.

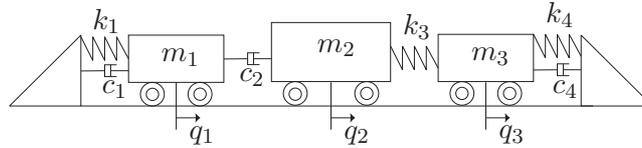


FIGURE 1 – Système pris en exemple

Les paramètres du système sont :

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_2$	$c_4$	$k_1$	$k_3$	$k_4$
1 kg	4 kg	1 kg	0.02 N.m <sup>-1</sup> .s	0.08 N.m <sup>-1</sup> .s	0.04 N.m <sup>-1</sup> .s	4 N.m <sup>-1</sup>	6 N.m <sup>-1</sup>	3 N.m <sup>-1</sup>

L'entrée du modèle est une force appliquée sur la seconde masse et la sortie est le déplacement de cette même masse. Le MSSO obtenu est donné par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & -0.08 \\ 0 & -0.08 & 0.12 \end{pmatrix} \quad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$F = (0 \ 1 \ 0)^T \quad G_p = (0 \ 1 \ 0) \quad G_v = G_a = 0$$

Ce modèle ne respecte pas les conditions de Rayleigh-Caughey car  $\mathcal{C}$  n'est pas diagonalisable par la matrice  $\Phi_m$  de la base modale. L'utilisation de la méthode de diagonalisation sur le modèle (13) permet d'obtenir le modèle suivant

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 10.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \tilde{F} = (1 \ 1 \ 1)^T \quad (14)$$

$$\tilde{G}_p = (2.29 \times 10^{-2} \ 0.22 \ -1.54 \times 10^{-4}) \quad \tilde{G}_v = (-1.16 \times 10^{-7} \ -6.85 \times 10^{-6} \ 6.97 \times 10^{-6}) \quad \tilde{G}_a = 0$$

Le modèle obtenu est effectivement diagonal, et la matrice de commande a l'ensemble de ses coefficients égaux à 1. On constate que si la matrice d'observation des vitesses du modèle initial est nulle, ce n'est plus le cas pour le modèle diagonalisé.

## 8 Conclusion

Dans cet article, la problématique de la diagonalisation d'un modèle structuré en second ordre a été explorée. La méthode de diagonalisation traditionnelle impose au modèle de respecter les conditions de Rayleigh-Caughey. En utilisant le problème aux valeurs propres quadratique inverse ainsi que la transformation d'un MSSO en réalisation d'état, une nouvelle méthode de diagonalisation a été proposée. Cette méthode est effective pour l'ensemble des MSSO simple-entrée et préserve les conditions structurelles.

## Références

- [1] Y.-F. CAI, Y.-C. KUO, W.-W. LIN, and S.-F. XU. Solutions to a quadratic inverse eigenvalue problem. *Linear Algebra and its Applications*, 430 :1590–1606, 2009.
- [2] R. C. DORF and R. H. BISHOP. *Modern Control Systems, Eleventh Edition*. Pearson, 2008.
- [3] M. GERADIN and D. RIXEN. *Mechanical Vibrations, Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley Editorial Offices, 1994.
- [4] P. LANCASTER. Isospectral vibrating systems. part 1 : the spectral method. *Linear Algebra and its Applications*, 409 :51–69, 2005.
- [5] M. M. LIN, B. DONG, and M. T. CHU. Semi-definite programming techniques for structured quadratic inverse eigenvalue problems. *Numerical Algorithms*, 53(4) :419–437, 2009.
- [6] F. TISSEUR and K. MEERBERGEN. The quadratic eigenvalue problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review*, 43(2) :235–286, 2001.