

# Caractérisation de l'influence des instabilités de surface d'un film d'eau ruisselant sur le transfert de chaleur pariétal

A. AUBERT<sup>a</sup>, F. CANDELIER<sup>b</sup> et C. SOLLIEC<sup>a</sup>

a. GEPEA/Ecole des Mines de Nantes, Département Systèmes Energétiques et Environnement  
4 rue Alfred Kastler, BP 20722, Nantes, Cedex 3

b. IUSTI, Université de la Méditerranée, Technopôle de Château-Gombert, 5 rue Enrico Fermi,  
13453 Marseille cedex 13

## Résumé :

*Dans les procédés à base de films d'eau, des instabilités de surface sont souvent observées. Nous étudions ici l'influence de celles-ci sur le transfert convectif pariétal. Le problème est abordé numériquement en utilisant un maillage mobile épousant la forme de la surface libre, considérée ici comme une donnée du problème. Une étude statistique met en évidence l'importance des fluctuations de hauteur du film sur le flux pariétal.*

## Abstract :

*In process using water film, surface instability can be found at the free surface. Their influence on wall heat flux is studied here. The problem is solved numerically and uses a moving mesh fitted on the shape of the interface, whose value is supposed known. A statistical analysis led to highlight the importance of height fluctuations on wall heat flux.*

**Mots clefs :** instabilités, film, transfert de chaleur pariétal, maillage mobile, fluctuation.

## 1 Introduction

Les films d'eau ruisselants sont utilisés dans un grand nombre d'applications industrielles. Ils permettent en impliquant une faible masse de fluide d'obtenir des transferts de chaleur importants. Ils couplent des aspects liés à la dynamique des fluides, aux transferts thermiques et au transfert de masse. Bien heureusement, certaines hypothèses permettent d'arriver à des problèmes moins couplés et donc plus simples à résoudre. L'hypothèse d'un film d'épaisseur constante en est un exemple fréquent, voir [1] par exemple. Seulement, en pratique, les chances de rencontrer un film parfaitement lisse sont assez faibles et ne peuvent être réunies que dans certaines conditions bien particulières. Ils ont en effet une nature qui est intrinsèquement instable ; un film d'eau s'écoulant sur une paroi verticale l'est même inconditionnellement [2]. Dès lors, sa surface est la plupart du temps couverte de ridules d'amplitudes plus ou moins importantes.

Différents auteurs se sont attelés à l'étude de l'influence de ces « vaguelettes » sur le transfert de chaleur en suivant des approches assez variées (voir [3] et [4]). Des moyens très poussés, allant jusqu'au calcul direct (DNS) ont été employés [5]. Les résultats obtenus grâce à ces techniques sont très parlants mais malheureusement fortement limités par le temps de calcul nécessaire à leur obtention.

A l'instar de la turbulence où une méthode appelée Kinematic Simulation a été développée [6] pour simuler la cinématique du champ de vitesse sans résoudre les équations de la dynamique. Nous proposons de nous affranchir de la résolution des équations relatives à l'hydrodynamique du film pour étudier l'influence des fluctuations de hauteur de l'interface sur le transfert de chaleur. En Kinematic simulation, les champs de vitesse sont générés à partir de données statistiques issues de mesures expérimentales ou de simulations directes. Ils n'obéissent pas nécessairement aux équations de la dynamique mais respectent à chaque instant l'équation de conservation de la masse [7]. Les gains de temps de calculs sont bien entendu considérables alors que les effets du champ de vitesse peuvent être obtenus avec fidélité (dispersion de polluant,

trajectoire de particules, etc). La méthode que nous présentons ici s'inspire de cette technique. Pour cela, nous avons fait deux hypothèses majeures. Nous supposons que la forme de la surface libre du film peut être déduite de données statistiques [8]. Aussi le profil de vitesse dans le film est supposé auto-similaire à celui de Nusselt quelle que soit la déformation subie par l'interface. Cette hypothèse montre cependant ses limites dans le cas d'oscillations non-sinusoïdales de grandes amplitudes [9]. Passé un certain ratio entre l'épaisseur du substrat et la hauteur de vague, on observe un phénomène de recirculation dans la zone de crête. Nous nous plaçons ici à un nombre Reynolds de 1000, pour éviter ce phénomène (en toute rigueur pour certains ratios des recirculations peuvent parfois y être observées [10]).

Avec ces hypothèses, nous pouvons ainsi générer de manière aléatoire des géométries d'interface et les champs de vitesse correspondants et nous intéresser aux conséquences engendrées par les fluctuations de l'épaisseur du film sur les échanges de chaleur.

## 2 Modélisation numérique

Nous considérons un problème 2D. Le film d'eau ruisselle à un débit  $Q$  (par unité de largeur) sur une paroi verticale de longueur  $L$  maintenue à température constante  $T_p$ . L'eau arrive initialement à la température  $T_e$ , on note  $\alpha$  sa diffusivité thermique et  $\lambda$  sa conductivité. L'interface air/eau est supposée adiabatique.

### 2.1 Forme de l'interface du film

Une méthodologie, basée sur des mesures statistiques, permet de reconstruire la forme de l'interface d'un film dont le nombre de Reynolds est compris entre 800 et 5000 [8].

Cette donnée nous sert d'entrée pour notre modèle numérique et n'est donc plus une inconnue du problème (on note  $\delta(x,t)$  la position de l'interface eau/air à l'abscisse  $x$  et au temps  $t$ ). L'hypothèse est faite que cette interface ne se déforme pas lors du ruissellement du film. Elle est donc advectée à la vitesse des instabilités :  $g \delta^2 / \nu$  (d'après [11], avec  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\nu$  la viscosité cinématique de l'eau). Sur la figure 1, nous présentons un exemple d'interface obtenue pour un nombre de Reynolds de 1000. Il faut garder à l'esprit qu'au vu des contrastes entre les échelles (longueur de la plaque et amplitude des vagues) l'interface paraît sur le graphique beaucoup plus déformée qu'elle ne l'est dans la réalité.

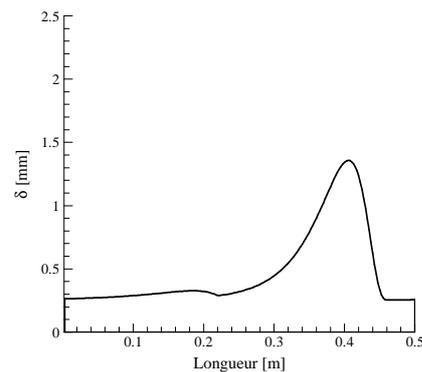


FIG. 1 – Exemple de forme de l'interface à un instant donné pour un nombre de Reynolds de 1000.

### 2.2 Calcul du champ de vitesse

La théorie de Nusselt nous donne le profil suivant (pour une paroi verticale et un film d'épaisseur constante) :

$$u(y) = \frac{g}{\nu} \left( y\delta - \frac{1}{2} y^2 \right). \quad (1)$$

En supposant qu'en tout point du film ondulé, le profil de vitesse est auto-similaire à Eq. (1), on peut alors en déduire le champ de vitesse dans la totalité du film. La composante  $v$  de la vitesse satisfait à l'équation de conservation de la masse en régime permanent et fluide incompressible. On obtient alors :

$$u = \frac{3Q}{\delta} \left( \frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{2\delta^2} \right) \text{ et } v = \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{y}{\delta} u. \quad (2)$$

### 2.3 Résolution de l'équation de la chaleur

Dans le cas d'un problème bidimensionnel, l'équation de la chaleur dans le film, sans source, est Eq. (3).

La position de l'interface eau/air :  $\delta$ , est une fonction non seulement de l'espace, mais aussi du temps. Par conséquent la géométrie du domaine considéré va être différente à chaque instant. Dans une logique de

calcul numérique cela implique l'utilisation d'un maillage mobile.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \Delta T . \quad (3)$$

Il existe différentes manières de générer un tel maillage. L'une des plus robuste et populaire part du principe que le système de coordonnées doit satisfaire un système d'équation de Poisson dans le système de coordonnées initial [12]. Une autre méthode permet aussi de générer un maillage orthogonal et bidimensionnel s'adaptant à la forme du domaine [13]. Cependant la mise en place de telles techniques s'avère relativement fastidieuse. Dans la situation dans laquelle nous nous trouvons il nous a semblé préférable d'utiliser un maillage qui épouse la forme de l'interface, mais pas nécessairement en respectant des propriétés d'orthogonalité. En effet, l'équation de l'interface est selon nos hypothèses une fonction connue du problème. Ces variations au cours de l'espace et du temps sont accessibles aisément.

### 2.3.1 Expression du problème dans le système de coordonnées curvilignes

Afin de simplifier la génération du maillage à chaque pas de temps, nous proposons de résoudre l'équation de la chaleur dans un système de coordonnées curvilignes suivant les déformations de l'interface  $\delta$ .

Nous proposons donc le changement de variable suivant :  $X = x/L$  ,  $Y = y/\delta(x,t)$  et  $\tau = t$  .

Sa transformation réciproque est :  $x = LX$  ,  $y = H(X,\tau)Y$  et  $t = \tau$  .

La figure 2 représente un exemple de maillage curviligne utilisant le changement de variable présenté ci-dessus.

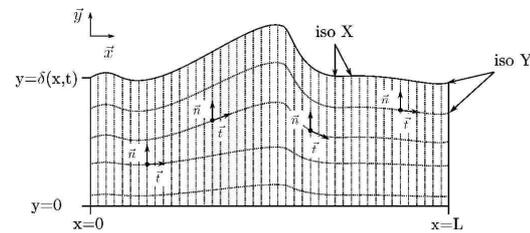


FIG. 2 – Représentation du maillage obtenu dans le système de coordonnées curvilignes.

Le changement de variable  $\tau = t$  , n'a qu'une valeur symbolique. Il permet de différencier la dérivée partielle par rapport au temps à  $\vec{x}$  fixé ou bien à  $\vec{X}$  fixé.

Maintenant que nous avons choisi le système de coordonnées curvilignes dans lequel nous allons résoudre notre problème, nous exprimons toutes les équations et conditions aux limites dans ce système, soit en fonction de  $X$ ,  $Y$  et  $\tau$ . On note désormais dans le nouveau système de coordonnées :  $H(X, \tau)$  la position de l'interface,  $H'$  la dérivée  $\partial H / \partial X$  , ainsi que  $U$  et  $V$  les expressions des composantes de vitesses. Le détail des calculs est présenté dans [14]. En réunissant toutes les expressions obtenues dans le système de coordonnées curvilignes pour former l'équation de la chaleur dans ce même système, l'équation (3) devient :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = C_1 \frac{\partial T}{\partial X} + C_2 \frac{\partial T}{\partial Y} + C_3 \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + C_4 \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + C_5 \frac{\partial^2 T}{\partial X \partial Y} . \quad (5)$$

où les fonctions  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  sont données par les expressions suivantes :  $C_1 = -U/L$  ,  $C_2 = (-\alpha Y(2H'^2/H - H'')/L^2 + UYH'/L - V + Y\partial H/\partial \tau)/H$  ,  $C_3 = \alpha/L^2$  ,  $C_4 = \alpha(1 + (LYH')^2)/H^2$  et  $C_5 = -2\alpha YH'/L^2 H$  .

Exprimons à présent les conditions aux limites dans ce système de coordonnées. Pour la paroi, elle devient :

$$\forall \tau \text{ et } \forall X, \text{ en } Y = 0, T(X, 0, \tau) = T_p . \quad (6)$$

L'eau est supposée initialement à la température  $T_e$ , on a donc en entrée du domaine de calcul :

$$\forall \tau, \forall Y \in ]0;1], \text{ et en } X = 0, T(0, Y, \tau) = T_e . \quad (7)$$

À l'extrémité opposée de la plaque (en sortie du domaine), on impose une condition de type sortie (*outflow*). Enfin on suppose que les échanges à l'interface eau/air sont négligeables. Cette hypothèse limite l'étude à des phénomènes localisés à proximité de la zone de développement de la couche limite thermique. L'interface est donc supposée adiabatique, ce qui donne dans le système de coordonnées curvilignes :

$$\frac{\lambda}{(H'/L+1)^{1/2}} \left[ \frac{H'}{L^2} \frac{\partial T}{\partial X} - \left( \frac{YH'^2}{L^2 H} + \frac{1}{H} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \right] = 0 . \quad (8)$$

### 2.3.2 Méthode de résolution

Les équations présentées précédemment sont résolues par la méthode des différences finies. Les schémas de discrétisations sont à l'ordre 2. Le maillage est de 200 x 20.

La méthode numérique que nous avons utilisée est basée sur un algorithme de Adam-Bashfort d'ordre 2. Afin d'initialiser le calcul numérique, nous avons opté pour la résolution des deux premiers pas de temps par un algorithme de Runge Kutta d'ordre 2. Dans un souci de gain de temps, nous avons choisi d'initialiser le calcul numérique à l'aide de la solution analytique présentée dans [1]. Le calcul débute ainsi sur un film d'épaisseur constante, résolu grâce à la solution analytique. Puis on raccorde progressivement l'interface avec celle représentant la surface ondulée. Comme les premiers instants (le raccordement des interfaces) ne correspondent à rien physiquement, les résultats qui suivent sont restreints à toute la période ultérieure.

Les paramètres utilisés dans le modèle sont les suivants :  $Re=1000$ ,  $T_e=20^\circ C$ ,  $T_p=50^\circ C$ ,  $L=0,5m$  et le pas de temps  $10^{-4}s$ . Les propriétés de l'eau sont prises constantes et égales à celles de l'eau à  $20^\circ C$ .

## 3 Résultats et discussions

Nous présentons sur la figure 3 un exemple de champ de température obtenu à un instant donné à l'aide du modèle numérique. On remarque une nette déformation des profils de température par rapport à un film d'épaisseur constante.

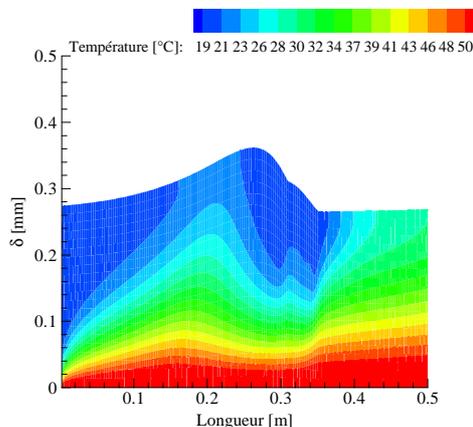


FIG. 3 – Contour de température dans le film à un instant donné.

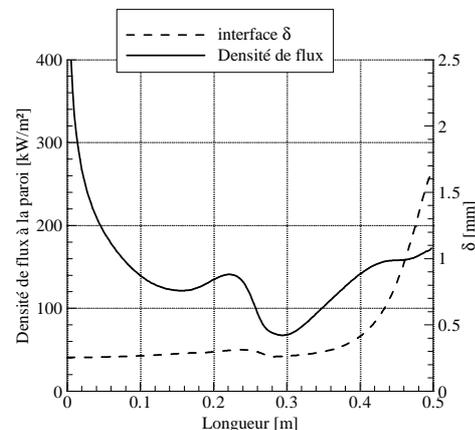


FIG. 4 – Densité de flux échangé à la paroi et épaisseur du film à un instant donné.

Sur la figure 4, nous isolons la densité de flux échangée à la paroi ainsi que l'épaisseur du film correspondante à un instant donné. On observe que le flux est en effet influencé par la présence des instabilités. Cet impact est souvent interprété comme étant la conséquence de la réduction de l'épaisseur moyenne du film lors de la présence de vaguelettes ainsi que de l'amélioration de la convection par leur mouvement [4]. D'autre part, on remarque que la densité de flux est difficile à prévoir en fonction de la seule forme de l'interface. En effet, le profil de flux reste influencé par l'histoire des fluctuations ayant eu lieu ; le flux est en train de relaxer des perturbations précédentes. Pour un tel film, on peut calculer le temps de relaxation thermique moyen :  $\overline{\tau_r} = \overline{\delta^2} / \alpha = 1.9s$ .

On convient alors, du fait de la sollicitation aléatoire des instabilités, que le flux échangé à la paroi doit être étudié de manière statistique similairement aux phénomènes de turbulence.

### 3.1 Etude Statistique

Pour réaliser cette étude, nous avons effectué un calcul pour un film s'écoulant durant une centaine de secondes sur la paroi. Les études traitant de la turbulence font en général l'hypothèse qu'un écoulement stationnaire statistiquement peut être analysé comme satisfaisant aux conditions d'ergodicité [15]. Afin de vérifier que notre écoulement tend bien vers un tel comportement, nous avons calculé à chaque instant la moyenne locale temporelle du flux échangé à la paroi. Pour 100s simulées, cette moyenne tend en tout point vers une constante, on peut supposer que l'écoulement a, en moyenne, un comportement stationnaire.

Afin d'appréhender le comportement physique de notre système, nous décomposons nos grandeurs à la

manière de Reynolds lors de sa description statistique d'un écoulement turbulent. En effet, on peut décomposer localement la hauteur  $\delta(x,t)$ , en une valeur correspondant à la valeur moyenne temporelle locale  $\bar{\delta}(x)$  et une fluctuation  $\delta'(x,t)$ , soit  $\delta(x,t) = \bar{\delta}(x) + \delta'(x)$ . De même pour la densité de flux à la paroi  $\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x) + \varphi'(x,t)$ .

### 3.1.1 Les valeurs moyennes

Sur la figure 5 on compare la valeur moyenne temporelle de la hauteur du film  $\bar{\delta}(x)$  et celle de la densité de flux  $\bar{\varphi}(x)$  aux valeurs obtenues d'après la théorie de Nusselt pour un même nombre de Reynolds.

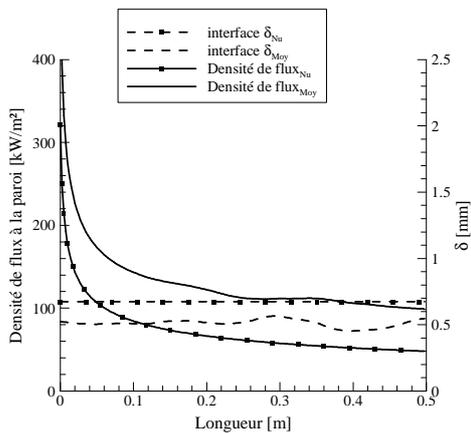


FIG. 5 – Valeurs moyennes temporelles de l'épaisseur du film et de la densité de flux échangée à la paroi pour un film ondulé. Comparaison à la théorie de Nusselt.

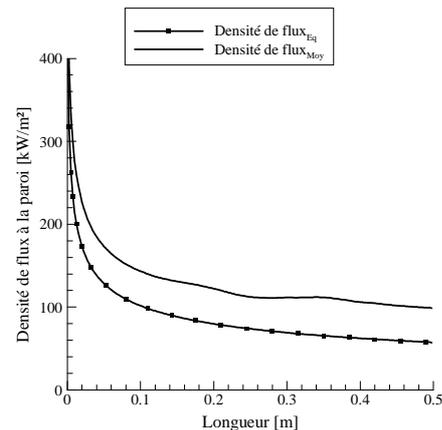


FIG. 6 – Valeurs moyennes temporelles de la densité de flux échangée à la paroi pour un film ondulé. Comparaison à un film lisse d'épaisseur équivalente.

On observe qu'en moyenne, l'épaisseur du film est quasi-constante et qu'elle est inférieure à celle du film de Nusselt de 25 % environ. Ce résultat provient des données statistiques de [8] et est observé classiquement pour les films ondulés [11]. D'autre part, on note que le flux échangé à la paroi tend vers une valeur deux fois supérieure à celle de Nusselt. Dans nombre d'articles, l'augmentation du flux due à la présence de ridules est attribuée principalement à l'effet de l'amincissement moyen de l'épaisseur du film plutôt qu'à l'amélioration de la convection par les vaguelettes [4]. Nous avons donc calculé le flux de chaleur qu'engendrerait un film lisse ayant la même épaisseur que le film ondulé (en moyenne) pour un nombre de Reynolds identique. Les résultats sont présentés sur la figure 6.

On voit certes que le flux tend vers des valeurs plus proches de celui obtenu en moyenne par le film ondulé, mais le résultat est loin d'être identique. Cela tend à montrer que les fluctuations de hauteur ont un rôle non négligeable sur le flux moyen échangé à la paroi.

### 3.1.2 Les fluctuations

Concernant les fluctuations de hauteur et de flux, elles doivent être en moyenne nulles. On retrouve bien après vérification, qu'en moyenne dans le temps, elles sont négligeables. On se demande cependant s'il n'existe pas une corrélation entre les fluctuations de hauteur et de flux avec la grandeur moyenne du flux comme il en existe en turbulence entre les fluctuations de vitesse dans le tenseur de Reynolds et l'écoulement moyen. Pour cela, nous calculons une fonction de corrélation croisée entre les fluctuations de hauteur et de flux :  $\delta'(x,t)\varphi'(x,t)$  que nous moyennons ensuite au cours du temps.

On obtient alors la figure 7. On remarque, d'une part, que la corrélation n'est pas nulle, on s'assure ainsi de l'interdépendance des fluctuations. D'autre part, on note qu'à proximité de la zone d'entrée les fluctuations sont en moyenne de signes opposés tandis que passée une certaine longueur elles deviennent de même signe. Ce résultat est intéressant car ce changement de signe indique que dans un premier temps une fluctuation de hauteur positive implique une diminution du flux échangé à la paroi et réciproquement, tandis qu'après une certaine longueur l'effet est à l'augmentation.

L'interprétation de ce phénomène se révèle cependant être délicate au vu du couplage entre les différents

phénomènes. Sur le schéma 8, nous représentons les conséquences produites par une fluctuation de la hauteur de l'interface. À gauche de la transition, nous sommes dans la zone où une fluctuation de hauteur positive amène une fluctuation de densité de flux négative. Le comportement inverse est observé dans la zone de droite. Toute la complexité de l'analyse réside dans le découplage des fluctuations de vitesse et des fluctuations du profil de température sur la valeur du flux échangé à la paroi. Nous n'avons pas encore conclu sur ce point mais des études sont en cours afin d'en comprendre les effets.

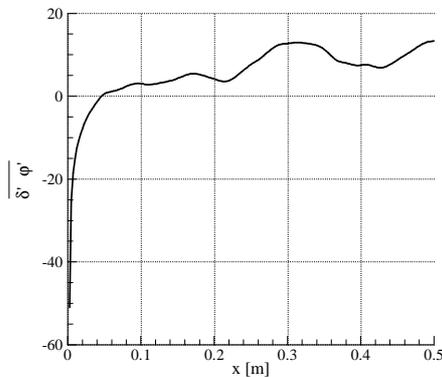


FIG. 7 – Moyenne temporelle des corrélations des fluctuations de hauteur et de flux à la paroi.

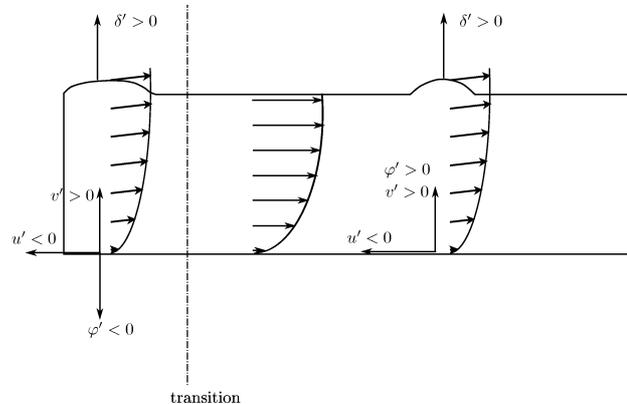


FIG. 8 – Représentation de l'influence d'une fluctuation de hauteur sur le flux échangé à la paroi.

## 4 Conclusion

Pour conclure, nous proposons dans ce travail une nouvelle approche de l'étude de l'influence des instabilités de surface sur le flux pariétal échangé dans les films ruisselants. Cette technique inspirée du traitement de la turbulence (notamment la *kinematik simulation*) permet pour des coûts de calculs relativement faibles d'accéder à des notions physiques intéressantes. Il semblerait d'ailleurs que l'influence des fluctuations de hauteur ait été relativement négligée en privilégiant plutôt l'influence de la réduction d'épaisseur moyenne du film sur le transfert de chaleur à la paroi.

## Références

- [1] Aubert, A., Candelier, F. et Sollicec, C. Semi-Analytical solution for Heat Transfer in a Water Film Flowing Over a Heated Plane. *J. Heat Trans.*, 132, 2010.
- [2] Benjamin, T. B. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 2:554:574, 1957.
- [3] Hirshburg, R. et Florschuetz, L. W. Laminar wavy-film flow : Part ii, condensation and evaporation. *J. Heat Trans.*, 104:459–464, 1982.
- [4] Jayanti, S. et Hewitt, G. F. Hydrodynamics and heat transfer of wavy thin film flow. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 40(1):179–190, 1996.
- [5] Kunugi, T. et Kino, C. DNS of falling film structure and heat transfer via mars method. *Computers & Structures*, 83(6-7):455 – 462, 2005.
- [6] Kraichnan, R. H. Diffusion by a random velocity field. *Physics of Fluids*, 13:22–31, 1970.
- [7] Fung, J. et Perkins, R. Dispersion modeling by kinematic simulation : Cloud dispersion model. *Fluid Dyn. Res.*, 40(4):273 – 309, 2008.
- [8] Touglidis, L. G., Karapantsios, T. D., Vlachos, N. A. et Balouktsis, A. I. Surface morphology reconstruction of free falling films at high reynolds numbers. *Int. J. Multiphas Flow*, 30(4):369–393, 2004.
- [9] Alekseenko, S. V. et Nakoryakov, V. E. et Pokusaev, B. G. Wave formation on vertical falling liquid film. *Int. J. Multiphas Flow*, 11(5):607-627, 1985.
- [10] Patnaik, V. et Perez-Blanco, H. Roll waves in falling films: an approximate treatment of the velocity field. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 17(1):63-70, 1996.
- [11] Fulford, G. D. *The Flow of Liquids in Thin Films*, Advances in Chem. Eng. Academic Press,(5) 1964.
- [12] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A. et Mastin, C. W. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations—a review. *J. Comput. Phys.*, 47(1):1 – 108, 1982.
- [13] Duraiswami, R. et Prosperetti, A. Orthogonal mapping in two dimensions. *J. Comput. Phys.*, 98:179 – 179, 1992.
- [14] Aubert, A. Etude de la protection thermique par film d'eau d'une paroi soumise à un flux radiatif. Approches expérimentale et numérique. Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2010.
- [15] Guyon, E., Hulin, J.-P. et Petit, L. *Hydrodynamique physique*. CNRS Éditions, 2001.