

# Caractérisation des écoulements redressés dans les moteurs thermoacoustiques à ondes progressives

R. Paridaens, S. Kouidri, F. Jebali Jerbi

a. Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75752 Paris Cedex  
LIMSI, CNRS 3251, Bât. 508, BP 133, 91403 Orsay Cedex

## Résumé :

*Les phénomènes non-linéaires dans les machines thermoacoustiques sont à l'origine d'écoulements secondaires se superposant au flux oscillant. A ce jour, les écoulements secondaires n'ont été caractérisés que pour des ondes stationnaires ou progressives dans les systèmes résonnants. Une méthode permettant de caractériser théoriquement l'écoulement secondaire dans les systèmes thermoacoustiques ayant des géométries plus complexes a été développée et appliquée dans le cas d'une machine thermoacoustique annulaire de type Stirling conçue et réalisée au sein du Limsi. Les champs des écoulements redressés sont ainsi fournis. Comme l'étude des champs d'ordre 2 nécessite la connaissance des champs acoustiques, un modèle linéaire du comportement des champs d'ordre 1 dans le moteur thermoacoustique à ondes progressives du LIMSI est utilisé. Les résultats théoriques du champ de pression sont confrontés aux résultats expérimentaux et leurs écarts relatifs inférieurs à 10% permettent la validation du modèle linéaire.*

## Abstract :

*Nonlinear phenomena in thermoacoustic devices are the cause of appearance of secondary flow called acoustic streaming and superimposed to the primary oscillating flow. The knowledge of control parameters as the second order time average pressure and velocity would lead to a better understanding of nonlinear phenomena responsible for a part of the system energetic efficiency decrease. In this paper, a method to investigate DC flow in thermoacoustic devices is developed and applied to an annular thermoacoustic prime-mover. The second order time average gradient and velocity is presented. A modelisation of the thermoacoustic engine is developed and the theoretical acoustic pressure is compared with experimental data. The relative error between theory and experiment is less than 10%.*

**Mots clefs :** acoustique non-linéaire ; thermoacoustique ; écoulement redressé

## 1 Introduction

Durant ces dernières décennies un intérêt croissant est porté par les laboratoires de recherche aux machines de conversion d'énergie ayant des performances énergétiques et environnementales élevées. Bien que mis en évidence depuis plus de deux siècles, le phénomène thermoacoustique retrouve un regain d'intérêt indéniable. Les systèmes thermoacoustiques utilisant des fluides non-polluants sont parmi les machines les plus convoitées. Les phénomènes physiques sous-jacents sont multiples et surtout complexes. La combinaison de phénomènes acoustiques, thermiques présents dans les machines thermoacoustiques, contribue à la difficulté de maîtriser le fonctionnement de ces machines à conversion d'énergie. Leur efficacité énergétique limitée, principal frein à leur développement, est désormais au centre des préoccupations actuelles.

Les fortes amplitudes de pression régnant dans ces machines, nécessaires à leur bon fonctionnement, sont responsables de l'apparition d'écoulements secondaires moyens se superposant à l'écoulement oscillant. Cet écoulement secondaire est source de dissipations énergétiques importantes [1, 2]. Afin

de quantifier ces phénomènes de dissipation énergétique, il est nécessaire de connaître les champs de l'écoulement secondaire. Sur le plan théorique, la modélisation de cet écoulement demeure complexe et fait encore l'objet de travaux de recherche importants [3, 4]. Les équations associées aux cas linéaire et non-linéaire sont développées dans la première partie. Les expressions analytiques du champs de vitesse et du gradient de pression de l'écoulement redressé sont alors établies. Une description du système est effectuée dans la deuxième partie. Dans la troisième partie les champs de pression acoustique, du gradient de pression et de vitesse de l'écoulement redressé sont quantifiés et interprétés dans le moteur thermoacoustique muni d'un boucle annulaire.

## 2 Approche théorique

### 2.1 Equations fondamentales

Dans tout système thermoacoustique, le fluide est soumis aux lois de conservation. Du point de vue Eulérien dans le référentiel lié au système, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent [5] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial(u_i)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho c_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa \Delta T + \sigma_{ik} \frac{\partial(u_k)}{\partial x_i} \quad (3)$$

avec

$$\sigma_{ik} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \mu_B \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \quad (4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $u_i$  est la composante de la vitesse particulière sur l'axe  $i$ ,  $p$  et  $T$  sont respectivement la pression et la température du fluide,  $\sigma_{ik}$  est le tenseur des contraintes visqueuses,  $\mu$  et  $\mu_B$  sont respectivement les coefficients de viscosité de cisaillement et de viscosité de dilatation,  $c_p$  est la capacité thermique massique du fluide à pression constante et  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker.

Il est à noter que le terme  $\rho c_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$  figurant dans l'équation (3) est à l'origine de l'effet thermoacoustique.

### 2.2 Cas linéaire

La complexité des équations de conservations rend indispensable l'utilisation de quelques hypothèses simplificatrices. Dans le cas linéaire les hypothèses suivantes sont effectuées :

- L'approximation acoustique permettant de linéariser les équations.
- L'onde est considérée monofréquentielle de pulsation  $\omega$  permettant d'introduire l'écriture complexe tel que :

$$\mathcal{F}(M, t) = \text{Re} \left[ \mathcal{F}_1(M) e^{i\omega t} \right] \quad (5)$$

- La dimension longitudinale est considérée suffisamment grande par rapport à la dimension transversale de telle sorte que la pression  $p_1$  est supposée fonction uniquement de l'abscisse  $x$ .
- Le problème décrit par les équations (1-4) est supposée monodimensionnel en considérant le débit acoustique  $U_1$ , qui est l'intégrale de la composante de la vitesse selon  $x$  sur une section droite.
- La distribution de température moyenne dans le temps est supposée fonction uniquement de la coordonnée longitudinale :  $T_0 = T_0(x)$
- Le gaz est supposé parfait.

Ces hypothèses permettent de transformer le système d'équations précédent (1-3) en un système linéaire à une dimension, par rapport aux variables de pression et de débit acoustique. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie deviennent :

$$dU_1 = -\frac{i\omega A dx}{\gamma p_0} (1 + (\gamma - 1)f_\kappa) p_1 + \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - f_\nu)(1 - \sigma)} \frac{dT_0}{T_0} U_1 \quad (6)$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{i\omega \rho_0}{(1 - f_\nu)A} U_1 \quad (7)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{2} Re \left[ p_1 U_1^* \left( 1 - \frac{f_\kappa - f_\nu^*}{(1 + \sigma)(1 - f_\nu^*)} \right) \right] + \frac{\rho_0 c_p |U_1|^2}{2A\omega(1 - \sigma^2) |1 - f_\nu|^2} Im [f_\kappa + \sigma f_\nu] \frac{dT_0}{dx} - (A_f \kappa + A_s \kappa_s) \frac{dT_0}{dx} \quad (8)$$

$A_f$  et  $A_s$  sont respectivement la section transversale du fluide et du solide dépendant de la coordonnée axiale.  $\rho_0$  et  $T_0$  sont respectivement la masse volumique et la température du fluide en l'absence de perturbation acoustique.  $\dot{H}_2$  est l'énergie totale,  $\sigma$  est le nombre de Prandtl,  $\kappa$  et  $\kappa_s$  sont respectivement la conductivité thermique du fluide et du solide.  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  sont respectivement les facteurs de formes visqueux et thermiques [6]. (\*) désigne le complexe conjugué.

Afin d'obtenir l'évolution de la pression et du débit acoustique le long du dispositif expérimental, le code numérique, DeltaEC [7], a été utilisé.

## 2.3 Cas non-linéaire

Afin de caractériser les effets non-linéaires dans le moteur à ondes progressives, on est amené à utiliser des hypothèses spécifiques au cas non-linéaire. On suppose que l'écoulement moyen se superpose à l'écoulement oscillant. Les variables dépendantes du temps et de l'espace sont alors écrites en distinguant les grandeurs à l'état du repos ( $\rho_0, p_0$ ), les perturbations acoustiques ( $\rho', p', \vec{v}'$ ) et l'écoulement moyen ( $\rho_m, p_m, \vec{v}_m$ ) superposé :

$$\rho = \rho_0 + \rho' + \rho_m \quad p = p_0 + p' + p_m \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_m \quad (9)$$

Par ailleurs, on suppose que :

- La pression ne dépend que de la composante longitudinale [5] pour les mêmes raisons que le cas linéaire.
- Le nombre de Mach acoustique est considéré très petit devant l'unité. Cette hypothèse permet d'utiliser la méthode des approximations successives afin de linéariser les équations (1-4)
- L'écoulement est supposé stationnaire et son nombre de Mach est supposé inférieur à 0.3. L'écoulement peut par conséquent être considéré comme incompressible.
- Le nombre de Reynolds non-linéaire est supposé très petit devant l'unité. Le terme d'advection est donc négligeable devant le terme de viscosité et le mouvement associé à l'écoulement redressé peut être ainsi considéré comme lent.
- Le gradient de température est supposé négligeable dans la zone étudiée et la viscosité de cisaillement est supposée constante.
- Le débit massique à travers une section transversale est considérée comme nul.

Sous ces hypothèses, les équations fondamentales du vent acoustique s'écrivent [3] :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{u}_m) = S \quad (10)$$

$$\vec{0} = \vec{F} - \operatorname{grad} p_m + \mu \frac{\partial^2 \vec{u}_m}{\partial y^2} \quad (11)$$

Avec

$$S = -\operatorname{div}(\overline{\rho' \vec{u}'}) \quad F_i = -\left( \frac{\partial \overline{\rho_0 u'_k u'_i}}{\partial x_k} \right) - \left( \frac{\partial \overline{\rho' u'_k u_{mi}}}{\partial x_k} \right) - \left( \frac{\partial \overline{\rho' u'_i u_{mk}}}{\partial x_k} \right) - \left( \frac{\partial \overline{\rho' u'_i u'_k}}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

La résolution de ces équations à l'ordre 2 conduit aux expressions suivantes :

$$u_m = \frac{3}{8\omega\rho_0^2c_0^2} \left( \frac{y^2}{R_0^2} - 1 \right) Re \left( i\Psi_1 p_1 \cdot \left( \frac{dp_1}{dx} \right)^* \right) + \frac{1}{2\omega\rho_0c_0^2} Re \left( i\Psi_2 p_1 \cdot \left( \frac{dp_1}{dx} \right)^* \right) \quad (13)$$

$$\frac{dp_m}{dx} = \frac{3}{2c_0^2\rho_0} Re \left[ \Psi_3 p_1 \cdot \left( \frac{dp_1}{dx} \right)^* \right] \quad (14)$$

$\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  sont des fonctions qui dépendent de plusieurs paramètres tels que les propriétés du fluide (viscosité, masse volumique...) et les caractéristiques géométriques du système (diamètre, pulsation...).  $R_0$  est le rayon de la conduite. Signalons qu'afin de déterminer le champ de l'écoulement moyen, il est nécessaire au préalable de valider et de quantifier le champ de pression acoustique théorique.

### 3 Dispositif expérimental

Les essais ont été réalisés avec un moteur thermoacoustique annulaire de type Stirling comme l'illustre la figure 1. Le dispositif expérimental est composé d'une boucle annulaire prolongée par un résonateur rectiligne. Ce système de conversion d'énergie dépourvu de pièce mobile présente une fiabilité élevée. Une source électrique a été utilisée afin d'apporter la chaleur nécessaire à l'échangeur chaud. L'échangeur froid est alimenté par une circulation d'eau. L'association de ce résonateur de 4,25 m de long à cette boucle annulaire permet au système de fonctionner à une fréquence de 22 Hz. Cinq capteurs de pression piézoélectriques ont été montés le long du dispositif résonateur-boucle. Ce dispositif contenant du diazote permet d'effectuer des essais sous une pression moyenne allant jusqu'à 30 bar. Un capteur piezorésistif disposé en Cp5' est utilisé afin de mesurer la pression moyenne.

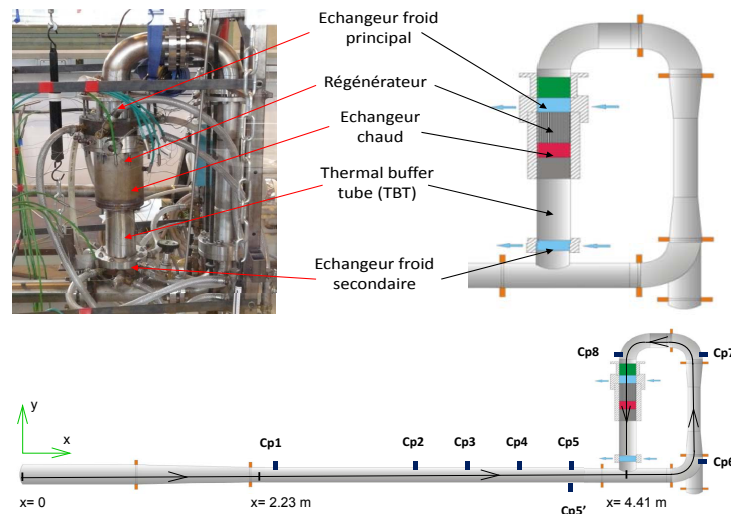


FIGURE 1 – Moteur thermoacoustique à onde progressive.

### 4 Résultats et interprétations

La figure 2 représente la variation de l'amplitude de la pression acoustique le long du résonateur pour une puissance de chauffe de 207 W pour plusieurs pressions moyennes (a) et pour une pression moyenne de 14 bar pour plusieurs puissances de chauffe (b). Un noeud de pression est observé à la position  $x = 2.23$  m pour toutes pressions moyennes et pour toutes puissances de chauffe. L'écart relatif entre les valeurs théoriques et expérimentales est estimé à moins de 10%. On observe que l'amplitude de la pression acoustique est moins importante entre 0 et 2.23 m qu'entre 2.23 m et 5.45 m. Cette variation peut s'expliquer par un rétrécissement du diamètre de la section transversale. Pour une puissance de chauffe de 207 W, l'amplitude de pression augmente avec la pression moyenne (figure 2a) et pour une pression moyenne de 14 bar, l'amplitude de la pression acoustique augmente avec la puissance de chauffe (figure 2b).

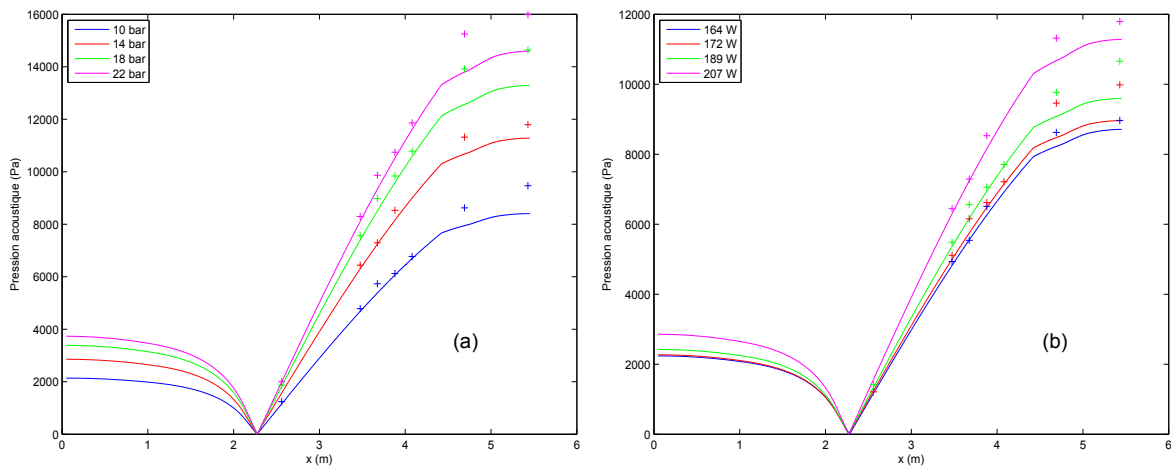


FIGURE 2 – Distribution de la pression acoustique pour une puissance de chauffe de 207 W (a) pour une pression moyenne de 14 bar (b).

La figure 3 (a) représente les variations du gradient de la pression moyenne temporelle d'ordre 2 pour une puissance de chauffe de 207 W pour plusieurs pressions moyennes. La figure 3 (b) représente les variations du gradient de la pression moyenne temporelle d'ordre 2 pour une pression moyenne de 14 bar (b) pour plusieurs puissances de chauffe. Ce gradient de pression s'annule en  $x=0$  et  $x=2.23$  m. Entre ces deux positions, le gradient est négatif. Entre 2.23 m à 4.41 m, il devient positif. Notons que l'amplitude du gradient de la pression de l'écoulement est plus faible entre 0 et 2.23 m qu'entre 2.23 m et 4.41 m. Cette augmentation d'amplitude peut s'expliquer par le changement du champ acoustique liée à la diminution de la section. Par ailleurs, l'amplitude du gradient de pression augmente avec la puissance de chauffe.

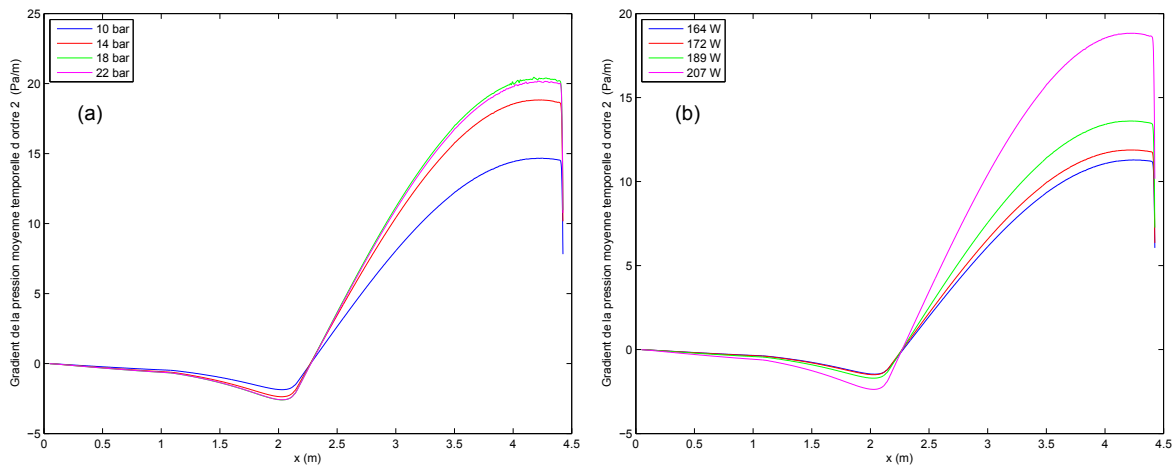


FIGURE 3 – Distribution du gradient de la pression moyenne temporelle d'ordre 2 pour une puissance de chauffe de 207 W (a) et pour une pression moyenne de 14 bar (b).

Les figures 4 (a) et 4 (b) représentent respectivement l'évolution de la vitesse axiale du vent acoustique le long du résonateur pour la position  $y=0$  pour une puissance de chauffe de 207 W pour plusieurs pressions moyennes et pour une pression moyenne de 14 bar pour plusieurs puissances de chauffe. Cette vitesse s'annule en  $x=0$  (condition de non pénétration de la paroi) et en  $x=2.23$  m correspondant à un noeud de pression. La vitesse du vent acoustique axiale est dirigée dans le sens des  $x$  croissant de 0 à 2.23 m pour changer de direction entre 2.23 m et 4.41 m. Ainsi dans l'ensemble du résonateur, la vitesse axiale de l'écoulement redressé, en  $y=0$ , est orientée vers le noeud de pression acoustique.

Ce résultat confirme les résultats obtenus par d'autres modèles théoriques [4, 3]. On constate que l'amplitude de la vitesse de l'écoulement est plus faible entre 0 et 2.23 m qu'entre 0 et 4.41 m. Cette augmentation de l'amplitude est due, une fois de plus, au changement du champ acoustique liée à la diminution de la section. Par ailleurs, l'amplitude de la vitesse acoustique augmente avec la puissance de chauffe.

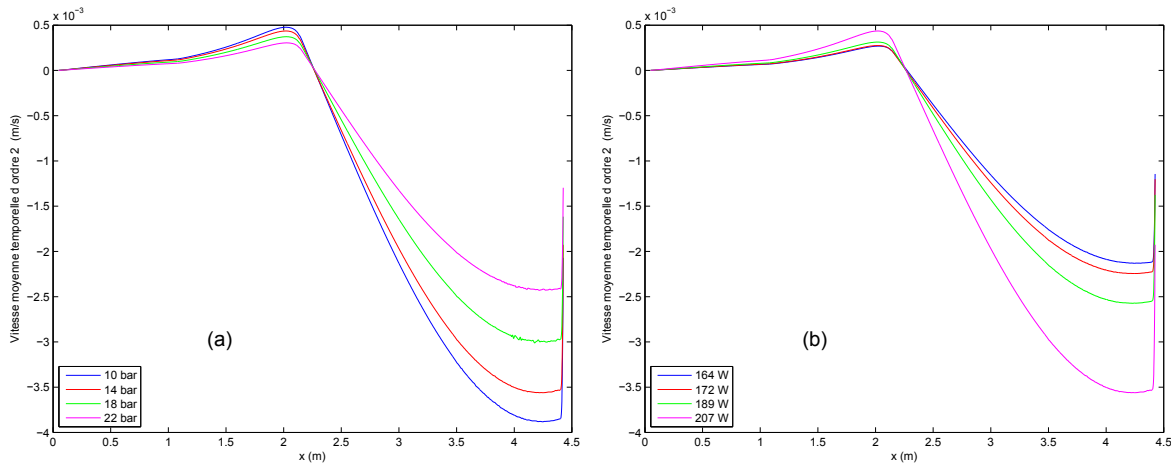


FIGURE 4 – Distribution de la vitesse axiale du streaming pour une puissance de chauffe de 207 W (a) et pour une pression moyenne de 14 bar (b).

## 5 Conclusion

Le champ théorique de pression acoustique a été comparé aux valeurs expérimentales dans un système thermoacoustique à boucle annulaire. L'écart relatif inférieur à 5.4 % entre les valeurs théoriques et expérimentales du champ acoustique dans le résonateur conforte la validité du modèle théorique utilisé. Une méthode de caractérisation du vent acoustique, de type lent dans tous systèmes thermoacoustiques, a été établie et les champs théoriques du gradient de pression et de vitesse moyenne temporelle d'ordre 2, caractéristiques des phénomènes non-linéaires, ont été déterminés pour le moteur thermoacoustique à boucle annulaire. Ces paramètres sont indispensables à l'évaluation des dissipations énergétiques dues aux phénomènes acoustiques non-linéaires dans les systèmes thermoacoustiques.

## Références

- [1] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, M. Bruneau 2000 Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 108, No. 3 934-945
- [2] M. Miwa, T. Sumi, T. Biwa, Y. Ueda, T. Yazaki 2006 Measurement of acoustic output power in a traveling wave engine *Ultrasonics* Vol. 44, 1527-1529
- [3] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, R. A. Hiller 2001 Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 110, No. 4 1808-1821
- [4] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E. A. Zabolotskaya 2002 Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 113, No. 4 153-160
- [5] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E. A. Zabolotskaya 2002 Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 111, No. 4 2076-2086
- [6] W.P. Arnott, H.E. Bass, R. Raspet 1991 General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross sections *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 90, No. 6 3228-3237
- [7] I. Paek, J. E. Braun, L. Mongeau 2007 Evaluation of standing-wave thermoacoustic cycles for cooling applications *International Journal of Refrigeration* Vol. 30, 1059-1071
- [8] L. Menguy and J. Gilbert 2000 Non-linear Acoustic Streaming Accompanying a Plane Stationary Wave in a Guide *Acustica. acta acustica* Vol. 86, 249-259