

Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée basé sur les fonctions de Green

R. MEFTAH^a, D. DUHAMEL^a

a. Université Paris-Est, Laboratoire Navier (ENPC/IFSTTAR/CNRS), Ecole des Ponts ParisTech, 6 et 8 av Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée

Résumé :

Dans ce travail, nous proposons une démarche de modélisation de contact dynamique entre pneumatique et chaussée. La démarche est basée sur les techniques de convolutions. Les fonctions de Green du pneumatique sont supposées connues. La démarche consiste d'abord à décomposer ces fonctions dans une base modale, ensuite les paramètres identifiés sont utilisés pour construire une convolution rapide. Le déplacement est calculé par une convolution rapide entre forces de contact et fonctions de Green. Le problème de contact est traité en ajoutant une condition cinématique sur les vitesses. La démarche est appliquée sur un modèle simplifié de pneumatique sur une chaussée sinusoïdale.

Abstract :

In this work, we propose a tire road contact model. The approach is based on convolution techniques. Green functions of the tire are assumed known. It consists, at the first stage, on an approximation of the pre-calculated Green function on a series of modal contributions, the identified parameters are then used to construct a fast convolution. The displacement is computed by a fast convolution between contact forces and Green functions. The contact problem is treated by adding a kinematic condition on velocity. The approach is applied to a simplified tire model on a sinusoidal roadway.

Mots clefs : contact dynamique ; Convolution ; pneumatique-chaussée

1 Introduction

Le contact pneumatique/chaussée représente la source principale du bruit de trafic routier, en particulier pour des vitesses supérieures à 50 km/h. L'une des difficultés majeures de la modélisation de ce phénomène est la prise en compte de l'effort de contact dans le comportement dynamique du pneumatique. La complexité de la géométrie du couple chaussée/pneumatique rend le problème difficile. Ce genre de problème est souvent traité à l'aide de l'intégration temporelle en utilisant des approches basées soit sur la méthode de pénalisation[2] soit sur la méthode de multiplicateurs de Lagrange[1]. La plupart de ces méthodes sont souvent difficiles à mettre en oeuvre ou bien mènent à des calculs lourds. Les techniques de convolution peuvent être utilisées pour traiter ce genre de problème. La réponse dynamique est calculée par un produit de convolution entre les fonctions de Green du système dynamique et les forces de contact. Cette approche est largement utilisée dans la littérature [5, 3, 4, 6, 7, 8].

La démarche que nous proposons dans ce travail est basée sur la décomposition de la fonction de Green dans une base modale. Les paramètres modaux identifiés sont ensuite utilisés pour construire une convolution plus rapide. Le contact est géré en utilisant les conditions de contact classique, puis en ajoutant une condition cinématique sur les vitesses de déplacements.

2 Convolution rapide

La fonction de Green est supposée connue. L'idée est d'approximer cette fonction par une combinaison linéaire de la contribution de chaque mode. Les paramètres modaux sont identifiés à l'aide de l'algorithme LSCE.

$$G(\omega) \approx \sum_{k=1}^{k=N_m} \frac{A_k}{-\omega^2 + 2j\xi_k \omega \omega_k + \omega_k^2} \quad (1)$$

Après avoir déterminé les paramètres modaux A_k , ω_k et ξ_k et tronqué la décomposition à un ordre N , le déplacement dans le domaine temporel peut être obtenu par une transformation de Fourier inverse de l'équation (1)

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) \quad (2)$$

Avec

$$\omega_k^d = \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$$

Le déplacement peut être calculé par un produit de convolution

$$u(t) = \int_0^t g(\tau) q(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (3)$$

On remplace l'expression de $g(t)$ dans l'équation (3), puis on sépare les variables t et τ , nous pouvons écrire le déplacement sous la forme

$$u(t) = \sum_{k=1}^{k=2N_m} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} [\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t)] \quad (4)$$

où $\alpha^k(t)$ et $\beta^k(t)$ sont calculés par les formules

$$\alpha^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k \omega_k \tau} \cos(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (5)$$

$$\beta^k(t) = \int_0^t e^{\xi_k \omega_k \tau} \sin(\omega_k^d \tau) q(\tau) d\tau \quad (6)$$

3 Problème de contact

3.1 Démarche générale

Les conditions classiques de contact sont données par les équation suivantes

$$u(t) = u_r(t) ; f_c(t) > 0 \quad (7)$$

$$u(t) > u_r(t) ; f_c(t) = 0 \quad (8)$$

Où $u(t)$ est le déplacement d'un point du système, $u_r(t)$ est l'amplitude du profil de la chaussée au même point et $f_c(t)$ la force de contact au même point. Le principe de calcul est détaillé ci-dessous :

1. Premièrement, l'historique du déplacement $u^h(n\Delta t)$ est calculé en supposant que $f_c(n\Delta t) = 0$.

$$u^h(n\Delta t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k n\Delta t} [\sin(\omega_k^d n\Delta t) \alpha^k((n-1)\Delta t) - \cos(\omega_k^d n\Delta t) \beta^k((n-1)\Delta t)] \quad (9)$$

2. L'historique du déplacement est comparé avec l'amplitude du profile de la chaussée.

$$\Delta x(n\Delta t) = u_r(n\Delta t) - u^h(n\Delta t) \quad (10)$$

3. Si l'hypothèse de non contact ($\Delta x < 0$) est vérifiée, le déplacement est calculé par :

$$u(n\Delta t) = u^h(n\Delta t) \quad (11)$$

Ensuite, la même procédure est répétée pour le prochain pas de temps ($f_c((n+1)\Delta t) = 0$).

4. Si $\Delta x \geq 0$, la force de contact est calculée par le principe de déconvolution détaillé dans la prochaine section.

5. La même procédure est répétée pour le prochain pas de temps ($f_c((n+1)\Delta t) = 0$).

3.2 Déconvolution

Connaissant la force et la fonction de Green dans le domaine temporel, le déplacement peut être calculé par un produit de convolution :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^{t-\Delta t} g(t-\tau)q(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g(t-\tau)q(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g(t-\tau)q(\tau)d\tau}_{u_h(t)} + \int_0^{\Delta t} g(\tau)q(t-\tau)d\tau \\ &= u_h(t) + \int_0^{\Delta t} g(\tau)q(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

Si on dérive cette équation (12) on trouve

$$\begin{aligned} v(t) = u'(t) &= \int_0^{t-\Delta t} g'(t-\tau)q(\tau)d\tau + \int_{t-\Delta t}^t g'(t-\tau)q(\tau)d\tau \\ &= \underbrace{\int_0^{t-\Delta t} g'(t-\tau)q(\tau)d\tau}_{v_h(t)} + \int_0^{\Delta t} g'(\tau)q(t-\tau)d\tau \\ &= v_h(t) + \int_0^{\Delta t} g'(\tau)q(t-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

Notant $\mathbf{Y} = [u(t) \ v(t)]^T$ et $\mathbf{Y}_h = [u_h(t) \ v_h(t)]^T$, on peut écrire

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_h + \Psi(q) \quad (14)$$

Où Ψ est un opérateur intégral qui traduit l'influence de la force de contact à l'instant t .

Dans le cas où, il y a contact, le déplacement est imposé par le profile de la chaussée qui est supposé rigide. On suppose aussi que le point de contact suit la chaussée, ce qui peut être traduit par les conditions suivantes :

$$u(t) = u_r(t) ; \quad v(t) = \frac{du_r(t)}{dt} \quad (15)$$

Sous la forme vectorielle

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_r = [u_r(t) \ \frac{du_r(t)}{dt}]^T \quad (16)$$

En utilisant la décomposition modale de la fonction de Green, on peut écrire

$$u(t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} [\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t)] \quad (17)$$

et

$$v(t) = - \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k \xi_k \omega_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} [\sin(\omega_k^d t) \alpha^k(t) - \cos(\omega_k^d t) \beta^k(t)] \\ + \sum_{k=1}^{k=N} A_k e^{-\xi_k \omega_k t} [\cos(\omega_k^d t) \alpha^k(t) + \sin(\omega_k^d t) \beta^k(t)] \quad (18)$$

Les équations (17) et (18), peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^{k=N} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k \quad (19)$$

où

$$\mathbf{x}_k = [\alpha^k(t) \ \beta^k(t)]^T \quad (20)$$

et

$$\mathbf{B}_k = A_k e^{-\xi_k \omega_k t} \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_k^d t)}{\omega_k^d} & -\frac{\cos(\omega_k^d t)}{\omega_k^d} \\ \cos(\omega_k^d t) - \frac{\xi_k \omega_k}{\omega_k^d} \sin(\omega_k^d t) & \sin(\omega_k^d t) + \frac{\xi_k \omega_k}{\omega_k^d} \cos(\omega_k^d t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Les conditions de contact

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Y}^h + \Psi(\mathbf{q}) \quad (22)$$

L'objectif est de calculer la force de contact qui vérifie à la fois ces deux conditions. La force de contact est reliée avec le déplacement par l'opérateur Ψ .

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_r - \mathbf{Y}^h = \begin{bmatrix} \int_0^{\Delta t} g(t-\tau) q(\tau) d\tau \\ \int_0^{\Delta t} g'(t-\tau) q(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (23)$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant deux points de Gauss. Les valeurs de la force de contact aux deux points de Gauss sont calculées en inversant l'opérateur Ψ .

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \Psi^{-1}(t_1, t_2) \Delta \mathbf{Y} \quad (24)$$

Cet opérateur est donné par

$$\Psi = \begin{bmatrix} g(t-t_1) & g(t-t_2) \\ g'(t-t_1) & g'(t-t_2) \end{bmatrix} \Delta t \quad (25)$$

où,

$$g(t) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{A_k}{\omega_k^d} e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k^d t) \quad (26)$$

Dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, la force de contact est la moyenne des valeurs de la force aux deux points de Gauss t_1 et t_2 qui sont définis par

$$t_1 = t + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta t}{2} ; t_2 = t + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta t}{2} \quad (27)$$

Connaissant les valeurs de la force de contact aux deux points de Gauss t_1 and t_2 , on peut calculer les paramètres $\alpha_k(t + \Delta t)$ et $\beta_k(t + \Delta t)$ par les équations de récurrence suivantes

$$\alpha_k(t + \Delta t) = \alpha_k^k(t) + \frac{e^{\xi_k \omega_k t_1} \cos(\omega_k^d t_1) q_1 + e^{\xi_k \omega_k t_2} \cos(\omega_k^d t_2) q_2}{2} \Delta t \quad (28)$$

$$\beta_k(t + \Delta t) = \beta_k^k(t) + \frac{e^{\xi_k \omega_k t_1} \sin(\omega_k^d t_1) q_1 + e^{\xi_k \omega_k t_2} \sin(\omega_k^d t_2) q_2}{2} \Delta t \quad (29)$$

4 Application

La modélisation d'un pneumatique réel avec tous les détails est très complexe. Dans la littérature, le modèle d'anneau circulaire sous fondation élastique est souvent adopté pour modéliser un pneumatique dans les basses fréquences $[0, 500 \text{ Hz}]$. Dans ce modèle la bande de roulement est modélisée par une poutre de Bernoulli, les propriétés élastiques du flanc et de la jante sont modélisées par des ressorts [9].

On suppose que la ligne de contact contient cinq points. La matrice des fonctions de Green est alors de taille 5×5 , les figures 1 et 2 montrent respectivement les déplacements et les forces de contact de ces cinq points de contact.

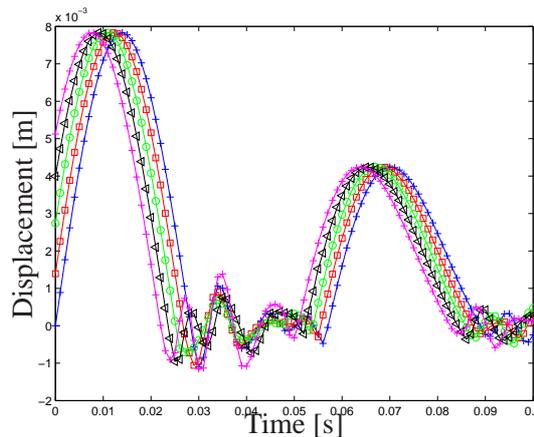


FIG. 1 – Déplacement des différents points de contact

5 Conclusion

Une nouvelle formulation de contact dynamique entre pneumatique et chaussée a été présentée. Le formalisme a deux avantages : premièrement sa rapidité en utilisant une convolution basée sur une décomposition modale. Deuxièmement, l'introduction de la condition cinématique de contact facilite le calcul des efforts de contact. La méthode a été appliquée dans le cas d'un modèle simplifié de pneumatique sur une chaussée sinusoïdale, elle peut être encore plus avantageuse en terme de temps de calcul dans le cas d'un pneumatique réel sur une chaussée réelle.

Références

- [1] K.J. Bathe and A.B. Chaudhary. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 :65–88, 1985.

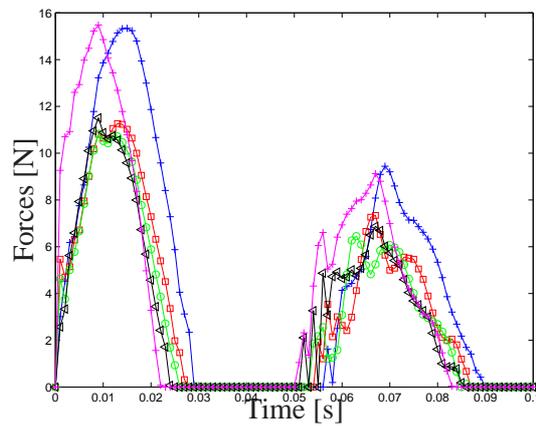


FIG. 2 – Forces de contact aux différents points de contact

- [2] Y. Kanto and G. Yakwa. A dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :755–774, 1990.
- [3] M. McIntyre, R. Schumacher, and J. Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 74 :1325–1345, 1983.
- [4] C. Wang and J. Kim. New analysis method for a thin beam impacting against a stop based on the full continuous mode. *Journal of Sound and Vibration*, 191 :809–823, 1996.
- [5] A. Nordborg. Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111 :1772–1781, 2002.
- [6] W. Kropp. A model to describe the rolling noise of a smooth radial tire on a rough road surface. PhD thesis, T. U. Berlin, 1992.
- [7] K. Larsson. *Modelling of dynamic contact-exemplified on tire/road interaction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2002.
- [8] P.B.U. Andersson and W. Kropp. Time domain contact model for tyre/road interaction including nonlinear contact stiffness due to small-scale roughness. *Journal of Sound and Vibration*, pages 296–312, 2008.
- [9] R. Meftah, D. Duhamel, J. Cesbron, F. Anfosso-Lédée, H. Yin, and P. Argoul. Efficient computation of tire/road contact forces using an ARMA model of the Green function. In *XVIIth Symposium Vibrations, Chocs and Bruit, Ecole Centrale de Lyon*, 2010.