

# Etude numérique du transfert de chaleur pour un fluide de Bingham dans une cavité carrée en mode de convection naturelle instationnaire.

ABDELKADER BOUTRA, YOUNB KHALED BENKAHLA, DJAMEL EDDIN AMEZIANI ET NABILA LABSI

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés USTHB, BP 32 El Alia, Bab Elzouar 16111, Algerie

## Résumé :

Ce travail porte sur l'étude numérique du transfert thermique en mode de convection naturelle s'opérant au sein d'une cavité bidimensionnelle carrée, entièrement remplie d'un fluide de Bingham. Les parois horizontales de cette cavité sont adiabatiques, les parois verticales sont en revanche maintenues à des températures constantes et distinctes. L'étude concerne l'influence des nombres de Prandtl ( $Pr = 1 ; 7 ; 10$  et  $20$ ), de Rayleigh ( $Ra = 10^3 ; 10^4 ; 5.10^5$  et  $10^6$ ) et de Bingham ( $Bn = 0 ; 2 ; 5$  et  $10$ ), sur la structure du champ thermique de cet écoulement.

## Abstract:

This work consists on a numerical study of heat transfer in natural convection mode of a Bingham fluid flow into a bidimensional square cavity. The horizontal walls of the cavity are adiabatic. However, the vertical walls remain under different and constant temperatures. The study concerns the effect of Prandtl number ( $Pr = 1 ; 7 ; 10$  and  $20$ ), Rayleigh number ( $Ra = 10^3 ; 10^4 ; 5.10^5$  and  $10^6$ ) as well as the Bingham number ( $Bn = 0 ; 2 ; 5$  and  $10$ ) on the thermal field structure of the fluid flow.

**Mots clefs:** Fluide de Bingham, convection naturelle, cavité carrée.

## 1 Introduction

La convection naturelle instationnaire qui se développe dans les enceintes fermées est un sujet d'investigation de grande importance dans de nombreux travaux, aussi bien théoriques qu'expérimentaux, vu sa présence dans différentes applications industrielles telles que : le refroidissement des composants électroniques, les pertes thermiques dans les collecteurs solaires et la ventilation des locaux. Au cours des dernières années, plusieurs travaux ont traité de ce mode de transfert, citons notamment les travaux de Osman Turan et al [1] et Vikhansky [3] qui ont étudié le transfert thermique en mode de convection naturelle d'un fluide de Bingham enfermé dans une cavité rectangulaire ainsi que l'étude numérique entreprise par Tony Wen Hann sheu et Reui KuoLin [4] et qui porte sur l'écoulement instationnaire d'un fluide newtonien dans une cavité de forme cubique.

L'objectif de ce travail est d'étudier le transfert thermique en mode de convection naturelle instationnaire pour un fluide de Bingham remplissant entièrement une cavité carrée, en examinant l'effet des nombres de Prandtl et de Rayleigh et enfin, celui de la viscoplasticité à travers le nombre de Bingham, sur la structure thermique qui se développe au sein de cette cavité.

## 2 Mise en équations du problème physique

La configuration étudiée consiste en une cavité carrée, c'est-à-dire de rapport de forme égale à 1 telle que présentée sur la figure 1. Ses parois horizontales sont maintenues adiabatiques alors que les parois verticales sont portées à des températures constantes mais différentes. Dans cette cavité, s'écoule un fluide de Bingham à propriétés rhéologiques constantes. On suppose en outre que l'écoulement et le transfert thermique sont bidimensionnels et que l'approximation de Boussinesq est valide.

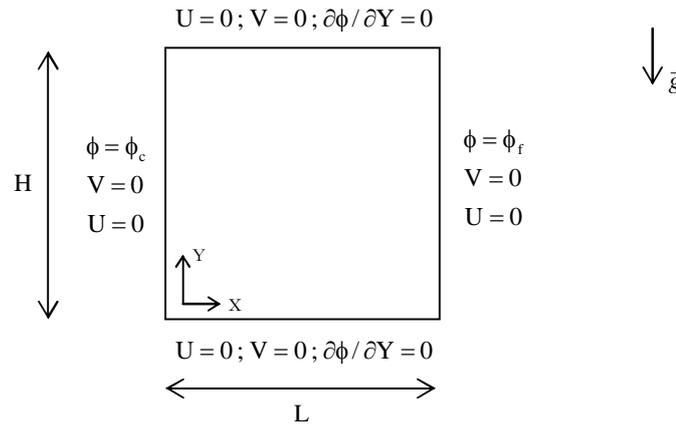


Figure 1 : Schématisation du problème physique.

En utilisant les variables réduites suivantes :

$$X = \frac{x}{H}; Y = \frac{y}{H}; U = \frac{u}{v_0}; V = \frac{v}{v_0}; \theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}; P = \frac{p^*}{\rho v_0^2}; \tau = \frac{t v_0}{H}; v_0 = \sqrt{g \beta \Delta T H}$$

Les équations de continuité, de l'impulsion suivant X et Y et l'équation de l'énergie s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( 2 \eta_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \eta_{\text{eff}} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \eta_{\text{eff}} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( 2 \eta_{\text{eff}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \text{Ra Pr } \phi \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \text{Ra} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right] \quad (4)$$

L'équation constitutive du fluide de Bingham, proposée par Papanastasiou [5] et représentative d'un fluide de Bingham idéal, est jugée satisfaisante par plusieurs auteurs [6 et 7] :

$$\eta_{\text{eff}} = 1 + \frac{\text{Bn}}{\sqrt{\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}}}} \left[ 1 - \exp \left( -M \sqrt{\frac{1}{2} I_{\dot{\gamma}}} \right) \right] \quad (5)$$

M étant un paramètre adimensionnel qui représente la croissance de l'exponentielle ( $M = m v_0/H$ ). Min et al. [7] ainsi que Mitsoulis [8] recommandent de prendre  $m = 1000 \text{ s}$ .

La résolution numérique des équations gouvernantes est effectuée par le biais de la méthode de Boltzmann sur réseau couplé avec la méthode des différences finies. Cette approche a été proposée par Lallemand et Leu [9], en adoptant un maillage  $101 \times 101$  suivant X et Y respectivement.

Nous nous proposons d'utiliser dans la présente étude le modèle à 2 dimensions D2Q9, basé sur un réseau carré, de pas d'espace  $\Delta x = 1$  et de pas de temps  $\Delta t = 1$ , ce qui donne une échelle de vitesse  $\lambda = \Delta x/\Delta t = 1$ . Chaque motif du réseau est caractérisé par neuf vitesses discrètes ( $c_i, i \in \{0, \dots, 8\}$ ). L'équation d'évolution temporelle de l'état du fluide est :  $f_i(x + c_i, t + 1) = f_i(x, t) + (\Omega F)_i$ , où  $f_i(x, t)$  est la fonction de distribution de la particule au nœud  $x$  et au temps  $t$  et  $\hat{a}$  est l'opérateur de collision.

### 3 Résultats et interprétation

#### 3.1 Validation du code de calcul

Le code de calcul que nous avons élaboré, pour résoudre les équations de base, est validé après

comparaison de nos résultats avec ceux de Turan et al [1] et ce, pour l'écoulement d'un fluide de Bingham en mode de convection naturelle stationnaire. Le tableau 1 montre que l'écart maximal entre ces résultats reste dans tous les cas inférieur à 3%.

Ra	Nombre de Nusselt moyen		
	Présente étude	[1]	[2]
$10^3$	1,089	1,118	1,118
$10^4$	2,246	2,245	2,243
$10^5$	4,490	4,520	4,519
$10^6$	8,750	8,823	8,800

Tableau 1 : Valeurs du nombre de Nusselt moyen obtenus avec notre code de calcul avec celles de [1] et [2], pour  $Pr = 0,71$  et  $Bn = 0$ .

### 3.2 Influence du nombre de Rayleigh

Le paramètre principal qui gouverne la convection thermique naturelle est le nombre de Rayleigh. Il représente le rapport des forces de flottabilité (Poussée d'Archimède) aux forces visqueuses, et il est proportionnel au gradient de température appliqué. La figure 2 (a) illustre l'évolution de la cartographie des isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh, la structure des isothermes reste parallèle à la paroi verticale de la cavité ce qui signifie que le transfert thermique est purement conductif dans cette zone. Remarquons que pour  $Ra = 10^6$ , les isothermes sont plus incurvées, indiquant ainsi des gradients de température plus importants.

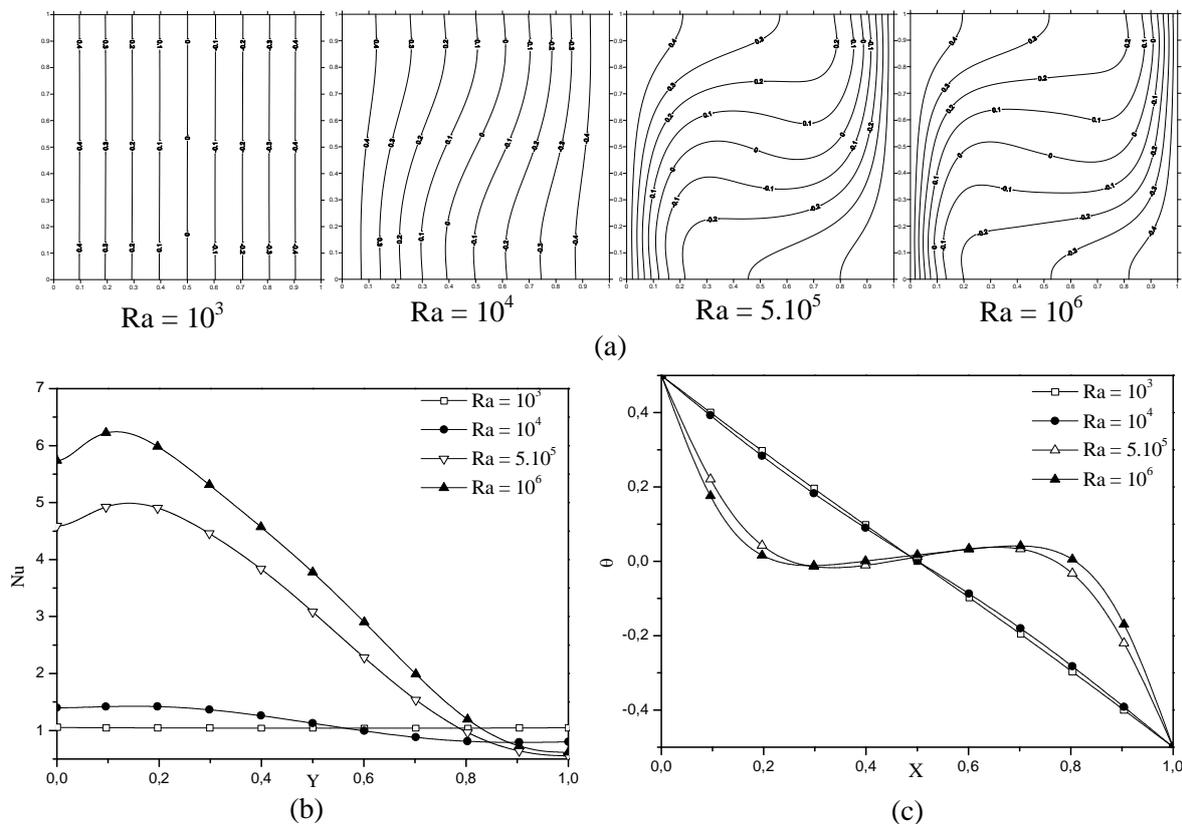


Figure 2 : Effets du nombre de Rayleigh en régime stationnaire sur:

(a) les isothermes; (b) le nombre de Nusselt local relevé sur la paroi chaude;

(c) le profil de température relevée sur le plan médian horizontale. ( $Pr = 7$ ;  $Bn = 5$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ).

La figure 2 (b) représente l'évolution du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude (paroi

verticale de gauche) pour différents nombres de Rayleigh. Nous remarquons que l'augmentation du nombre de Rayleigh augmente le nombre de Nusselt local.

Les profils des températures relevées sur le plan médian horizontal ( $Y = 0,5$ ) pour les différents nombres de Rayleigh sont donnés sur la figure 2(c). Pour  $Ra = 10^3$ , le profil de température est linéaire étant donné que le transfert thermique est purement conductif. Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, les profils de températures se caractérisent par une épaisseur de couche limite thermique (sur les deux faces verticales) qui diminue avec l'augmentation de ce dernier.

### 3.3 Influence des nombres de Prandtl et de Bingham

La figure 3 (a) illustre la cartographie des isothermes pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Pour les faibles nombres de Prandtl ( $Pr \leq 7$ ), les courbes mettent en évidence un transfert convectif traduit par une forte distorsion des isothermes. En revanche, pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl ( $Pr = 10$  et  $20$ ), on assiste à un comportement totalement différent du précédent, caractérisant un transfert conductif représentatif des milieux solides ou des milieux liquides pour lesquels une structure en forme de bouchon apparaîtrait et occuperait la région centrale de la cavité et dont l'étendue augmenterait avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

Un comportement similaire au cas précédent est observé lorsqu'on fait varier le nombre de Bingham. En effet, sur la figure 4(a) les isothermes tendent ( $Bn = 10$  et  $20$ ) à décrire des isothermes verticales parallèles entre elles au fur et à mesure que le nombre de Bingham augmente. En conséquence, la température diminue linéairement (Figure 4(b)). Pour les autres valeurs du nombre de Bingham ( $Bn = 0$  et  $Bn = 2$ ) nous assistons à un transfert convectif, très prononcé pour  $Bn = 0$  (ce qui correspond au cas du fluide newtonien) en particulier. La température, relevée sur le plan médian horizontal, varie alors dans ce cas de manière analogue à celle rencontrée dans le cas de la figure 2 (c).

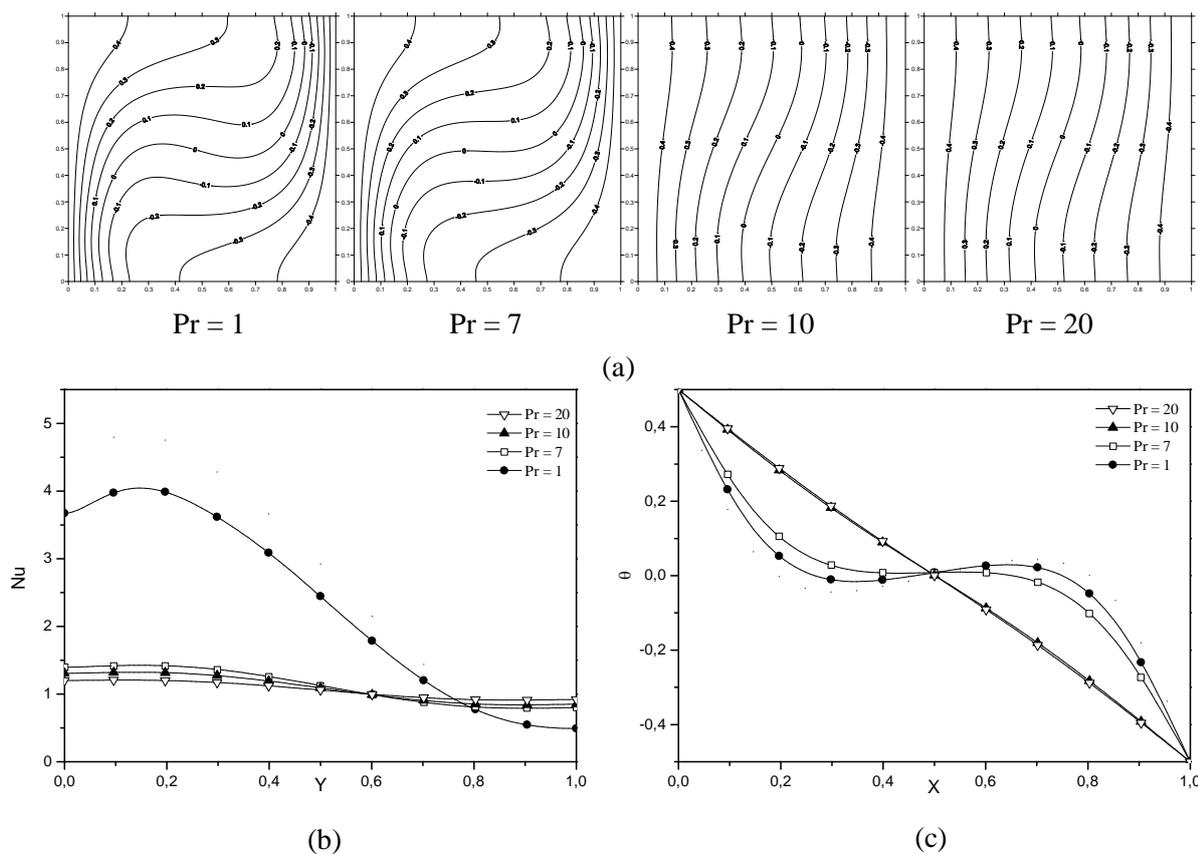


Figure 3: Effets du nombre de Prandtl en régime stationnaire sur:  
 (a) les isothermes; (b) le nombre de Nusselt local relevé sur la paroi chaude;  
 (c) le profil de température relevée sur le plan médian horizontal. ( $Ra = 10^3$ ;  $Bn = 5$  et  $5 \cdot 10^4$ ).

Le comportement instationnaire, simulé à travers l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Bingham, est illustré sur la figure 4(c).

Dans la première période ( $< 2500$ ), le nombre de Bingham n'a aucune influence sur le transfert thermique dans la cavité. En effet, pour toutes les valeurs du nombre de Bingham choisies, les distributions du nombre de Nusselt moyen se confondent.

Dans la deuxième période ( $2500 < < 30000$ ), l'influence du nombre de Bingham se fait ressentir sur le transfert thermique. En effet, ce dernier décroît avec l'augmentation du nombre de Bingham.

Dans la troisième période ( $> 30000$ ), le nombre de Nusselt moyen tend vers une valeur asymptotique correspondant à l'atteinte du régime stationnaire.

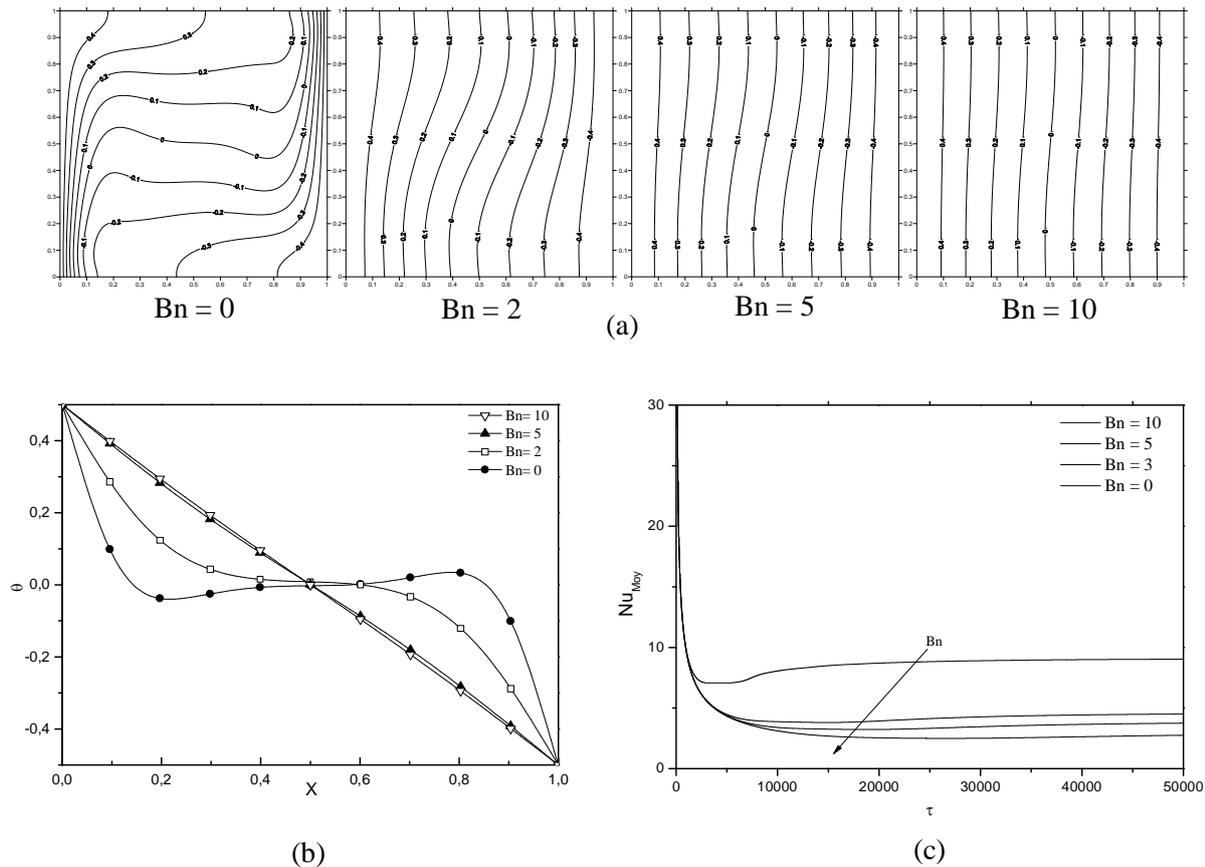


Figure 4: Effet du nombre de Bingham sur la cartographie : (a) des isothermes; (b) du profil de température sur le plan médian horizontal en régime stationnaire; (c) du nombre de Nusselt moyen en régime instationnaire ( $Ra = 10^5$ ;  $Pr = 7$ ).

## 4 Conclusion

Une étude numérique de la convection en régime laminaire instationnaire pour un fluide de Bingham dans une cavité carrée a été effectuée. La résolution numérique est basée sur la méthode de Boltzmann sur réseau. Les parois verticales de cette cavité sont maintenues à des températures constantes mais distinctes tandis que les parois horizontales sont quant à elle adiabatiques. Dans le but d'éviter les instabilités numériques dans la région des faibles taux de cisaillement, le modèle de viscosité de Papanastasiou a été adopté pour décrire le comportement de ce fluide. La validation du présent code de calcul a été confirmée par la comparaison des résultats issus de la présente étude avec ceux de la littérature. Les présents résultats montrent que les caractéristiques du transfert thermique sont fortement affectées par la variation des nombres de Rayleigh, de Prandtl et de Bingham.

## Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité (L/H)	Pr	Nombre de Prandtl, = $\rho C_p/k$
Bn	Nombre de Bingham, = $\frac{\tau_0}{\mu_0} \sqrt{\frac{L}{g \beta \Delta T}}$	$T_C$	Température chaude du fluide, K
$C_p$	Chaleur spécifique du fluide à pression constante, $J kg^{-1} K^{-1}$	$T_F$	Température froide du fluide, K
H	hauteur de la cavité, m	U	Vitesse longitudinale adimensionnelle, = $V_x/V_0$
Ra	Nombre adimensionnel de Rayleigh, = $\rho^2 g \beta H^3 \Delta T / \mu k$	V	Vitesse transversale adimensionnelle, = $V_y/V_0$
$I_{\dot{\gamma}}$	Second invariant du tenseur des taux de cisaillement	$V_0$	Vitesse de référence, m/s
k	Conductivité thermique, $W m^{-2} K^{-1}$	Symbols grecs	
L	Longueur de la cavité, m	$\beta$	Coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
m	Paramètre de croissance exponentielle, s	$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement adimensionnel
M	Paramètre réduit de croissance exponentielle, = $mV_0/H$	$\eta$	Viscosité effective, $kg m^{-1} s^{-1}$
$p^*$	Pression, Pa	$\eta_{eff}$	Viscosité effective adimensionnelle, = $\eta/\mu_0$
$P^*$	Pression adimensionnelle, = $p^* / \rho V_p^2$	$\mu_0$	Viscosité plastique, $kg m^{-1} s^{-1}$
		$\rho$	Masse volumique du fluide, $kg m^{-3}$
		$\tau_0$	Contrainte seuil de cisaillement, Pa
		$\theta$	Température adimensionnelle, = $(T - T_f)/(T_c - T_f)$
		$\tau$	Temps adimensionnelle

## References

- [1] Turan O., Chakraborty N., Pool R. J., Laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with differentially heated side walls, *J. Non-Newtonian fluid Mechanics*, 901-913, 2010.
- [2] De Vahl Davis G., Natural convection of air in a square cavity, a benchmark numerical solution, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 3, 249-264, 1983.
- [3] Vikhansky A., On the onset of natural convection of Bingham liquid in rectangular enclosures. *J. Non-Newtonian fluid Mechanics*, 1713-1716, 2010.
- [4] Tony W. H. S., Reui-Kuo L., Three-dimensional bifurcations in a cubic cavity due to buoyancy-driven natural convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010.
- [5] Papanastasiou T. C., Flows of materials with yield, *J. of Rheology*, 31, 385-404, 1987.
- [6] Mitsoulis. E., Zisis Th., Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity, *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 101, 173-180, 2001.
- [7] Min T., Choi H. G., Yoo J. Y., Choi H., Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in a circular pipe-II. Numerical approach-hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40, 3689-3701, 1997.
- [8] Mitsoulis E., On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects. *Chem. Eng. Sci.*, 59, 789-800, 2004.
- [9] Lallemand P., Luo L., Hybrid finite-difference thermal lattice Boltzmann equation, *Int. J. Modern Physics B*, 17 (1/2), 41-47, 2003.