

Simulation par éléments Finis de l'Écoulement Viscoélastique dans une contraction 4:1 basé sur le modèle d'Oldroyd-B

H. BENMANSOUR^a, H. SAMMOUDA^a, R. BENNACER^b

a. LETTM, Ecole Supérieure des Sciences et de Technologie, Rue Amin ELAbbassi, 4011 Hammam Sousse (Tunisie)

b. LEEVAM, Université de Cergy-Pontoise, 2 Avenue Adolphe Chauvin BP222, 95302 Cergy Pontoise (France)

Résumé :

Les équations de Navier-Stokes et d'Oldroyd-B régissant l'écoulement viscoélastique dans une contraction 4 :1 sont résolues par une méthode MEF. Des termes de stabilisation sont développés. L'effet de certains paramètres sur l'écoulement a été analysé tels que ; la contraction, la quantité de polymère par rapport à celle du solvant, la vitesse d'injection du fluide ou le nombre de Weissenberg. Ces effets sont analysés à travers les champs de vitesse et les composantes du tenseur extra-contrainte.

Abstract:

The equations of Navier-Stokes and Oldroyd-B govern the viscoelastic flow in a 4:1 contraction are resolved by the MEF method. Terms of stabilization are developed. The effect of some parameters on the flow was analyzed, such as; contraction, the amount of polymer relative to the solvent, the injection speed of the fluid or the number of Weissenberg. These effects are analyzed through the velocity field and the tensor components of extra-constraint.

Mots clefs : Modèle d'Oldroyd-B, MEF, Nombre de Weissenberg, Termes de Stabilisation (Méthode des éléments finis)

1 Introduction

Les fluides viscoélastiques sont bien utilisés dans plusieurs domaines industriels que dans la vie courante. Ils sont utilisés sous généralement sous formes multicouches, dans une structure Sandwich et dans plusieurs domaines tels que le domaine spatiale, l'aérodynamique...etc. La description de leurs comportements, présente des difficultés malgré la simplicité des modèles physique. Ainsi, plusieurs formulations alternatives ont été aussi développées tels que ; le modèles PTT [1], Modèle d'Oldroyd-B[2]...

La problématique qui apparaisse dans la modélisation de ces fluides, se situe dans la stabilisation du schéma numérique, précisément au niveau du couplage entre le champ de vitesse et le tenseur de contrainte comportant le tenseur extra-contrainte dû à la présence de caractère élastique. Une telle difficulté est surnommé problème à " haut nombre de Weissenberg ".

Dans cette étude, nous avons utilisé pour la discrétisation spatiale la méthode des éléments finis [3] stabilisée à des termes de correction établies à partir de la méthode Galerkin [4] au niveau de la formulation faibles.

2 Le modèle d'Oldroyd-B

Nous nous intéressons ici à l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite Cette géométrie possède des cinématiques particulières (Figure 1) et présente l'avantage d'être considéré comme une référence dans la littérature [5] et [6], du fait de sa contraction 4 :1.

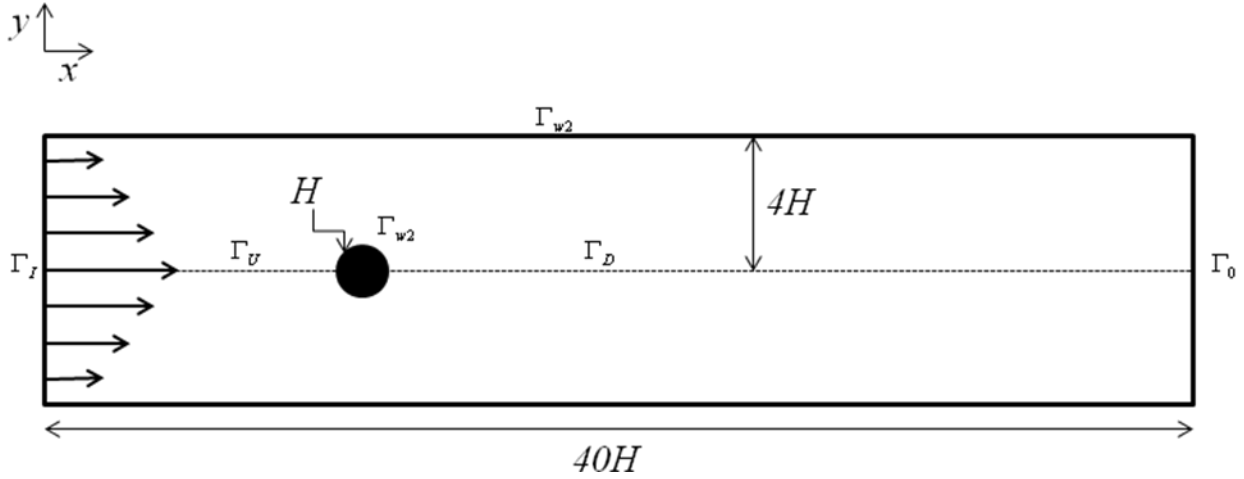


FIG. 1 – Description de domaine fluide

Le rapport entre les hauteurs des canaux d'entrée et de sortie est $4:1$ et on note H le rayon de la contraction. La longueur totale du domaine est $40H$, et la contraction est localisée en $x=14H$.

Cette conduite présente une symétrie géométrique et physique par rapport à l'axe horizontale, d'où on peut étudier le problème sur la moitié supérieure.

2.1 Mise en équations

Des nombreux fluides complexes d'intérêt sont viscoélastiques, ils présentent un comportement visqueux et de comportement élastique. Le modèle d'OLDROYD-B est capable de décrire le comportement des solutions de polymères viscoélastiques et les polymères fondus.

Les équations de Navier-Stokes et OLDROYD-B s'écrivent sous la forme suivante :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho_f \vec{b}_f + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ est le vecteur vitesse, $\vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes élastiques et visqueuses, ρ_f la masse volumique du fluide, \vec{b}_f le vecteur densité des forces volumiques qui s'exercent sur le fluide.

Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\vec{\sigma} = -p \vec{I} + 2\mu_2 \vec{d}(\vec{v}) + \vec{T} \quad (3)$$

Le terme $-p \vec{I} + 2\mu_2 \vec{d}(\vec{v})$ décrit la contrainte dû à la viscosité et \vec{T} le tenseur des extra-contraintes.

Le tenseur viscoélastique \vec{T} est solution de l'équation de comportement:

$$\vec{T} + \lambda \hat{\vec{T}} = 2\mu_1 \vec{d}(\vec{v}) \quad (4)$$

avec μ_1 la viscosité de polymère qui représente la portion du matériau viscoélastique dans le fluide, $\lambda \geq 0$ temps de relaxation, $Re = \frac{\rho v H}{\mu_1 + \mu_2} \geq 0$ est le nombre de Reynolds, $\hat{\vec{T}}$ vérifie l'équation suivante :

$$\hat{\vec{T}} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{T} - (\vec{\nabla} \vec{v} \vec{T} + \vec{T} (\vec{\nabla} \vec{v})^T) \quad (5)$$

et la viscosité totale $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

La symétrie de tenseur de contrainte élastique simplifie le calcul c'est-à-dire $T_{12} = T_{21}$, on écrit le tenseur $\bar{\bar{T}}$:

$$\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Notre problème est stationnaire donc nous éliminons les termes temporels.

Si on introduit des échelles de référence de vitesse, U_{in} , et de longueur H il apparaît le nombre de Weissenberg défini comme suit :

$$We = \frac{\lambda U_{in}}{H} \quad (7)$$

2.2 Conditions limites

A l'entrée Γ_I

On impose à l'entrée un débit de vitesse tel que $u = 1.5U_{in}(1-s^2)$, $w = 0$ avec $s = \frac{y}{H}$.

Pour le modèle d'Oldroyd-B, les conditions d'entrée pour l'extra-contrainte sont déduites de la solution d'un écoulement de Poiseuille plan. Les conditions suivantes sont donc imposées à l'entrée :

$$T_{11} = 18\mu_1 U_{in}^2 s^2, \quad T_{12} = -3\mu_1 U_{in} s, \quad T_{22} = 0$$

Sur l'axe de symétrie horizontal : Condition de symétrie Γ_U et Γ_D

La condition de symétrie sur l'axe horizontal s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = 0, \quad (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{t} = 0 \quad \text{avec } \bar{n} \text{ et } \bar{t} \text{ sont les vecteurs normale et tangentielle à cette frontière.}$$

A la sortie Γ_0

$$\bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{n} = -p_{out} \bar{n} \quad \text{avec } \bar{n} \text{ est le vecteur normal à la sortie.}$$

Les frontières imperméables Γ_{w1} et Γ_{w2} : Condition de non-glissement

Les frontières Γ_{w1} et Γ_{w2} sont des parois donc la vitesse est nulle : $\bar{v} = \bar{0}$ Et nous posons une condition de

non glissement pour le tenseur viscoélastique sur ces deux frontières telle que $(\bar{\bar{T}} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} = 0$ avec $\bar{n} = \begin{pmatrix} nx \\ xy \end{pmatrix}$.

3 Modélisation numérique

Nous considérons ici un écoulement d'un fluide viscoélastique (de type Oldroyd-B) de viscosité de polymère μ_1 et de viscosité de solvant μ_2 . La figure 2 montre la géométrie utilisée pour cette étude, le rapport entre les hauteurs des canaux d'entrée et de la contraction est 4 : 1, on note $H=0.05$ m la hauteur du canal de sortie, la longueur totale du domaine est $L=40H=2$ m et la contraction est localisée à la position $x=0.07$. Nous considérons ici uniquement la portée supérieur du domaine, et une condition de symétrie est appliquée sur la

frontière en $x=0$, une condition de non glissement ($\bar{v} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \bar{0}$) est appliquée sur la partie supérieure et le contour cylindrique du domaine de calcul et un débit de vitesse constant tel que $u = 1.5U_{in}(1-s^2)$, $w=0$ avec $U_{in} = 1.25$ m/s

Les conditions d'entrée pour le tenseur d'extra contraintes sont les suivantes $T11=18\lambda\mu_1U_{in}^2s^2$, $T12=-3\mu_1U_{in}s$, $T22=0$. Toutes les conditions citées au dessus sont de Dirichlet, seule à la sortie on impose une condition de type Neumann pour la pression $p_{out}=0$.

Nous considérons ici l'écoulement d'un fluide viscoélastique injecté à la vitesse caractérisée par un nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v H}{\mu_1 + \mu_2} = 10^{-3}$ calculé à partir de la vitesse débitante à l'entrée et de la hauteur H du

canal de sortie et par une viscosité totale $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 1Pa.s$. Les viscosités de polymère, de solvant et la masse volumique sont choisies telle que $\mu_1 = 0.1Pa.s$ et $\mu_2 = 0.9Pa.s$, $\rho = 6.4g/m^3$ Le nombre de

Weissenberg $We = \frac{\lambda U_{in}}{H}$ est ici fixé à 2, où $\lambda = 0.2$ le temps de relaxation du fluide. Le champ vitesse et

d'extra-contraintes sont calculés en deux étapes pour un but de plus de stabilité : En premier lieu, on résout l'équation de moment (profil newtonien). En deuxième lieu, on résout les deux équations (moment et extra-contraintes) en considérant, le champ de vitesse calculé en première étape comme une condition initiale du calcul viscoélastiques. La direction x est celle de l'écoulement et y a direction transverse à celle-ci, le maillage considéré comporte 872 nœuds et 1618 éléments triangulaires et 17677 nombre de degrés de liberté. Le maillage est raffiné à l'approche du changement de la section en $x=0$.

4 Résultats et discussions

4.1 Champ de vitesse et de contrainte : validation

La résolution du système d'équations nous a permis de représenter le champ de vitesse et d'extra contrainte le long de la conduite. Afin de valider nos modèles théoriques et nos simulations numériques, on a procédé à comparer nos résultats à ceux du Thomas.J.Graven et Al.[6], à travers les isovalues des trois composantes $T11$ du tenseur extra-contraintes, comme le montre la Figure 2 (abc) pour un temps de relaxation $\lambda = 0.6$ et un nombre de Weissenberg $We=2$. On note bien une concordance qualitative. En effet, les valeurs maximales et minimales de tenseur viscoélastique sont localisées au niveau de la contraction en $x=0.7 m$ comme prévu par la littérature [6].

4.2 Effet de la contraction

La figure 3 montre le champ de vitesse et les lignes de courant obtenu à partir du modèle différentiel d'OLDROYD-B pour $We=2$ On note bien l'effet de la contraction sur le champ de vitesse.

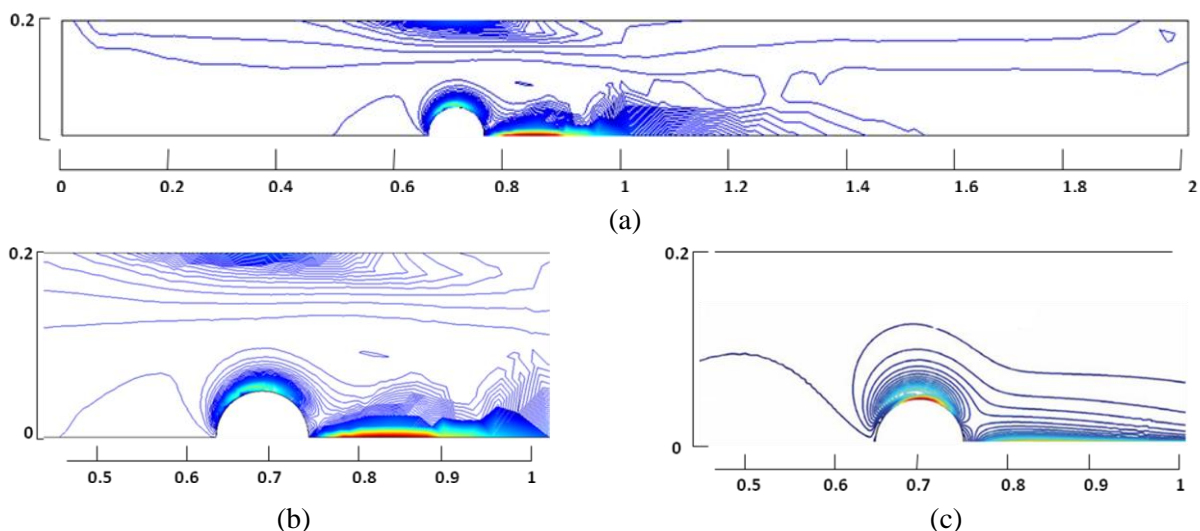


FIG. 2 – Isovalues de la composante normale $T11$ du tenseur extra-contraintes viscoélastiques, $We = 2, \lambda = 0.6$ (a,b) nos résultats et (c) Thomas J.Graven et Al. [6]

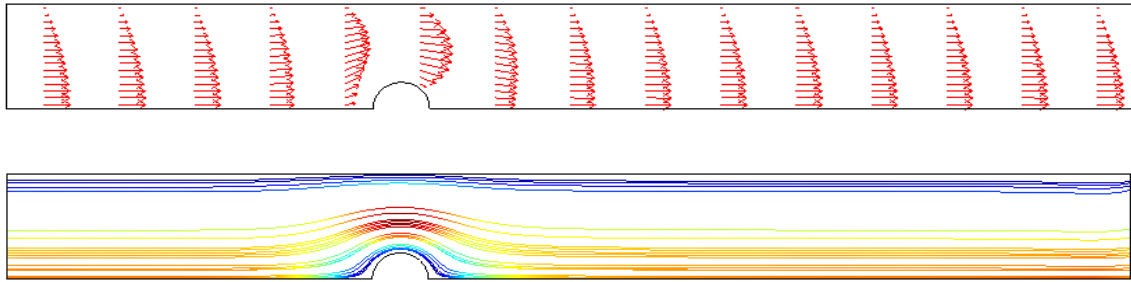


FIG. 3 – Champ de vitesse et lignes de courant dans une contraction 4 :1

En différentes coupes $C1$ (avant la contraction), $C2$ (au niveau de la contraction) et $C3$ (après la contraction) on constate d’après la Figures 3 l’évolution de la vitesse le long de la conduite (oy) On constate que les profils sont identiques à ceux d’un fluide newtonien contrairement aux profils de contraintes. Par ailleurs on note clairement variation causée par la contraction.

En traversant la contraction en $x=0.7 m$, la composante axiale de la vitesse, u , augmente, et en sortant de la section elle stabilise à la valeur d’entrée. La composante radiale v de la vitesse change de direction et de norme en traversant la contraction.

4.3 Effet de la quantité de polymère par rapport à celle du solvant

Le paramètre λ dit temps de relaxation traduit la quantité de polymère introduite progressivement au cours du temps dans le fluide. La figure 4 illustre les profils de la composante du tenseur extra-contrainte $T11$ pour différents valeurs de λ (ou différentes valeurs du nombre de We). On constate que lorsque λ augmente les profils gardent la même allure mais leurs maximums est obtenus avant la contraction jusqu’au moment où la quantité de polymère atteint son seuil ($\lambda = 0.6$) et ainsi le maximum est obtenu exactement au niveau de la contraction. Ceci explique la compétition entre les deux viscosités, du solvant et du polymère, et leurs effets complémentaires dans le comportement du matériau. L’effet élastique augmente progressivement au cours du temps jusqu’à atteindre son maximum.

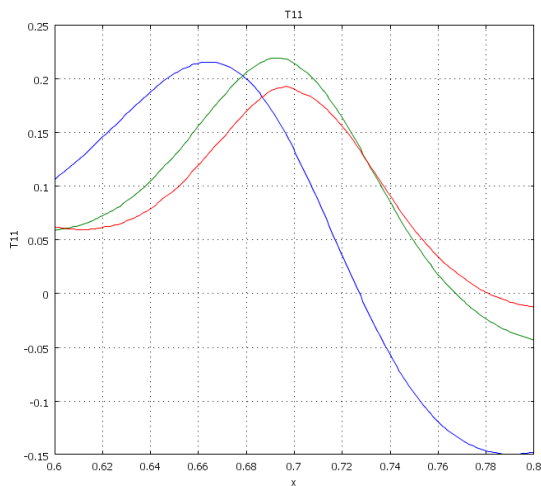


FIG. 4 – Profils de la composante $T11$ en ($y=0.1m$) pour différents valeurs de λ

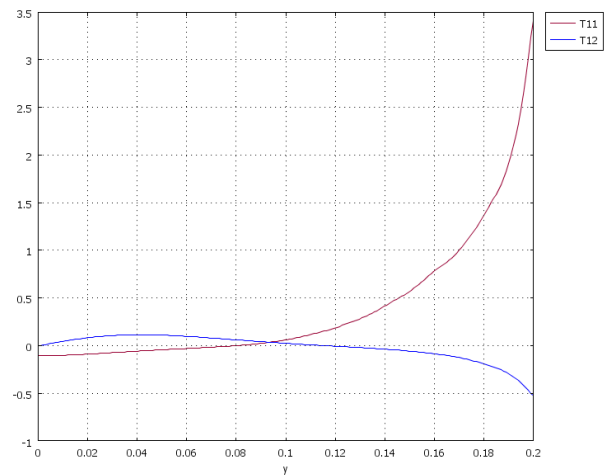


FIG. 5 – Profils des composantes $T11$ et $T12$ le long de la coupe $C1$; Avant la contraction ($x=0.6m$)

$$We = 2, \lambda = 0.6$$

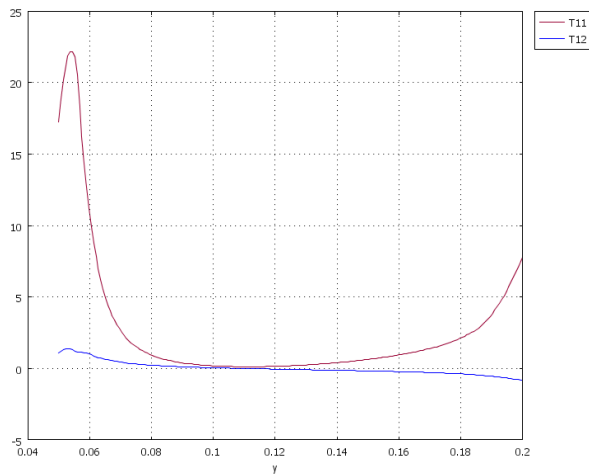


FIG. 6 – Profils des composantes T_{11} et T_{12} le long de la coupe C2 ; au niveau de la contraction ($x=0.7m$)

$$We = 2, \lambda = 0.6$$

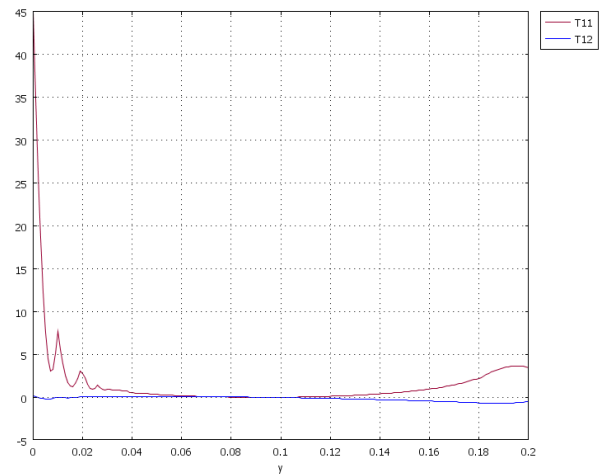


FIG. 7 – Profils des composantes T_{11} et T_{12} le long de la coupe C2 ; Après la contraction ($x=0.7m$)

$$We = 2, \lambda = 0.6$$

5 Conclusions

Les résultats de la simulation numérique de l'écoulement des fluides viscoélastiques dits complexes dans une conduite horizontale de contraction 4 :1, en utilisant le modèle d'Oldroyd-B dans le code de calcul Comsol sont validés par d'autres simulations numériques. L'instabilité du schéma numérique a été résolue par des termes de correction au niveau de la formulation faible. En définissant un nombre dit de Weissenberg, qui traduit l'apparition du caractère élastique de ces fluides. Nous avons examiné l'évolution du tenseur extra contrainte en fonction de ce nombre et nous avons traité l'effet de la contraction sur ce tenseur et sur la vitesse du fluide.

La prochaine étape de notre travail sera l'étude de l'interaction fluide viscoélastique avec une membrane déformable en utilisant la méthode ALE.

Références

- [1] R.Keuning, Simulation of viscoelastic flow: C.L Tucker (Ed), Computer Modeling for Polymer Preccessing, Hanser, Munich, pp. 404-469, 1989.
- [2] Lionel HELIN, Développement de modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques, 2006.
- [3] Gunette R, Tortin M, A new mixed element method for computing viscoelastic flow, J. No Newtonian fluid Mesh, 27-52, 1995.
- [4] Sammouda.Habib, Développement et applications de la méthode des éléments finis pour les écoulements fortement chauffés dans les espaces confinés et semi-confinés, Thèse Doctorat d'état sciences physiques, Faculté des sciences de Tunis, 1999.
- [5] Thierry Dumont., Une méthode Quasi-Newton pour le calcul d'écoulements viscoélastiques, 1997.
- [6] Thomas J. Craven et Al Stabilized Finite Element Modeling of Oldroyd-B Viscoelastic Flows, 2006.