

# Transport et accumulation de particules inertielles dans une fracture de rugosité périodique

T. Nizkaya<sup>a</sup>, J.-R. Angilella<sup>a</sup>, M. Bués<sup>a</sup>

a. Nancy-Université, LAEGO, Ecole Nationale Supérieure de Géologie, rue du Doyen Roubault, 54501 Vandœuvre-les-Nancy, France

## Résumé :

*Nous étudions asymptotiquement le transport de particules inertielles, non-browniennes et à faible nombre de Stokes, dans une fracture plane à parois lisses de rugosité périodique. Nous montrons que dans le cas général les particules s'accumulent sur un attracteur voisin d'une ligne de courant dont l'équation peut être déterminée analytiquement par la méthode de Sapsis et Haller (2010). Cet attracteur persiste en présence d'un champ de gravité transverse, de sorte que les particules peuvent être transportées sur de longues distances sans être déposées sur les parois.*

## Abstract :

*Using asymptotic methods we study the transport of non-brownian weakly inertial particles in a thin fracture with periodic walls. We show that in general case heavy particles tend to cluster on an attracting trajectory close to a fluid streamline. The equation of this streamline can be found analytically using the method of Sapsis et Haller (2010). The attractor persists in the presence of weak transversal gravity, so that particles can travel long distances without being deposited on the walls.*

**Mots clefs :** particules inertielles, écoulement périodique, accumulation

## 1 Introduction

Le transport d'inclusions solides dans les écoulements confinés est un sujet important pour les applications industrielles ou les géosciences. Même si le mouvement brownien des inclusions n'est pas pris en compte, leur comportement diffère de celui des particules fluides. Notamment les forces d'inertie les font diverger des trajectoires des particules fluides et les font s'accumuler dans des zones spécifiques. Dans les écoulements périodiques les particules lourdes ont tendance à s'accumuler à long terme sur une trajectoire commune (c.f. Maxey & Corrsin [1], Maxey [2] pour les écoulements cellulaires, Fernandez de la Mora [4], Vainshtein [7] pour les écoulements périodiques potentiels, etc.). Cet effet est utilisé pour créer des faisceaux confinés d'aérosols (aerodynamic lensing) par un ou plusieurs cycles d'accélération/décélération (cf. Dahneke [5], Fernandez de la Mora [6] etc.). Une autre application possible se trouve en microfluidique, où cet effet est utilisé pour extraire les inclusions du liquide (Dino Di Carlo *et. al.* [8]). Dans ce cas les masses volumiques du fluide et des inclusions sont proches et l'accumulation est attribuée à la force de portance (lift force).

Dans le contexte du transport de contaminants dans les fractures géologiques, l'effet d'accumulation est assez peu étudié. Pourtant, il peut influencer fortement les caractéristiques de transport des particules, comme la distance de sédimentation, la vitesse moyenne, etc. Le but de ce travail est d'analyser cet effet dans une fracture à rugosité périodique à partir d'un modèle asymptotique.

Nous utilisons un modèle simplifié afin d'obtenir quelques résultats analytiques. Les hypothèses suivantes sont appliquées :

- L'ouverture de la fracture  $H$  est beaucoup plus petite que la période d'ondulation des parois  $L$ , donc  $\varepsilon = H/L \ll 1$  est un petit paramètre.

- L'écoulement monophasique dans la fracture est dominé par les forces visqueuses, et peut être décrit par l'équation de Stokes.
- Les particules sont non-browniennes, isolées, beaucoup plus petites que l'ouverture de la fracture et de faible inertie : le temps de réponse adimensionnel  $\tau$  est petit (il est défini dans le paragraphe suivant).
- Nous ne prenons pas en compte les interactions possibles entre les particules et les parois, ni leur influence sur l'écoulement. Les particules déposées sur une paroi restent "piégées".

Pour étudier l'effet d'accumulation, nous utilisons un critère proposé récemment par Sapsis et Haller [10],[11]. Il est basé sur l'analyse asymptotique des équations du mouvement pour  $\tau \ll 1$  et permet de trouver une ligne de courant  $\tau$ -proche d'un cycle limite (trajectoire attractive) des particules. Le champ de vitesse de l'écoulement de Stokes peut être trouvé sous la forme d'un développement asymptotique par rapport à  $\varepsilon$  (Kitanidis et Dykaar [9]). En appliquant le critère de Sapsis et Haller au premier terme de ce développement nous obtenons une équation explicite pour la position de l'attracteur. Cela nous permet de trouver les conditions d'accumulation en fonction de la géométrie de la fracture et de la gravité. Ces prédictions analytiques sont confirmées par des simulations numériques pour les  $\tau$  petits. Pour les  $\tau$  plus grands, la trajectoire attractive devient instable et les particules s'accumulent sur un autre attracteur qui se trouve assez loin de celui de départ. Cela peut conduire à un effet de tri des particules par rapport à leur taille.

## 2 Équations du mouvement et critère d'accumulation

Considérons une fracture bidimensionnelle à parois ondulées périodiques, dont l'ouverture  $H$  est beaucoup plus petite que la période d'ondulation  $L$  :  $\varepsilon = H/L \ll 1$ . Il existe une solution asymptotique des équations de Stokes stationnaires due à Kitanidis et Dykaar [9] :

$$\Psi(x, \eta) = \Psi_0(x, \eta) + \Psi_2(x, \eta)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

où

$$\Psi_0(x, \eta) = \frac{q_0}{4}(\eta^3 - 3\eta), \quad (1)$$

est la loi cubique locale (LCL) et  $\Psi_2(x, \eta)$  est une correction. Ici  $\eta$  est une variable auxiliaire :  $\eta(x, z) = \frac{z/\varepsilon - \phi(x)}{h(x)}$  avec  $\phi(x) = \frac{1}{2\varepsilon}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$ ,  $h(x) = \frac{1}{2\varepsilon}(\phi_2(x) - \phi_1(x))$ ,  $q_0 = \varepsilon$ . Les fonctions  $\phi_{1,2}(x)$  décrivent les parois de la fracture, d'équation  $z = \phi_i(x)$ .

Le champ de vitesse  $\vec{u}_f = (u, v)$  est :

$$u(x, z) = -\frac{\partial \Psi(x, \eta(x, z))}{\partial z}, \quad v(x, z) = \frac{\partial \Psi(x, \eta(x, z))}{\partial x}.$$

Les variables  $x$  et  $z$  sont adimensionnées par  $L$ , et la vitesse  $\vec{u}_f$  par  $U_0 = Q_0/H$ , où  $Q_0$  est le flux du fluide à travers de la fracture.

Le mouvement des particules est décrit par l'équation de Maxey et Riley [3] simplifiée :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{1}{\tau}(\vec{v}_p - \vec{u}_f) + \frac{3R}{2} \frac{D\vec{u}_f}{Dt} + \left(1 - \frac{3R}{2}\right) \vec{e}_g / \text{Fr}, \\ \frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{v}_p(\vec{x}_p). \end{cases} \quad (2)$$

où  $\vec{e}_g$  est la direction de la gravité,  $D\vec{u}_f/Dt = (\bar{\nabla} u_f)\vec{u}_f + \partial\vec{u}_f/\partial t$  est la dérivée particulaire de la vitesse du fluide,  $R = 2\rho_f/(2\rho_p + \rho_f)$  est le contraste entre la masse volumique des particules et celle du fluide. L'équation du mouvement a été adimensionnée par  $U_0, L$ . Le temps de réponse  $\tau = \text{St}/R$  est lié au nombre de Stokes de la particule  $\text{St} = \frac{2}{9} \left(\frac{a}{L}\right)^2 \text{Re}$ , où  $a$  est le rayon d'une particule,  $\text{Re} = U_0 L / \nu$  est le nombre de Reynolds de l'écoulement. Le nombre de Froude  $\text{Fr} = U_0^2/gL$  est le rapport entre les forces d'inertie du fluide et la force de gravité ( $g$  est l'accélération de la pesanteur). Le contraste des

densités  $R$  varie de  $R = 0$  (aérosols) à  $R = 2$  (bulles),  $R = 2/3$  correspond aux particules neutres. Nous supposons que  $\tau$  reste petit même si  $R \rightarrow 0$ .

Pour les  $\tau$  suffisamment petits les solutions de l'équation (2) convergent rapidement vers les solutions d'une équation asymptotique :

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{V}_p(\vec{x}_p),$$

où  $\vec{V}_p(\vec{x}) = \vec{u}_f(\vec{x}) + \tau(3R/2 - 1)((\nabla\vec{u}_f)\vec{u}_f - \vec{e}_g/\text{Fr})$  peut être considéré comme "le champ des vitesses des particules". Contrairement à  $\vec{u}_f(x)$ , la divergence de  $\vec{V}_p(x)$  n'est pas égale à zéro : le flux des particules est compressible. Elles peuvent donc s'accumuler sur des trajectoires fermées (cycles limites) où autour de points d'équilibre. Une condition nécessaire proposée par Haller et Sapsis [10][11] permet de détecter l'existence d'un cycle limite  $\tau$ -proche d'une ligne de courant  $S$  du fluide :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_S \vec{V}_p \cdot \vec{n} ds = 0, \\ I_1 &= \int_S \frac{\partial}{\partial n} (\vec{V}_p \cdot \vec{n}) ds < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la ligne de courant. La première condition dit que le flux total de particules à travers la ligne de courant  $S$  est égal à zéro. La seconde provient du fait que la trajectoire est attractive.

### 3 Application du critère à l'écoulement LCL et résultats numériques

Pour l'écoulement LCL,  $\Psi(x, \eta) = \Psi(\eta)$  et donc sur une ligne de courant  $\eta = \eta_0 = \text{const}$ . La première intégrale de (3) peut être calculée analytiquement ( $\vec{e}_g = -\vec{e}_z$ ,  $G = 1/\text{Fr} > 0$ ) :

$$I_0(\eta_0, G) = \tau \left( \frac{3R}{2} - 1 \right) \left( \frac{9}{16\varepsilon} (\eta_0^2 - 1)^2 (\eta_0 I_h + I_\phi) + G \right). \quad (4)$$

où  $I_\phi = \int_0^1 \phi''/h^2 dx$  et  $I_h = \int_0^1 h''/h^2 dx$ .

#### Absence de gravité :

Sans gravité ( $G = 1/\text{Fr} = 0$ ) l'équation  $I_0(\eta_0, 0) = 0$  a deux racines multiples  $\eta = \pm 1$  et une racine simple :

$$\eta_* = -\frac{I_\phi}{I_h}, \quad I_h \neq 0. \quad (5)$$

Pour les parois parallèles, nous avons  $I_h = 0$  et  $I_\phi = 0$ , donc  $I_0(\eta_0, 0) \equiv 0$  et dans ce modèle les particules ne s'accumulent pas (néanmoins, si on prend en compte la correction  $\Psi_2$  les particules s'accumulent, mais très lentement, avec un taux  $\sim \tau\varepsilon$ ). Si une des parois est plate ( $I_h = \pm I_\phi$ )  $\eta_* = \mp 1$ , alors les particules lourdes vont vers cette paroi plate et les particules légères vers la paroi ondulée. Dans le cas général  $-1 < \eta_* < 1$ , l'attracteur est  $\tau$ -proche d'une ligne de courant à l'intérieur de la fracture. On peut démontrer que, dans ce cas,  $I_1(\eta_*)$  est toujours négatif pour  $R < 2/3$  et positif pour  $R > 2/3$  : les particules lourdes s'accumulent sur cette trajectoire et les particules légères en sont expulsées.

#### Gravité faible :

Pour une gravité assez faible ( $G < G_{cr}$ ) l'équation (4) a deux racines  $-1 < \eta_{inf}^* < \eta_{sup}^* < 1$  mais le signe de  $I_1$  y est différent. Pour les particules lourdes  $\eta = \eta_{sup}$  correspond à l'attracteur et  $\eta = \eta_{inf}$  définit son bassin d'attraction (toutes les particules dont les positions initiales sont telles que  $\eta_0 < \eta_{inf}$  vont sédimenter). Pour les particules légères, la situation est inversée.

#### Gravité forte :

Pour une gravité plus forte ( $G > G_{cr}$ ),  $I_0(\eta, G)$  n'a plus de racines sur l'intervalle  $(-1, 1)$ , toutes les

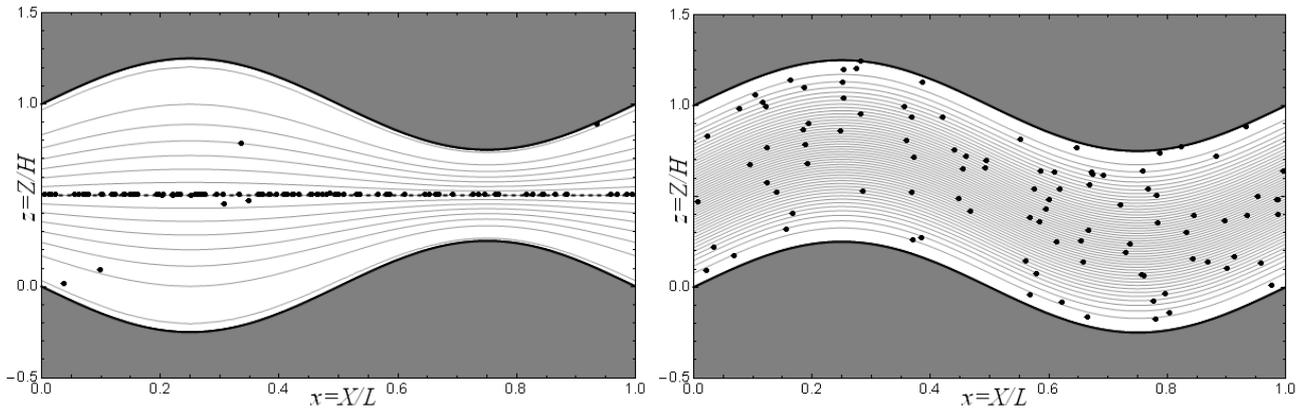


FIGURE 1 – Nuage des particules à  $t = 100$  pour la fracture à symétrie miroir (à gauche) et à parois parallèles (à droite).

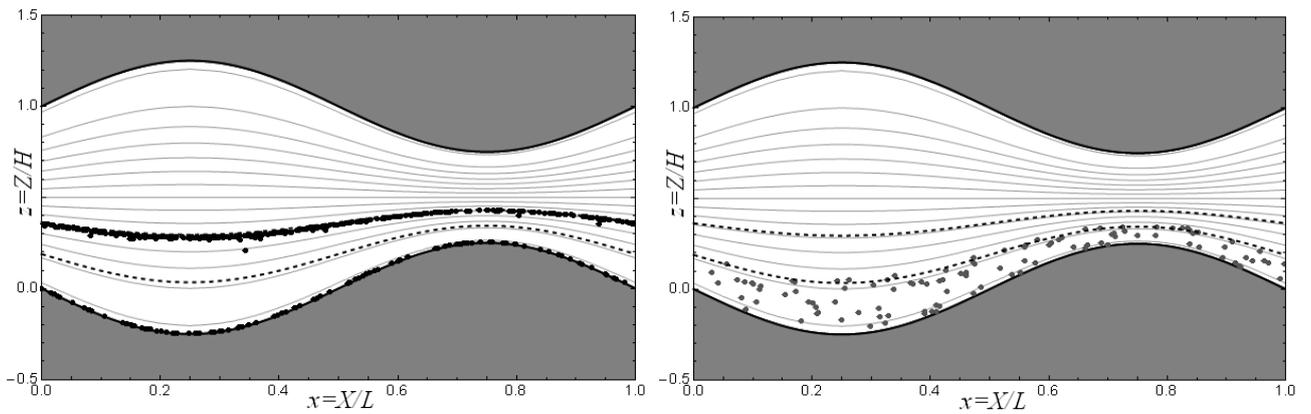


FIGURE 2 – Nuage des particules à  $t = 100$  (à gauche) et positions initiales des particules qui vont sédimenter (à droite). Les lignes pointillées correspondent à  $\eta_{inf}$  et  $\eta_{sup}$ .

particules vont sédimenter. La valeur critique  $G_{cr}$  peut être trouvée à partir des conditions suivantes :

$$\begin{cases} I_0(\eta; G) = 0, \\ \frac{\partial I_0}{\partial \eta}(\eta; G) = 0. \end{cases}$$

La solution est la suivante :

$$\eta_{cr} = \frac{-2I_\phi - \sqrt{5I_h^2 + 4I_\phi^2}}{5I_h},$$

$$G_{cr} = \frac{9}{16\varepsilon}(\eta_{cr}^2 - 1)^2(\eta_{cr}I_h + I_\phi).$$

On peut démontrer que la valeur maximale de  $G_{cr}$  est atteinte dans une fracture avec paroi supérieure plate ( $I_\phi = -I_h$ ).

Les résultats des simulations numériques sont présentés sur les Fig. 1 et 2. La dynamique des particules a été modélisée avec l'équation (2) et l'écoulement avec la solution asymptotique de Stokes (la correction  $\Psi_2$  a été prise en compte). Pour faciliter la visualisation, les graphiques sont en variables réduites ( $X/L$ ,  $Z/H$ ). Les paramètres utilisés sont :  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\tau = 0.01$ ,  $R = 2/5$ . Les résultats sont en bonne concordance avec les prédictions analytiques.

## 4 Conclusions

L'analyse asymptotique a montré que, pour toutes les géométries, les particules lourdes ( $\rho_p > \rho_f$ ) de faible inertie ( $\tau \rightarrow 0$ ) s'accumulent sur une trajectoire périodique à l'intérieur de la fracture. Les particules légères ( $\rho_p < \rho_f$ ) se rapprochent des parois. Une seule exception concerne la fracture avec une des parois plate où les particules lourdes sont attirées par cette paroi, alors que les particules légères sont attirées par la paroi ondulée. L'accumulation la plus efficace est observée dans la fracture à symétrie miroir, et la plus faible dans la fracture à parois parallèles (le taux d'attraction dans ce cas est  $O(\tau\varepsilon)$ ). Ce dernier résultat est différent du cas d'un écoulement potentiel [4].

En présence de gravité, l'effet d'accumulation peut encore exister. Si le nombre de Froude dépasse une valeur critique  $Fr_{cr} = 1/G_{cr}$ , les forces d'inertie peuvent équilibrer la force de gravité sur la trajectoire attractive, permettant le transport des particules sur de longues distances. Le nombre de Froude critique, pour lequel cette trajectoire cesse d'exister, a été trouvé analytiquement. On observe que c'est la fracture avec paroi supérieure plate qui correspond au  $Fr_{cr}$  le plus faible.

Toutefois, pour les valeurs de  $\tau$  plus élevées ces prédictions ne sont plus valables, car la trajectoire attractive devient instable. En effet, l'étude numérique effectuée pour la fracture à symétrie miroir fait entrevoir une bifurcation de type fourche (pour  $\tau = \tau_{cr} \approx 0.13$ ) suivie d'une bifurcation apparemment sous-harmonique (Fig. 3, à gauche). Cela implique l'existence de plusieurs trajectoires attractives, chacune avec son propre bassin d'attraction. Les trajectoires attractives pour les particules sous-critiques ( $\tau < \tau_{cr}$ ) et super-critiques ( $\tau > \tau_{cr}$ ) sont bien séparées dans l'espace, et donc ces particules peuvent être triées par les forces hydrodynamiques (Fig. 3, à droite).

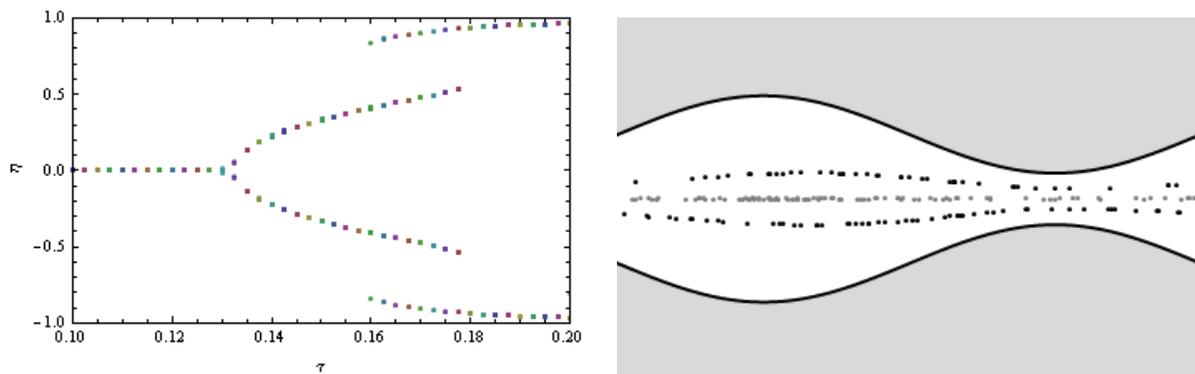


FIGURE 3 – Diagramme de bifurcation pour  $R = 2/7$  (à gauche). Simulation numérique de la séparation des particules sous-critiques (grises,  $\tau = 0.1$ ) et super-critiques (noires,  $\tau = 0.14$ ). Le nuage correspond au temps  $t = 100$ .

## Références

- [1] Maxey, M. R., S. Corrsin (1986). Gravitational Settling of Aerosol Particles in Randomly Oriented Cellular Flow Fields. *J. Atmos. Sci.*, 43, 1112-1134.
- [2] M.R. Maxey, 1987. The motion of small spherical particles in a cellular flow field, *Phys. Fluids* 30, 1915-1928.
- [3] M.R. Maxey and J.J. Riley (1983). Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow, *Phys. Fluids* 26, 883-889.
- [4] Fernández de la Mora, J.(2006). Aerodynamic focusing in spatially periodic flows :Two-dimensional symmetric and antisymmetric channels. *Journal of Aerosol Science*, 37, 323-339.
- [5] Dahneke, B. (1978). Aerosol beams. in : D.T. Shaw (Ed.), *Fundamentals of Aerosol Science* NewYork :Wiley.

- [6] Fernández de la Mora (1996). Drastic improvements on the resolution of aerosol size spectrometers via aerodynamic focusing : the case of variable-pressure impactors,” J. Chemical Engineering Communications, 151, 101-124.
- [7] Vainshtein, P., Shapiro, M. (2008). Aerodynamic focusing in a channel with oscillating walls. *Journal of Aerosol Science*, 39, 929-939.
- [8] Dino Di Carlo, Daniel Irimia, Ronald G. Tompkins, and Mehmet Toner (2007). Continuous inertial focusing, ordering, and separation of particles in microchannels, PNAS, vol. 104, no. 48
- [9] P. K. Kitanidis, B.B. Dykaar (1997). Stokes Flow in a Slowly Varying Two-Dimensional Periodic Pore, *Transport in Porous Media*, 26 : 89-98.
- [10] G. Haller & T. Sapsis (2008). Where do inertial particles go in fluid flows ? *Physica D*, 237 573-583.
- [11] T. Sapsis & G. Haller (2010). Clustering Criterion for Inertial Particles in 2D Time-Periodic and 3D Steady Flows, *Chaos*, 20 017515.