

Modélisation et analyse de variations paramétriques d'un système mécatronique par l'inclusion différentielle

M. ZERELLI^a, T. SORIANO^a, H J. HADJ-AMOR^b

a. Laboratoire d'Ingénierie, des Systèmes mécaniques et des Matériaux (LISMMA), Supmeca, Maison des technologies, Place G.Pompidou 83000 Toulon

b. Institut Français du Pétrole (IFP) Energies nouvelles, 1 avenue Bois-Préau 92852 Rueil-Malmaison Cedex- France

Résumé :

Un système mécatronique est la combinaison de plusieurs composants de différents domaines. Dans cet article on présente une approche d'étude du fonctionnement d'un système dynamique dont certains paramètres présentent une incertitude. On propose un algorithme de résolution du tolérancement mécatronique qui se base sur les inclusions différentielles pour déterminer le domaine atteignable.

Abstract :

Mechatronic system is the combination of several components from different domains. This paper presents an approach to study the behavior of a mechatronic system when there is a variation of the parameters in intervals. We propose an algorithm using the differential inclusions solver and the modified steepest descent algorithm to solve the problem and to have an appropriate shape of the reachable set.

Mots clefs : mécatronique, variation paramétrique, tolérancement, inclusions différentielles

Introduction

La mécatronique est l'intégration de différentes technologies à savoir la mécanique, l'informatique, l'électronique et l'automatique. Les produits mécatroniques proviennent de la fusion et non de la simple juxtaposition des technologies et sont donc complexes. En modélisant le système mécatronique par des équations différentielles on ne tient pas compte des incertitudes que peuvent avoir certains paramètres. En effet, les composants des systèmes mécatroniques (moteur, vérin, ...) peuvent avoir une variation ce qui se traduit sur les paramètres correspondants par une variation dans un intervalle. On choisit d'aborder ce problème en utilisant les inclusions différentielles (noté ID). Dans nos travaux on a commencé par une définition des variations paramétriques. Par la suite, pour résoudre le problème des inclusions différentielles on doit passer par des sous problèmes à savoir la commande optimale qui est un cas particulier des inclusions différentielles et les algorithmes d'optimisations qui font partie d'algorithme du solveur des ID.

1 Variations paramétriques

Le comportement dynamique d'un système mécatronique dépend des valeurs des paramètres de ses composants. On se place ici dans le cadre d'une modélisation par un système d'équations différentielles.

En effet, quelle soit petite ou grande, une variation de l'un des composants peut affecter considérablement le fonctionnement global du système. Car si un paramètre de la partie physique du système est variable alors le coefficient de l'équation différentielle correspondant varie dans un intervalle.

Si cette variation paramétrique est importante alors dans ce cas on parle de dimensionnement fonctionnel, si au contraire elle est infinitésimale (relative selon le composant) alors en ce moment on fait face à un problème de tolérancement.

Dans le cadre du dimensionnement fonctionnel, on dispose de la topologie du système et notre objectif est de régler les paramètres autour d'une valeur nominale pour assurer un certain fonctionnement satisfaisant les contraintes. On prend comme exemple le cas de la robotique, l'inertie d'un bras motorisée d'un robot varie suivant son articulation, si le bras est déplié alors l'inertie est élevée s'il est replié alors l'inertie est faible.

Dans le cadre du tolérancement, un ou des paramètres du modèle du système présentent une incertitude. La valeur réelle de ce paramètre appartient à un intervalle. Cet intervalle est la conséquence d'un choix de production ou de conception. Par définition, le tolérancement mécatronique est la combinaison de différents types de tolérancement (par exemple dans un système il existe un tolérancement d'un paramètre électrique et d'un autre mécanique etc...) dont l'analyse et la résolution se sont avérées très compliquées.

Dans les travaux de [11] on trouve une application d'analyse du pire des scénarios que peuvent avoir des circuits électroniques qui utilisent des « polytopes » dans le paramètre d'espace. Ce travail utilise le fait que si la sensibilité réponse-paramètre est monotone alors la limite de la réponse correspond à la valeur extrême du paramètre. Dans les travaux de [9] et [10] il y a aussi une contribution pour les problèmes du tolérancement dans le domaine mécanique.

Une des méthodes communes pour résoudre le problème de variation paramétrique est de traiter ce manque d'information exacte en supposant que quelques paramètres de systèmes sont aléatoires, ce qui mène à un modèle stochastique avec différentes réalisations des trajectoires de systèmes. La difficulté est de déterminer la fonction de densité de probabilité. Cette analyse stochastique est intéressante mais elle n'est pas toujours fiable. Certains paramètres du modèle ont des valeurs incertaines et l'utilisateur n'a aucune idée sur leur comportement probabiliste. Même en ayant l'intervalle de variation du paramètre on n'a aucune information sur sa distribution dans cet intervalle et par conséquent le traitement de problème par la méthode du « Monte Carlo » ou la simulation stochastique ne donne pas de résultat correct. Dans notre cas d'étude on privilégie les méthodes déterministes aux probabilistes, pour cela on fait appel à la méthode des inclusions différentielles pour résoudre ce problème.

2 Les Inclusions Différentielles et la Commande Optimale

2.1 La commande optimale

Dans le cas de commande optimale on calcule la loi de commande qui minimise un certain critère, on calcule la trajectoire optimale du système correspondante à la commande optimale en utilisant le principe de maximum de Pontryagin pour la maximisation de l'hamiltonien et les conditions de transversalité pour résoudre le problème aux deux limites [2].

Un système de commande optimale est défini par l'équation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x(t), u(t)) \quad (1)$$

Avec x le vecteur d'état et u la commande.

L'hamiltonien H est défini et le vecteur adjoint p sont définis respectivement par (2) et (3) :

$$H(x, u, p, t) = \sum_{j=1}^n p_j f_j + f_0 \quad (2)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial}{\partial x} H(x, u, p, t) \quad (3)$$

Avec f l'équation du système, f_0 le critère et p le vecteur adjoint.

2.1 Les inclusions différentielles

Le fonctionnement d'un système mécatronique dépend du comportement de ses composants. Mais l'erreur commune est que tout système continu peut être modélisé par des équations différentielles. En effet, une variation infinitésimale de l'un des composants peut affecter considérablement le fonctionnement global du système. Car si un paramètre de la partie physique du système présente une incertitude alors le coefficient de l'équation différentielle correspondant varie aussi dans un intervalle. L'outil mathématique le plus approprié pour modéliser ce type de systèmes est l'inclusion différentielle.

Les inclusions différentielles représentent une généralisation des équations différentielles avec des paramètres variables. La solution donnée par les inclusions différentielles est le « domaine atteignable » au lieu d'une seule trajectoire. Ce concept est très connu dans le domaine de la commande mais pas encore exploité dans la modélisation et la simulation [6]. Dans les travaux de Raczynski [8] on trouve une

comparaison entre l'approche stochastique de « Monte Carlo » et la méthode des inclusions différentielles (ID) avec un exemple qui montre que le domaine atteignable trouvé par la méthode des ID est plus précis que celui trouvé par l'approche de « Monte Carlo » qui se présente comme un ensemble de points qui ne représente que 2-5% du diamètre de la solution réelle. On pourra également trouver une application dans la variation des systèmes dynamique dans [7].

On pourrait penser que le domaine atteignable solution par la méthode de ID pourrait être obtenu par simple extension de l'algorithme de résolution des équations différentielles, mais ce n'est pas le cas.

En effet, la solution des ID est un domaine dans l'espace temps-état. Il s'agit d'un ensemble qui inclut toutes les trajectoires possibles du système. Cependant, trouver les limites de ce domaine atteignable n'est pas évident.

La forme générale de l'ID est comme suit :

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x(t)), \quad x(0) \in X_0 \quad (4)$$

Avec $x \in R^n$ et F une application de $R \times R^n$ dans des parties de R^n et X_0 est l'ensemble initial.

$$F(t, x(t)) = \{ z = f(t, x, v) \mid v \in C(t, x) \}$$

v est une variable appartenant à un domaine de variation C . Cette variable peut être soit une commande soit un paramètre du système d'état.

Raczynski a utilisé ce concept comme outil de simulation avec v correspond à une commande variable du système. Dans ce cas de figure le domaine de variation C devient le domaine de variation de commande. Cette notion est connue dans le domaine de la commande et plus précisément dans le domaine de la commande optimale.

Dans [6] Raczynski développe un algorithme pour le solveur des inclusions différentielles défini comme suit :

0. Initialiser la fonction de distribution de la variable v égale à la fonction de densité uniforme ce qui correspond à démarrer avec un pas d'incrément uniformes pour v , et initialiser $x=x_0$.
1. Générer le vecteur adjoint initial P avec des conditions initiales $p(t_0)$ choisies arbitrairement .
2. Intégrer l'équation dynamique du système et l'équation de l'Hamiltonien avec une commande qui le maximise à chaque pas d'intégration en utilisant un algorithme d'optimisation.
3. Sélectionner les régions de densité minimale de points. cela peut être obtenu en détectant les zones de concentration faible de trajectoires dans le domaine atteignable ou sur sa projection 2D.
4. Modifier la fonction de distribution en augmentant la probabilité de distribution au voisinage des zones (points) de densité maximale et en raffinant la recherche de trajectoires dans les zones de concentration faible.
5. S'il y a assez de trajectoire enregistrée « Arrêt », sinon aller à l'étape 1.

Cet algorithme représente un outil déterministe de modélisation et de simulation d'incertitude. Cet outil est basé sur des concepts de commande optimale qui illustre l'ensemble accessible comme l'ensemble d'extrémités de solution à un instant t en faisant varier la commande [2].

Dans notre cas d'étude on va se baser sur cet algorithme pour traiter un problème de variation paramétrique qui concerne des éléments du vecteur d'état, cette variation correspond dans la réalité à une incertitude des composants physiques représentée par une variation du coefficient de l'équation différentielle correspondant. Dans la résolution du problème de commande optimale on a besoin des équations supplémentaire pour déterminer le vecteur adjoint p , appelées conditions de transversalité. Mais pour l'ID on n'a pas besoin de ces équations pour résoudre le problème aux limites. Il suffit de choisir les conditions initiales arbitrairement. En effet cet algorithme fournit, après la première itération, un point sur le domaine atteignable ce qui résout le problème de valeur finale. Donc quelque soit la condition initiale, on résout le problème puisque notre objectif est de trouver les trajectoires qui sont incluses le domaine atteignable.

Cet algorithme nécessite le recours à une méthode d'optimisation pour la maximisation de l'hamiltonien comme la méthode de la plus grande pente « steepest descent » ou la méthode du gradient conjugué.

3 L'algorithme du « Steepest Descent » appliqué aux Inclusions différentielles.

3.1 Définition

Plusieurs recherches ont été conduites sur la méthode du « steepest descent » pour profiter de ses avantages et limiter ses inconvénients. Parmi ces recherches on cite les travaux de Jaben et Dhunia [3] que nous avons repris et développés pour obtenir notre propre algorithme.

On choisit un premier point de départ, on fait les itérations jusqu'à trouver le premier optimum local. Par la suite, on prend la valeur de variable correspondante et on l'utilise comme un nouveau point de départ pour une nouvelle itération de l'algorithme. A la fin, on trouve qu'on a parcouru tout l'intervalle de variation. On compare les valeurs d'optimums locales pour trouver l'optimal global.

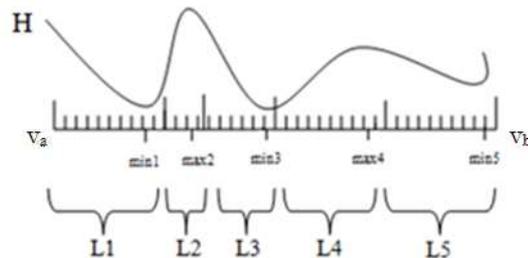


FIG. 1 – Exemple de l'Hamiltonien H, ses optimum et les boucles L_i correspondantes.

3.2 L'algorithme du « Steepest Descent » personnalisé

On fait un algorithme du « steepest descent » pour la maximisation de l'hamiltonien par rapport à la commande. Dans ce qui suit :

la variable v varie dans l'intervalle $[v_a, v_b]$

λ_1 le premier pas d'incrémentation fixé à l'avance telle que $\lambda_1 < \frac{v_b - v_a}{10}$

β Coefficient de multiplication fixé pour que le pas λ_i ne sorte pas de l'intervalle de variation.

Initialiser $v_{f,1} = v_a$

$m=1$

Tant que ($v \geq v_a$ et $v \leq v_b$)

$k=1$

On calcule $x_{1,m} = x(v_{1,m})$

On calcule $v_{2,m} = v_{1,m} + \lambda_1 \nabla H(v_{1,m})$

On calcule $x_{2,m} = x(v_{2,m})$

Tant que $\|H(v_{k+1,m}) - H(v_{k,m})\| > \xi$

On calcule $\lambda_{k,m} = \beta \frac{1}{\|x_{k+1,m} - x_{k,m}\|}$

On calcule $v_{k+1,m} = v_{k,m} + \lambda_{k,m} \nabla H(v_{k,m})$

$k=k+1$

Fin Tant que

Si l'optimum est un minimum alors « steepest Ascent »

Sinon « steepest Descent ».

$v_{f,m} = v_{k+1,m}$

$m=m+1$

$x_{k+1,m} - x_{k,m}$ est la distance entre deux trajectoires voisines au même instant t .

4 Exemple d'application

4.1 Définition

Pour mettre en œuvre notre approche et simuler les résultats obtenus on a choisi un système mécatronique simple qui est un système de guidage à vis à billes. Ce dernier est contrôlé par une commande. Le moteur DC est alimenté par une tension constante u [4].

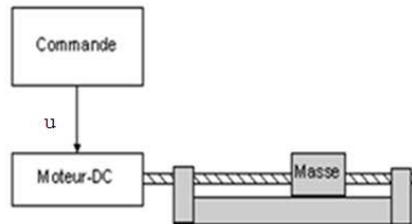


FIG.2 Système de guidage

Les équations dynamiques du système sont :

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{-b}{J + mp^2} \dot{\theta} + \frac{k}{J + mp^2} i \quad (5)$$

$$L \frac{di}{dt} = -K \dot{\theta} - Ri + u$$

Dans ce système la résistance « R » présente une incertitude et varie dans un intervalle $[R_a, R_b]$. Alors dans l'algorithme, la variable de variation v est remplacé par R , le problème se met sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} \in F(t, x(t)) \quad \text{et} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ i(t_0) \end{bmatrix} \quad (6)$$

L'application F sera de $R \times R^2$ à parties dans R^2

$$F = \left\{ z = f(t, x(t), R) \mid R \in [R_a, R_b] \right\}$$

$$\text{L'hamiltonien } H \text{ est défini par : } H = \left(\frac{-b}{J + mp^2} \dot{\theta} + \frac{k}{J + mp^2} i \right) + p_2 \frac{1}{L} (-K \dot{\theta} - Ri + V) \quad (7)$$

Le paramètre de variation R sera traité comme une commande, on met l'hypothèse qu'il est continu mais on ne connaît pas sa distribution dans son intervalle de variation, par conséquent on maximise l'hamiltonien par rapport à R .

4.2 Résultats sous Mathematica et interprétations

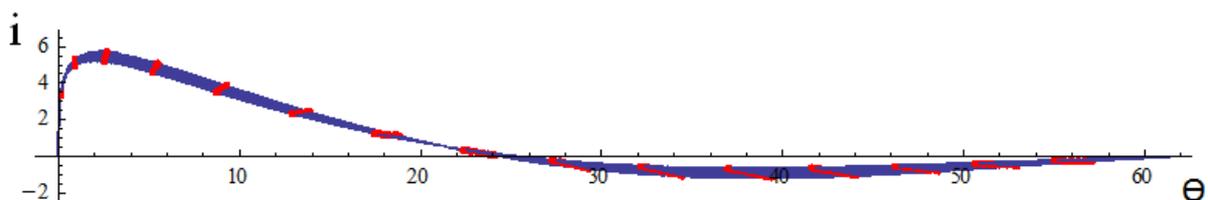


FIG.3 le domaine atteignable en variant « R »

Dans cet exemple on montre l'influence de variation des paramètres sur le fonctionnement global du système. Dans la figure 3, on fait varier la résistance « R » de 10% on aperçoit d'un domaine atteignable assez étroit. La variation de la résistance n'a pas un effet considérable sur le fonctionnement surtout au

démarrage du système ou on trouve que toutes les courbes sont confondues. Le fonctionnement du système est monotone par rapport à R ce qui explique le résultat trouvé. Mais, on peut noter que cette méthode se montrera plus intéressante avec des systèmes non monotones et sensibles à la variation de certains paramètres.

Conclusion

Dans cet article on a traité le problème de variation des paramètres qui selon cette variation et les données du système peut se situer dans le cadre de dimensionnement fonctionnelle ou tolérancement mécatronique.

Nous présentons la méthode des inclusions différentielles comme outil déterministe de résolution et de simulation des résultats. L'algorithme de résolution des ID présenté ci dessus nécessite des connaissances des algorithmes d'optimisation pour pouvoir l'appliquer. Pour cela on a développé notre propre algorithme de « steepest Descent modifié » qui utilise un pas de variation qui satisfait les critères des ID pour atteindre le domaine atteignable qui inclut toutes les trajectoires possible avec une faible marge d'erreur.

Pour mettre en valeur notre méthode on l'a implémentée sous Mathematica et on l'a appliquée sur un exemple simple.

Etant donnée que cette méthode est applicable sur des modèles non linéaires et multivariables, on projette d'étendre notre exemple d'application à des exemples multivariables dont $n > 2$ ou on essaie de tracer le gabarie de comportement du système sur des plans de projection de l'espace d'état.

En perspective, on va s'intéresser au dimensionnement fonctionnel qui se situe dans le domaine d'étude de variation paramétrique, mais avec un intervalle de variation plus grand. Son impact sur le comportement et le fonctionnement du système dépend essentiellement des propriétés et de la sensibilité de se dernier. En effet, l'objectif dans ce cas est de déterminer le gabarit de fonctionnement en satisfaisant les contraintes.

On prévoit aussi, de comparer les résultats obtenus par cette méthode temporelle avec d'autres outils d'analyse fréquentielle comme la méthode de placement des pôles pour déterminer le domaine de stabilité du système et sa marge de robustesse.

References

- [1] Aublin M., Boncompain R., Boulaton M., Caron D., 1992. Systèmes mécaniques, théorie et dimensionnement. Dunod. Paris
- [2] E. Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications. Collection Mathématiques Concrètes. Vuibert, 2005
- [3] Jabeen S.D, Bhunia A.K , 2010, 'Population based steepest descent method' AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 12, Number 2.
- [4] Hadj-Amor. HJ 2008, Contribution au prototypage virtuel de systèmes mécatroniques basé sur une architecture distribuée HLA. Expérimentation sous les environnements OpenModelica-OpenMASK Toulon : Supmeca, LISMM (EA 2336) thèse.
- [5] Juan C.Meza, 2010 'steepest descent', Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 10.1002/wics.117. <http://dx.doi.org/10.1002/wics.117>
- [6] Raczynski S., 2006. Modeling and simulation: The Computer Science of Illusion, Wiley, England, p115-116.
- [7] Raczynski, S. (2004) 'Continuous simulation, differential inclusions, uncertainty, and traveling in time', Simulation, Vol. 80, No. 2, pp.87-100
- [8] Raczynski S., (2007), Determination of attainable regions in ship maneuvers : an application of differential inclusions to the modeling of ship dynamics. Journal of Marine Science and Technology.
- [9] Rüdiger H, Harald M, Willy S., 1998. An approach to a general view on tolerances in mechanical engineering. 2nd International Workshop on Integrated Product Development IPD 98. Magdeburg. 65 - 76.
- [10] Söderberg R., Wickman C. and Lindkvist L., 2008. Improving Decision Making by Simulating and Visualizing Geometrical Variation in Non-rigid Assemblies. CIRP Annals – Manufacturing Technology.
- [11] Tian M.F., Shi R., 2000. Worst case tolerance analysis of linear Analog Circuits using sensitivity bands IEEE transactions on circuits and systems vol47, N°8