

Représentation graphique des coefficients d'anisotropie des milieux élastiques généralisés

N. AUFRAY^a, R. BOUCHET^a, Y. BRÉCHET^b

a. Onera, 29 avenue de la Division Leclerc, 92322 CHÂTILLON CEDEX

b. SIMAP, 1130 rue de la Piscine, 38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX

Résumé :

On s'intéressera à des modèles d'élasticité généralisée : modèles se caractérisant par la prise en compte de longueurs internes. Nous introduirons une méthode graphique permettant de savoir, a priori, pour un modèle généralisé quelconque et pour un groupe de symétrie plan, le nombre de coefficients définissant l'opérateur de comportement associé. Cette approche permet d'obtenir les informations nécessaires pour dériver l'expression analytique de l'opérateur concerné.

Abstract :

In this paper, our attention will be focused on generalized elasticity models. Those models take into account size effects in their formulations. A graphical method will be introduced to determine the number of coefficients describing the operator in a plane anisotropic class. This approach allows one to collect informations about the behavior before deriving the operators explicitly

Mots clefs : Élasticité linéaire, milieux continus généralisés, anisotropie, tenseur.

1 Introduction

Nous nous intéressons au cas d'un comportement linéaire général. Ce comportement est supposé descriptible par un tenseur, et nous regarderons les liens qu'il existe entre les symétries du domaine matériel et le nombre de coefficients définissant le tenseur. La section 2 résume quelques définitions liées aux propriétés de symétrie. Nous présentons ensuite, section 3, la notion de décomposition tensorielle. Ces décompositions nous permettent d'introduire une représentation sous forme de tableau de l'espace vectoriel d'un tenseur donné. Les conditions de G -invariance des tenseurs sont introduites à la section 4. Ceci nous permet d'énoncer des règles graphiques de détermination de la dimension des sous-espaces anisotropes (dans le cas plan). Nous concluons sur des exemples concernant le cas du tenseur élastique du second-gradient.

2 Symétries matérielles et physiques

Dans la suite, \mathcal{E}^3 représentera l'espace euclidien à 3 dimensions. Soit G un groupe de transformation, un milieu, \mathcal{M} , est dit G -invariant s'il est laissé invariant sous l'action de G . Cet ensemble, le groupe des symétries matérielles, sera noté $G_{\mathcal{M}}$.

$$G_{\mathcal{M}} = \{Q \in O(3), \quad Q \star \mathcal{M} = \mathcal{M}\} \quad (1)$$

\star représente l'action de Q sur \mathcal{M} et est $O(3)$ le groupe orthogonal de dimension 3. Considérons maintenant une propriété physique \mathcal{P} définie sur \mathcal{M} , l'ensemble des transformations laissant cette propriété invariante est le groupe des symétries physiques, noté $G_{\mathcal{P}}$.

$$G_{\mathcal{P}} = \{Q \in O(3), \quad Q \star \mathcal{P} = \mathcal{P}\} \quad (2)$$

\mathcal{P} sera décrite ici par un tenseur \mathbb{T}^n d'ordre n , \mathbb{T}^n représentera l'espace vectoriel associé. Dans le cas de propriétés décrites par des tenseurs d'ordre pair, la définition précédente se réduit à l'étude de $SO(3)$, le groupe des transformations propres. Nous nous plaçons dans ce cas de figure. De plus les deux groupes de symétrie sont liés par le principe de Neumann [1] :

$$G_{\mathcal{M}} \subseteq G_{\mathcal{P}} \quad (3)$$

Cela signifie que toute opération laissant le milieu invariant laisse invariante la propriété. Toutefois comme montré par les théorèmes d'Hermann [2] la réciproque est fautive, le groupe des symétries physiques peut être

strictement plus grand que celui matérielles. Dans \mathcal{E}^3 , $G_{\mathcal{P}}$ est le conjugué d'un sous-groupe de $SO(3)$ [1]. La collection de ces sous-groupes est [3] :

$$\Sigma := \{I, Z_p, D_p, SO(2), O(2), \mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}, SO(3)\} \quad (4)$$

avec I l'identité ; Z_p le groupe cyclique d'ordre p (le groupe de symétrie d'un p -gone chirale) ; D_p le groupe diédral d'ordre 2 (le groupe de symétrie d'un p -gone régulier¹) ; $SO(2)$ le groupe des rotations planes et $O(2)$ le groupe des transformations propres du plan ; \mathcal{T} le groupe de symétrie du tétraèdre, \mathcal{O} celui de l'octaèdre et \mathcal{I} de l'icosaèdre. Pour étudier les classes de symétrie il est nécessaire de décomposer nos tenseurs en éléments simples.

3 Décompositions tensorielles

Nous introduisons ici deux décompositions successives de l'espace vectoriel du tenseur de comportement étudié. La première décomposition est appelée décomposition harmonique [3, 4], ou décomposition irréductible [5, 6], la deuxième est dite de Cartan [3]. La détermination de ces décompositions nous permet d'associer, à un espace vectoriel de tenseur, un tableau de « décomposition » [7] qui facilite l'étude des propriétés d'anisotropie de l'opérateur associé.

3.1 Décomposition harmonique

La décomposition d'un tenseur en éléments $O(3)$ -irréductibles s'appelle la décomposition harmonique. Cette décomposition nous permet d'écrire tout tenseur de comportement comme une somme de tenseurs irréductibles [6, 5]. On a

$$\mathbb{T}^n = \sum_{k,\tau} D(n)^{k,\tau} \quad (5)$$

où les tenseurs $D(n)^{k,\tau}$ sont les composantes irréductibles, k est l'ordre du tenseur harmonique assemblé dans $D(n)$ et τ distingue les termes de même ordre. Cette décomposition établit un isomorphisme entre \mathbb{T}^n et une somme directe d'espaces de tenseurs harmoniques \mathbb{H}^k [3]. Cela s'écrit

$$\mathbb{T}^n \cong \bigoplus_{k,\tau} \mathbb{H}^{k,\tau} \quad (6)$$

Toutefois cette décomposition n'est pas unique [4]. A l'opposé, la décomposition $O(3)$ -isotypique (7) qui groupe les termes de même ordre est unique.

$$\mathbb{T}^n \cong \bigoplus_{k=0}^n \alpha_k \mathbb{H}^k \quad (7)$$

avec α_k la multiplicité de \mathbb{H}^k dans la décomposition. Les tenseurs harmoniques étant totalement symétriques et de trace nulle, la dimension de leur espace vectoriel est :

$$\dim \mathbb{H}^k = 2k + 1 \quad (8)$$

Par soucis de simplicité, quand il n'y a pas de risque de confusion, les espaces $\alpha_k \mathbb{H}^k$ seront notés K^{α_k} : i.e. l'ordre de l'espace K puissance sa multiplicité α_k . Les éléments de la famille $\{\alpha_k\}$ dépendent de l'ordre du tenseur ainsi que de ses symétries indicelles. Pour exemple on considère l'espace vectoriel des tenseurs d'élasticité. En 3-D, celui-ci est isomorphe à $0^2 \oplus 2^2 \oplus 4$ qui est de dimension 21 [3]. Plusieurs méthodes existent pour déterminer cette famille [5, 6, 8]. On peut redécomposer, de manière plus fine, cette première décomposition.

3.2 Décomposition de Cartan

Sous l'action du groupe $O(2)$, les espaces \mathbb{H}^k se décomposent [4] :

$$\mathbb{H}^k \cong \bigoplus_{j=0}^k \mathbb{K}_j^k \quad (9)$$

¹ D_p contient Z_p et une π -rotation dans le plan.

avec

$$\dim \mathbb{K}_j^k = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 0 \\ 2 & \text{if } j \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Cette décomposition est la décomposition de Cartan de la décomposition harmonique. La relation (9) implique que la décomposition d'un élément \mathbb{H}^k contient tous les sous-espaces d'indice j dans l'intervalle $[0, k]$. Si \mathbb{H}^{*j} représente l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre j en 2-D on peut montrer que, pour chaque k , \mathbb{K}_j^k est isomorphe à \mathbb{H}^{*j} . De fait, \mathbb{H}^k est isomorphe à :

$$\mathbb{H}^k \cong \bigoplus_{j=0}^k \mathbb{H}^{*j} \quad (11)$$

La relation (7) peut se réécrire :

$$\mathbb{T}^n \cong \bigoplus_{k=0}^n \alpha_k \left(\bigoplus_{j=0}^k \mathbb{H}^{*j} \right) \cong \bigoplus_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \alpha_j \mathbb{H}^{*k} \cong \bigoplus_{k=0}^n \beta_k \mathbb{H}^{*k} \quad (12)$$

Cette décomposition est la décomposition O(2)-isotypique d'un tenseur de \mathcal{E}^3 .

Revenons à notre exemple de l'élasticité, dans \mathcal{E}^3 son espace vectoriel est isomorphe à $0^2 \oplus 2^2 \oplus 4$. D'après (12), sa décomposition planaire (O(2)-isotypique) est alors $0^{*5} \oplus 1^{*3} \oplus 2^{*3} \oplus 3^* \oplus 4^*$.

3.3 Tableau de décomposition

Les deux décompositions précédemment introduites peuvent être réécrites sous forme de diagrammes via l'utilisation d'un tableau de « décomposition » [7]. Dans le cas de l'élasticité classique celui-ci s'écrit :

α_k	\mathbb{H}^k	\mathbb{K}_0^k	\mathbb{K}_1^k	\mathbb{K}_2^k	\mathbb{K}_3^k	\mathbb{K}_4^k	$\dim \mathbb{H}^k$	$\alpha_k \dim \mathbb{H}^k$	Σ
2	0	□					1	2	2
2	2	□	□□	□□			5	10	12
1	4	□	□□	□□	□□	□□	9	9	21

(13)

ou bien encore dans le cas de l'élasticité second-gradient² [7] :

α_k	\mathbb{H}^k	\mathbb{K}_0^k	\mathbb{K}_1^k	\mathbb{K}_2^k	\mathbb{K}_3^k	\mathbb{K}_4^k	\mathbb{K}_5^k	\mathbb{K}_6^k	$\dim \mathbb{H}^k$	$\alpha_k \dim \mathbb{H}^k$	Σ
5	0	□							1	5	5
4	1	□	□□						3	12	17
10	2	□	□□	□□					5	50	67
5	3	□	□□	□□	□□				7	35	102
5	4	□	□□	□□	□□	□□			9	45	147
1	5	□	□□	□□	□□	□□	□□		11	11	158
1	6	□	□□	□□	□□	□□	□□	□□	13	13	171

(15)

Dans ce tableau les lignes représentent les éléments de la décomposition harmonique que les colonnes subdivisent en fonction de la décomposition de Cartan. La première colonne contient les multiplicités des espaces harmoniques. Les cases, dans la partie centrale du tableau, représentent les coefficients non nuls du tenseur. Et les trois dernières colonnes contiennent, respectivement, le nombre de coefficients non nuls pour l'espace \mathbb{H}^i , ce nombre multiplié par la multiplicité de cet espace, ainsi que les sommes partielles pour $i < k$.

Nous introduisons également ici la convention suivante utile pour la suite. Quand $j \neq 0$ un élément de \mathbb{K}_j^k est semblable à un vecteur de dimension 2. Nous noterons ce vecteur :

$$\mathbb{K}_j^k = \mathbb{H}^{*j} = \begin{pmatrix} g_j \\ d_j \end{pmatrix} \quad (16)$$

²Dont la décomposition harmonique est la suivante

$$\text{Sp}(\mathbb{E}la_{\mathbb{A}}) = \text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k (tm)n}) = 0^5 \oplus 1^4 \oplus 2^{10} \oplus 3^5 \oplus 4^5 \oplus 5 \oplus 6 \quad (14)$$

relativement au fait que la représentation de ce vecteur sous forme de cases serait :

$$\boxed{g \mid d} \quad (17)$$

c'est-à-dire, le coefficient de g(auche) et celui de d(roite). Pour $j = 0$ l'unique coefficient est du type g.

Ce tableau nous permet de déterminer de manière graphique le nombre de coefficients d'un opérateur linéaire dans une classe de symétrie donnée. Nous présentons ici les résultats concernant les groupes plans, l'extension aux groupes spatiaux peut être faite [7] mais est plus délicate à mettre en oeuvre.

4 Conditions d'invariance plane

Nous présenterons ici les critères analytiques liés aux invariances cyclique (Z_p) et diédrale (D_p). Ces critères se traduisent instantanément par des règles d'annulation des coefficients du tableau de décomposition.

4.1 Invariance cyclique

Soit G_{H^k} le groupe d'invariance de H^k , i.e. :

$$Q \in G_{H^k} \Rightarrow Q \star H^k = H^k \quad (18)$$

\mathbb{H}^k est isomorphe $\bigoplus_{j=0}^n \mathbb{H}^{*j}$. Donc, chaque $H^k \in \mathbb{H}^k$ est défini par une famille de tenseurs : $\{H^{*j}\}$. Cette décomposition étant $O(2)$ -invariante, l'invariance de H^k s'exprime par $j + 1$ conditions sur les éléments de sa décomposition planaire. Ces conditions sont de $j + 1$ différents types selon l'ordre des tenseurs harmoniques 2-D, i.e.

$$Q \star_j H^{*j} = H^{*j} \quad (19)$$

où \star_j représente l'action de $SO(2)$ sur \mathbb{H}^{*j} . Cette action s'explicite de la manière suivante. Soit $H^{*j} = (g_j, d_j)$ un vecteur de \mathbb{H}^{*j} . On considère la rotation $Q_{rot} \in SO(2)$ élément de Z_p , on écrit :

$$Q_{rot} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{p} & -\sin \frac{2\pi}{p} \\ \sin \frac{2\pi}{p} & \cos \frac{2\pi}{p} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Comme montré dans [4], Q_{rot} agit sur \mathbb{H}^{*j} comme une générateur de $Z_{\frac{p}{j}}$: l'ordre p de la rotation est divisé par l'indice du sous-espace de Cartan.

$$Q_{rot} \star H^{*j} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2j\pi}{p} & -\sin \frac{2j\pi}{p} \\ \sin \frac{2j\pi}{p} & \cos \frac{2j\pi}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_j \\ d_j \end{pmatrix} \quad (21)$$

De fait, si Q_{rot} appartient à G_{H^k} alors chaque H^{*j} doit être Q_{rot} -invariant. On note $Q_{rot}^{(j)}$ la matrice de l'action de Q_{rot} sur H^{*j} . La condition d'invariance de H^{*j} est solution de $(Q_{rot}^{(j)} - \text{Id})H^{*j} = 0$. En d'autres termes, on étudie $\ker(Q_{rot}^{(j)} - \text{Id})$. Un calcul direct montre que la condition d'invariance H^{*j} sous l'action de Z_p -action est :

$$j = tp, \quad t \in \mathbb{N} \quad (22)$$

4.2 Invariance diédrale

Le groupe diédral se construit à partir du groupe cyclique en rajoutant le générateur d'une rotation d'ordre 2 dans le plan, que nous noterons Z_2^p . Comme nous connaissons les conditions de Z_p -invariance, il nous reste à exprimer les conditions de Z_2^p -invariance. Nous noterons Q_π le générateur associé à Z_2^p . L'action de Q_π sur \mathbb{H}^k se transporte sur les \mathbb{H}^{*j} de la manière suivante [4] :

$$Q_\pi \star H^{*j} = \begin{pmatrix} (-1)^{k-j} & 0 \\ 0 & (-1)^{k-j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_j \\ d_j \end{pmatrix} \quad (23)$$

La condition d'invariance s'écrit dans ce cas là :

$$H^{*j} \in \ker \begin{pmatrix} (-1)^{k-j} - 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{k-j+1} - 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Cette opération annule systématiquement un terme de H^{*j} , le terme annulé est fonction de la parité de la différence entre k et j . On a

$$(k - j) = \begin{cases} 2t \Rightarrow d_j = 0 \\ 2t + 1 \Rightarrow g_j = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Or on a $(k - j)$ paire si k et j sont de même parité, et $(k - j)$ impaire dans le cas contraire.

Ces résultats nous permettent de définir des règles graphiques d'annulation des coefficients dans nos tableaux de décomposition.

4.3 Règles d'annulations

Ces règles seront illustrées sur l'exemple de la détermination du nombre de coefficients anisotropes d'un opérateur du second gradient D_3 -invariant. Du fait de la construction de D_3 cet opérateur est donc à la fois Z_3 et Z_2^p -invariant.

Dans la suite, nous noterons \boxed{o} un coefficient non nul et $\boxed{*}$ un coefficient nul.

Propriété 1 Soit un milieu Z_m -invariant. Les coefficients des sous-espaces associés aux colonnes du tableau de décomposition dont l'indice de Cartan n'est pas un multiple de m sont identiquement nuls.

Le tableau de décomposition s'écrit :

α_k	H^k	\mathbb{K}_0^k	\mathbb{K}_1^k	\mathbb{K}_2^k	\mathbb{K}_3^k	\mathbb{K}_4^k	\mathbb{K}_5^k	\mathbb{K}_6^k	$\dim H^k$	$\alpha_k \dim H^k$	Σ
5	0	\boxed{o}							1	5	5
4	1	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$						1	4	9
10	2	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$					1	10	19
5	3	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	\boxed{o} \boxed{o}				3	15	34
5	4	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	\boxed{o} \boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$			3	15	49
1	5	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	\boxed{o} \boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$		3	3	52
1	6	\boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	\boxed{o} \boxed{o}	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ $\boxed{*}$	\boxed{o} \boxed{o}	5	5	57

Regardons à présent l'effet d'une Z_2^p -invariance

Propriété 2 Soit un milieu Z_2^p -invariant. Les coefficients de type d du tableau de décomposition sont nuls dans les cases dans lesquelles les indices de Cartan et de l'espace harmonique sont de même parité. Les coefficients de type g du tableau de décomposition sont nuls dans les cases dans lesquelles les indices de Cartan et de l'espace harmonique sont de parité opposée.

α_k	H^k	\mathbb{K}_0^k	\mathbb{K}_1^k	\mathbb{K}_2^k	\mathbb{K}_3^k	\mathbb{K}_4^k	\mathbb{K}_5^k	\mathbb{K}_6^k	$\dim H^k$	$\alpha_k \dim H^k$	Σ
5	0	\boxed{o}							1	5	5
4	1	$\boxed{*}$	\boxed{o} $\boxed{*}$						1	4	9
10	2	\boxed{o}	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$					3	30	39
5	3	$\boxed{*}$	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$				3	15	54
5	4	\boxed{o}	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$			5	25	79
1	5	$\boxed{*}$	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$		5	5	84
1	6	\boxed{o}	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$	$\boxed{*}$ \boxed{o}	\boxed{o} $\boxed{*}$	7	7	91

Nous pouvons à présent conclure pour la D_3 -invariance.

Propriété 3 Soit un milieu D_m -invariant. L'ensemble des coefficients non-nuls du tableau de décomposition est l'intersection des coefficients non-nuls des tableaux de décomposition pour un milieu Z_m -invariant et un milieu Z_2^p -invariant.

Le tableau de décomposition s'écrit :

α_k	\mathbb{H}^k	\mathbb{K}_0^k	\mathbb{K}_1^k	\mathbb{K}_2^k	\mathbb{K}_3^k	\mathbb{K}_4^k	\mathbb{K}_5^k	\mathbb{K}_6^k	$\dim \mathbb{H}^k$	$\alpha_k \dim \mathbb{H}^k$	\sum
5	0	\mathcal{O}							1	5	5
4	1	*	**						0	0	5
10	2	\mathcal{O}	**	**					1	10	15
5	3	*	**	**	\mathcal{O} *				1	5	20
5	4	\mathcal{O}	**	**	* \mathcal{O}	**			2	10	30
1	5	*	**	**	\mathcal{O} *	**	**		1	1	31
1	6	\mathcal{O}	**	**	* \mathcal{O}	**	**	\mathcal{O} *	3	3	34

(28)

Un tenseur du second ordre D_3 -invariant est défini par la donnée de 34 coefficients sur les 171 coefficients totaux.

5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode permettant de représenter sous forme de tableau la structure d'un espace vectoriel de tenseur. Cette méthode permet de déterminer facilement la dimension du tenseur dans ses classes d'anisotropie. L'intérêt est double, cela permet, tout d'abord, d'obtenir des résultats généraux sur un comportement donné. Dans le cas d'un milieu du second gradient cet outil permet de montrer rapidement qu'un milieu ayant une symétrie hexagonal n'a pas un comportement isotrope transverse (contrairement à l'élasticité classique). De plus l'utilisation de cet outil est intéressante quand l'on veut dériver les matrices du comportement anisotrope associé[9]. Celui-ci nous permet de connaître le nombre de matrices à dériver ainsi que le nombre de coefficients de chacune de ces matrices. Cette connaissance, *a priori*, constitue une aide précieuse.

Le cadre d'utilisation de cet outil excède largement celui de l'élasticité linéaire et le formalisme est valable pour toutes les lois de comportement linéaires. Un domaine intéressant d'utilisation de cette approche est l'étude des couplages multiphysiques.

Références

- [1] Zheng Q.-S. and Boehler J. P. The description, classification, and reality of material and physical symmetries. *Acta Mechanica*, 102, 73–89, 1994.
- [2] Auffray N. Démonstration du théorème d'hermann à partir de la méthode forte-vianello. *Comptes Rendus -Mécanique-*, 336, 458–463, 2008.
- [3] Forte S. and Vianello M. Symmetry classes for elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 43, 81–108, 1996.
- [4] Golubitsky M., Stewart I., and Schaeffer D. G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Volume II.* Springer, 1989.
- [5] Jerphagnon J., Chemla D., and Bonneville R. The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors. *Advances in Physics*, 27, 609 – 650, 1978.
- [6] Zou W.-N., Zheng Q.-S., Du D.-X., and Rychlewski J. Orthogonal irreducible decompositions of tensors of high orders. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 6, 249–267, 2001.
- [7] Auffray N. Comportement des matériaux cellulaires : élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2008.
- [8] Auffray N. Décomposition harmonique des tenseurs -méthode spectrale-. *Compte Rendus -Mécanique-*, 336, 370–375, 2008.
- [9] Auffray N., Bouchet R., and Brechet Y. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46, 2009.