Sur une généralisation de l'opérateur fractionnaire

Thomas M. Michelitsch[1]*, *Gérard A. Maugin*[1]

Shahram Derogar[2]

Andrzej F. Nowakowski[3], *Franck C. G. A. Nicolleau*[3]

[1] Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Institut Jean le Rond d'Alembert
CNRS UMR 7190
France
[2] School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering
The University of Manchester
Royaume Uni
[3] Sheffield Fluid Mechanics Group, Department of Mechanical Engineering
University of Sheffield
Royaume Uni

March 7, 2011

Résumé Cette communication a pour but de proposer une généralisation de la notion de dérivée traditionnelle afin d'inclure les dérivées fractionnaires comme celles de Riemann-Liouville, Gruenwald-Letnikov, Weyl, Riesz, Caputo, Marchaud et d'autres variantes comme cas particuliers. Nous le démontrons de manière explicite pour la dérivée de Marchaud. Afin de définir cette notion il convient d'employer le calcul d'opérateurs linéaires. La notion de dérivée généralisée est susceptible non seulement de reproduire les dérivées et intégrales traditionelles et fractionnaires mais aussi de définir de nouvelles espèces de "dérivées" qui peuvent être utiles pour traiter certains problèmes de mécanique en milieux sans echelles internes (fractals) [2].

mots clé: Dérivée généralisée, dérivée fractionnaire, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, différence fractionnaire, calcul d'opérateurs

1 INTRODUCTION

Le but du calcul fractionnaire qui a environ 300 ans est d'appréhender le problème des ordres non-entiers des dérivées traditionnelles. Comme il est bien connu, l'extension de la notion de dérivée aux ordres non-entiers ne se fait pas de manière unique. Du coup, il en existe plusieurs variantes. Nous nous référons à l'ouvrage classique d'Oldham et Spanier [4] et à d'autres auteurs dont nous ne citons que [1, 3, 5, 6].

Cette communication a pour but d'introduire une généralisation des notions de "dérivée" et d'"intégrale" afin de mettre en place un outil mathématique permettant d'aborder quelques problémes nouveaux en mécanique des matériaux auto-similaires. Pour cela il convient d'employer l'opérateur de translation T défini par

$$T(h)f(x) = f(x+h) \ ,\forall x, h \in \mathbb{R} \tag{1}$$

*Auteur correspondant, couriel : michel@lmm.jussieu.fr

Pour éviter trop de complications nous nous restreignons ici à des fonctions continues, soit plusieurs fois différentiables, soit non-différentiables. On observe que $T(h_1)T(h_2) = T(h_1 + h_2)$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ avec $T(0) = 1$ et $T^a(h) = T(ah)\,, a \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ est sufisamment lisse (lipschitzienne) on peut identifier

$$T(h) = e^{hD_x} \tag{2}$$

où $D_x = \frac{d}{dx}$ dénote la dérivée traditionnelle du premier ordre. Dans cette communication nous construisons des opérateurs qui s'appliquent aux fonctions continues remplissant la condition de Hölder [1]:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C\, h^{\delta} \ , \qquad\qquad 0 < \delta \leq 1 \tag{3}$$

pour x et $x+h$ étant dans le domaine de $f(x)$. C désigne une constante et δ l'exposant de Hölder. Si $\delta \neq 1$ la fonction $f(x)$ n'est pas différentiable et par conséquent (2) n'existe pas. Le cas $\delta = 1$ correspond aux fonctions traditionnelles dites liptschitziennes.

2 Motivation et définition de dérivées et intégrales géneralisées

Cet paragraphe est consacré à une généralisation de la notion de dérivée incluant la notion de dérivée fractionnaire. Il en résulte un opérateur qui s'applique aux fonctions *höldériennes*. Pour motiver notre propos, considérons la dérivée d'ordre n entier ($n \in \mathbb{N}_0$) définie par

$$D_x^n f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \left(T(h) - 1\right)^n f(x) = \lim_{h \to 0} h^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh)\,, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4}$$

où $\lim_{h \to 0} T(nh) \to 1$ est utilisé. Dans (4) on a utilisé les notations habituelles $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec la fonction Γ définie par[1]

$$\beta! = \Gamma(\beta + 1) = \int_0^{\infty} \tau^{\beta} e^{-\tau} \mathrm{d}\tau\ , \beta \in \mathbb{R} > -1 \tag{5}$$

généralisant $\beta!$ pour les non-entiers verifiant[2] $\beta > -1$ et qui donne pour $\beta = n = 1, 2, .. \in \mathbb{N}$ $n! = \Pi_{k=1}^{n} k$. La restriction $\beta > -1$ assure la convergence de l'intégrale (5). Au vu de (4) la dérivée traditionnelle d'ordre n peut être ré-écrite comme

$$D^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(T(h))}{g(1+h)} f(x) \tag{6}$$

avec une fonction

$$g(\lambda) = (\lambda - 1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) \lambda^k, \qquad\qquad a(k) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \tag{7}$$

où nous ne nous intéressons qu'aux cas non-banals $n \geq 1 \in \mathbb{N}$. Nous dénommons par la suite la fonction $g(\lambda)$ "fonction constituante" ou en bref la "constituante". On observe dans l'exemple ci-dessus que

$$g(\lambda = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k) = 0 \tag{8}$$

A partir de cette observation nous appelons le cas limite

$$\mathcal{D}_g f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(T(h))}{g(1+h)} f(x) \tag{9}$$

[1] Il nous suffira ici de nous restreindre aux $\beta \in \mathbb{R}$.

[2] $Re(\beta) > -1$ si $\beta \in \mathbb{C}$.

"*dérivée* géneralisée", en bref "dérivée", si sa constituante satisfait (8), c'est-à-dire si $g(\lambda=1)=0$ et par conséquent la dérivée généralisée d'une constante est zéro. L'exemple le plus banal de cette notion est bien sûr la dérivée traditionnelle du premier ordre ayant la constituante $g(\lambda)=\lambda-1$. Inversement nous appelons (9) "*intégrale* généralisée" ou simplement "intégrale" si $g(\lambda=1)$ est singulière au point $\lambda=1$ à savoir

$$|\lim_{\lambda\to 1} g(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a(k)|\to\infty \tag{10}$$

Il s'ensuit que si une constituante $g(\lambda)$ réalise une dérivée, alors $1/g(\lambda)$ réalise une intégrale et vice versa. Pour tous les autres cas où $0<|g(1)|<\infty$, (9) peut être déterminée sans problème donnant le résultat banal $\mathcal{D}_g f(x)=f(x)$. Dans cette communication nous nous restreignons aux cas où la constituante a un comportement au voisinage de $\lambda=1$ comme une puissance : $(\lambda-1)^c$, $c\in\mathbb{R}$. Dans ce cas on peut également remplacer (9) par $\mathcal{D}_g f(x)=\lim_{h\to 0} g(1+[T(h)-1]/h)$.

D'abord nous donnons une évaluation qui est valable pour les cas où $\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda=1)<\infty, s\in\mathbb{N}_0$ et au moins d'ordre s_0 avec $\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda=1)\neq 0$. Pour cela nous posons

$$g(T(h))=g(\lambda+T(h)-1)|_{\lambda=1}=e^{(T(h)-1)\frac{d}{d\lambda}}g(\lambda)|_{\lambda=1} \tag{11}$$

ce qui peut être écrit en évaluant l'opérateur exponentiel comme

$$\begin{aligned} g(T(h))f(x) &= \sum_{s=0} \frac{1}{s!}(T(h)-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s} g(\lambda)|_{\lambda=1} f(x) \\ &= g(1)f(x)+(T(h)-1)f(x)\frac{d}{d\lambda}g(\lambda=1)+\frac{1}{2!}(T(h)-1)^2 f(x)\frac{d^2}{d\lambda^2}g(\lambda=1)+.. \end{aligned} \tag{12}$$

Par la suite tous les dépendances de h se comprennent dans le cas limite $h\to 0$ $(h>0)$[3]. Au cas où $f(x)$ serait infiniment différentiable on peut remplacer $(T(h)-1)^s f(x)=(e^{hD_x}-1)^s f(x)=h^s D_x^s f(x)$. Le cas limite $h\to 0$ de la série (12) est donc déterminé par l'ordre s_0 de dérivation de g le plus bas donnant une dérivée non-nulle, soit :

$$\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda=1)=0,\ \forall\, 0\leq s<s_0 \tag{13}$$

c'est à dire que $0<|\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}g(\lambda=1)|<\infty$. Il s'ensuit que l'ordre dominant dans (12) pour $h\to 0$ est donc l'ordre s_0

$$g(T(h))f(x)=\frac{1}{s_0!}(T(h)-1)^{s_0}f(x)\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}g(\lambda=1)+.. \tag{14}$$

et

$$g(1+h)=\frac{h^{s_0}}{s_0!}\frac{d^{s_0}}{d\lambda^{s_0}}g(\lambda=1)+.. \tag{15}$$

afin d'arriver à

$$\mathcal{D}_g f(x)=h^{-s_0}(T(h)-1)^{s_0}f(x)=\frac{d^{s_0}}{dx^{s_0}}f(x) \tag{16}$$

qui n'existe qu'au cas où f serait s_0 fois differentiable de manière continue. (16) est valable si $|\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda=1)|<\infty$, $\forall s\in\mathbb{N}_0$. On se rend compte que l'opérateur $\mathcal{D}_g$ de (16) est local, il agit seulement sur $f(x)$ au point x. Toutefois, la localité de l'opérateur $\mathcal{D}_g$ n'est pas conservée si la constituante g possède des dérivées singulières au point $\lambda=1$, c'est-à-dire s'il existe un ordre s_1 tel que

$$|\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda\to 1)|=\infty\,,\, s\geq s_1=0,1,2,..\in N_0 \tag{17}$$

[3] Sans que "$h\to 0$" soit toujours explicitement écrit.

et $|\frac{d^s}{d\lambda^s}g(\lambda \to 1)| < \infty$ si $s < s_1$. Dans ces cas (9) devient non-local. La briéveté qui s'impose pour cette communication, nous oblige à démontrer seulement que les dérivées fractionnaires sont également comprises dans la notion de dérivée généralisée (9). Supposons la constituante

$$g(\lambda) = (\lambda - 1)^\alpha\,, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{18}$$

avec l'exposant α non-entier. Pour $0 < \alpha < 1$ la constituante (18) appartient à la catégorie (8) et par conséquent (9) s'écrit

$$\mathcal{D}_g f(x) = h^{-\alpha}\,(T(h) - 1)^\alpha\, f(x) \tag{19}$$

par définition d'une dérivée[4] fractionnaire [4]. Nous supposons que la fonction $f(x)$ est choisie telle que $(T(h) - 1)^\alpha$ produise une série convergente soit

$$\mathcal{D}_g f(x) = D_x^\alpha f(x) = h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \tag{20}$$

où nous avons utilisé le fait que $(T(h) - 1)^\alpha = T(\alpha h)(1 - T(-kh))^\alpha = (1 - T(-kh))^\alpha$ car $T(h\alpha) = 1$ dans le cas limite $h \to 0$. On tient compte de la décomposition $T(-hk) = (T(-h) - 1 + 1)^k$

$$T(-kh) = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{k}{s} (T(-h) - 1)^s \tag{21}$$

Or il convient d'abord d'évaluer la série d'opérateurs

$$S(k_0, h) = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \binom{\alpha}{k} T(-kh) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \binom{k}{s} (T(-h) - 1)^s \tag{22}$$

qui peut être ré-écrite comme

$$S(k_0, h) f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s(k_0)(T(-h) - 1)^s f(x) \tag{23}$$

et avec

$$A_s(k_0) = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \binom{k}{s} = (-1)^{k_0} \binom{\alpha - (s+1)}{k_0 - s} \binom{\alpha}{s} = \frac{-\alpha}{s - \alpha} (-1)^{k_0} \binom{\alpha - 1}{k_0} \binom{k_0}{s}\,, \qquad s = 0, 1, 2, .. \in \mathbb{N}_0 \tag{24}$$

Alors on trouve pour (23)

$$S(k_0, h) f(x) = (-1)^{k_0} \binom{\alpha - 1}{k_0} f(x) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s(k_0)(T(-h) - 1)^s f(x) \tag{25}$$

En vue de (20) nous sommes surtout intéressés par les représentations asymptotiques pour $k_0 \gg 1$ à savoir

$$\binom{\alpha - 1}{k_0} (-1)^{k_0} = \frac{(k_0 - \alpha)!}{(-\alpha)! k_0!} \to \frac{k^{-\alpha}}{(-\alpha)!}\,, \qquad k_0 \gg 1 \tag{26}$$

et

$$\binom{k_0}{s} \to \frac{k_0^s}{s!}\,, \qquad k_0 \gg 1 \tag{27}$$

où $(-\alpha)!$ est défini par (5). Pour $k_0 \gg 1$ on a donc

$$A_s(k_0) \to \frac{-\alpha}{s - \alpha} \frac{k_0^s}{s!} \frac{k^{-\alpha}}{(-\alpha)!}\,, \qquad s = 0, 1, 2, ..\infty \tag{28}$$

[4] Si $\alpha < 0$ g est du type (10) et dans ce cas (19) définit une *intégrale* fractionnaire.

où il faut distinguer les cas $s = 0$ et $s > 0$ soit[5]

$$A_s(k_0) = \frac{-\alpha}{(s-\alpha)} \frac{k_0^{s-\alpha}}{(-\alpha)!s!} = \begin{cases} \dfrac{k_0^{-\alpha}}{(-\alpha)!} & s = 0 \\ \displaystyle\int_0^{k_0} \frac{k^s}{s!} \frac{(-\alpha)k^{-(\alpha+1)}}{(-\alpha)!} \mathrm{d}k & s \geq 1 \end{cases} \tag{29}$$

Il s'ensuit que

$$S(k_0, h) = A_0(k_0) f(x) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s(k_0)(T(-h) - 1)^s f(x) \tag{30}$$

La relation (30) est valable aussi pour les fonctions non-différentiables (höldériennes), voire pour les fonctions non-continues. Ici, il nous faut rendre compte du caractère de la fonction f : si $f(x)$ est infiniment différentiable (lipschitzienne), on peut poser $T(-h) = e^{-hD_x}$ et dans le cas limite $h \to 0$ on peut poser $(T(-h) - 1)^s f(x) = (-1)^s h^s D_x^s f(x)$. En tenant compte de (29) on obtient, pour $k_0 \gg 1$, en introduisant la variable continue $0 \leq \tau = hk \leq \tau_0 = hk_0$:

$$S(k_0, h) = h^{\alpha} \left\{ \frac{\tau_0^{-\alpha}}{(-\alpha)!} f(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_x^s f(x) \int_0^{\tau_0} \frac{\tau^s}{s!} \frac{(-\alpha)\tau^{-(\alpha+1)}}{(-\alpha)!} \mathrm{d}\tau \right\} \tag{31}$$

On s'aperçoit que la somme à partir de $s = 1$ est une convolution de la série de Taylor de $f(x - \tau) - f(x)$. On peut donc ré-écrire (31) comme

$$S(k_0, h) = h^{\alpha} \left\{ \frac{\tau_0^{-\alpha}}{(-\alpha)!} f(x) + \int_0^{\tau_0} (f(x - \tau) - f(x)) \frac{(-\alpha)\tau^{-(\alpha+1)}}{(-\alpha)!} \mathrm{d}\tau \right\} \tag{32}$$

(32) est valable pour $k_0 \gg 1$ avec $\tau_0(h) = hk_0$. Le cas limite $h \to 0$ de (32) qui détermine (20) dépend du choix de $\tau_0(h)$ à condition que $k_0 \gg 0$. Il faut souligner que dans (31), (32) la séquence des processus limites joue :

$$\lim_{h \to 0} \left(\lim_{k_0 \to \infty} S(k_0, h) \right) \neq \left(\lim_{h \to 0} S(k_0(h)) \right), \qquad \text{avec} \lim_{h \to 0} k_0(h) \to \infty \tag{33}$$

Pour cette raison, il y a autant de définitions différentes de la dérivée fractionnaire dans la littérature (e.g. [4]).

Considérons le cas du membre gauche de (33) à savoir $k_0 \to \infty$ alors que h est infinitesimal et fixe. On a donc dans ce cas toujours comme limite supérieure d'intégration $\tau_0 = hk_0 \to \infty$ dans (32) et on obtient

$$D_x^{\alpha} f(x) = h^{-\alpha} S(k_0 = \infty, h) = \int_0^{\infty} (f(x - \tau) - f(x)) \frac{(-\alpha)\tau^{-(\alpha+1)}}{(-\alpha)!} \mathrm{d}\tau \tag{34}$$

qui peut être ré-écrit comme

$$D_x^{\alpha} f(x) = \frac{(-\alpha)}{(-\alpha)!} \int_{-\infty}^{x} (x - t)^{-(\alpha+1)} (f(t) - f(x)) \, \mathrm{d}t \tag{35}$$

Les expressions (34)-(35) sont connues comme *dérivées fractionnaires de Marchaud*[6] (Eq. (12) dans [1]). On se rend compte que (34) n'existe qu'aux cas où $|f(x - \tau) - f(x)|$ se comporte pour $\tau \to 0$ comme $C\tau^{\delta}$ avec $\delta > \alpha$, c'est-à-dire si $f(x)$ est höldérienne, son exposant doit être tel que $0 < \alpha < \delta \leq 1$ où le cas $\delta = 1$ correspond aux fonctions traditionnelles lipschitziennes. On a la proprieté désirée que $D_x^{\alpha}(const) = 0$. A condition que $f(x)$ soit une fois différentiable, on arrive à

$$D_x^{\alpha} f(x) = D_x^{\alpha-1}(D_x f(x)) = D_x(D_x^{\alpha-1} f(x)) = D_x \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-\alpha}}{(-\alpha)!} f(x - \tau) \mathrm{d}\tau \tag{36}$$

[5] A remarquer $A_0(k_0 \to \infty) = 0$ étant une conséquence de (8) et et $A_s(k_0 \to \infty) = \infty$ pour $s > 0$.

[6] Malheureusement il existe une certaine confusion sur cette dénomination dans la litérature. Nous avons adopté celle de [1], mais on devrait y trouver des dénominations différentes.

où l'intégrale correspond tout à fait à ce qu'on déduit pour $D_x^{\alpha-1}f(x)$ à partir de (9)[7]. Afin d'obtenir (34), (35), on a supposé que $f(x)$ remplit les conditions suivantes

$$\lim_{\tau\to 0}|f(x)-f(x-\tau)| \leq C_0(x)\tau^{\delta}$$
$$\lim_{\tau\to\infty}|f(-\tau)| \leq C_\infty \tau^{\beta} \tag{37}$$

avec $\beta < \alpha < \delta \leq 1$. Les relations (34), (35) sont donc plus générales que (36) qui exige que f soit une fois différentiable et par conséquent $\delta = 1$. Nous rappelons que nous avons toujours supposé que $0 < \alpha < 1$. On observe que $f(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda > 0$, pour la convergence[8]) est une fonction propre de l'opérateur D_x^α à savoir

$$D_x^\alpha e^{\lambda x} = h^{-\alpha}(1-T(-h))^\alpha e^{\lambda x} = h^{-\alpha}(1-e^{-h\lambda})^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}$$
$$D_x^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{(-\alpha)!}e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda^\alpha e^{\lambda x} \tag{38}$$

Le fait que $e^{\lambda x}$, qui est fonction propre de l'opérateur de translation $T(-h)e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-h)} = e^{-h\lambda}e^{\lambda x}$, reste aussi une fonction propre de D_x^α de (35), (36) réside dans le fait que ces deux opérateurs agissent dans le même espace de fonctions défini sur le domaine $-\infty < x < \infty$[9].

3 Conclusions

Nous avons introduit le concept d'une dérivée (et intégrale) généralisée qui est susceptible de reproduire les dérivées fractionnaires, ce que nous avons démontré à l'aide de la dérivée fractionnaire de Marchaud (eqs. (34)-(36)). De telles dérivées peuvent être définies par des cas limites à partir de la relation (9) ou par des relations semblables légèrement modifiées. Dans certains cas on déduit des convolutions permettant de capturer des effets non-locaux dans l'espace ou dans le temps. Par exemple, ce concept permet d'aborder certains systèmes mécaniques comportant des interactions inter-particulaires à longue distance comme il s'en produit dans les milieux ayant une microstructure sans échelle (auto-similaires) [2].

References

[1] B. Ross, S.G. Samko, E. Russel Love, Functions that have no First Order Derivative might have Fractional Derivatives of all Orders Less than One, Real Analysis Exchange 20(2) (1994/5), 140-157.

[2] T. M. Michelitsch, G. A. Maugin, F. C. G. A. Nicolleau, A. F. Nowakowski, and S. Derogar, Dispersion relations and wave operators in self-similar quasicontinuous linear chains, Phys. Rev. E 80, 011135 (2009).

[3] Miller, K. S. and Ross, B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley, 1993.

[4] Oldham, K. B. and Spanier, J. The Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order. New York: Academic Press, 1974.

[5] Riesz, Marcel (1949), L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Mathematica 81: 1223, doi:10.1007/BF02395016, MR0030102, ISSN 0001-5962.

[6] S. Samko, A. Kilbas and O. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach, London (1993).

[7] Dans notre classification $D_x^{\alpha-1}f(x)$ est une *intégrale* car $\alpha - 1 < 0$ et correspond à l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha - 1$ de Riemann-Liouville [3].

[8] $Re(\lambda) > 0$ si $\lambda \in \mathbb{C}$.

[9] Ce fait se traduit par la commutativité des deux opérateurs $T(h)$ et D_x^α.