

# Analyse à cœur des champs de déplacement obtenus sur une éprouvette fissurée

Y. BARRANGER, P. DOUMALIN, J.C. DUPRE, A. GERMANEAU, S. HEDAN, V. VALLE

Laboratoire de Mécanique des Solides, Université de Poitiers, CNRS UMR 6610, SP2MI, Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France

## Résumé :

*L'objet de cette étude est de montrer la validité de l'approche théorique 2D pour caractériser le comportement d'une éprouvette SEN tridimensionnelle fissurée et chargée en mode I. Des comparaisons de champs de déplacements théoriques et expérimentaux 3D sont entreprises. Les trois composantes de déplacement ont été mesurées à travers le volume par la méthode de corrélation volumique couplée à la micro-tomographie à rayons X. Les résultats obtenus par l'approche théorique présentent des différences importantes avec ceux obtenus expérimentalement et ne sont donc pas totalement représentatifs de ces derniers. L'écart entre ces deux approches permet de visualiser la zone d'effets 3D proche du front de fissure à travers l'épaisseur du volume.*

## Abstract :

*The aim of this study is to show the validity of the 2D theory on the behaviour of a SEN three-dimensional cracked specimen loaded in mode I. Displacement fields are compared between theory and 3D experiments. The three displacement components all over the volume were measured by means of Digital Volume Correlation coupled with X-ray micro-computed tomography. Theoretical approach provides results different from the ones obtained experimentally, showing that this theory is not relevant to experiment. Differences between these two approaches allow the visualisation of the 3D effect zone at the vicinity of the crack front along the thickness of the volume.*

**Mots clés :** Eprouvette fissurée SEN, Corrélation volumique, Micro-tomographie rayons-X, zone d'effets 3D

## 1 Introduction

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture ont permis de caractériser le champ de contraintes et de déformations proche de la pointe de fissure pour des cas bidimensionnels [1,2]. Les premières expériences montrent une bonne concordance entre les résultats obtenus expérimentalement et ceux obtenus à partir de ces caractérisations théoriques [3,4]. Cependant, l'amélioration des méthodes de mesure a permis plus tard de révéler des différences au voisinage de la pointe de fissure [5], celles-ci mettant en évidence la présence d'effets tridimensionnels dans cette zone. Par la suite, des travaux de recherche portant sur l'étude expérimentale des déplacements hors-plan à la surface libre de matériaux fragiles ont confirmé ces différences. Ceux-ci ont permis d'établir des formulations empiriques des déplacements hors-plan, dans le cas de fissures stationnaires par l'utilisation de méthodes interférométriques [6,7]. A la surface libre, les composantes des champs de déplacements dans le plan ont pu être mesurées au voisinage de la pointe de fissure par des méthodes de mesure 2D [8,9]. Ce type de mesure montre également des différences entre la théorie et l'approche expérimentale [10].

Cependant, avec ces méthodes, les composantes de déplacement ne peuvent être accessibles qu'au niveau de la surface libre. Afin de rechercher ces composantes à travers le volume, l'acquisition de données à cœur est nécessaire. La méthode des réseaux de Bragg [11] permet de réaliser des mesures au cœur d'éprouvettes fissurées mais ne peut fournir les champs complets de déplacements.

Pour réaliser les mesures des trois composantes de déplacement au sein d'un matériau, la méthode de corrélation d'image volumique (Digital Volume Correlation, DVC) a été développée. Celle-ci est l'extension

de la méthode de corrélation 2D (Digital Image Correlation, DIC) utilisée pour mesurer les composantes planes de déplacement. Afin d'obtenir des informations volumiques, plusieurs méthodes tomographiques peuvent être couplées à la DVC comme la micro-tomographie par rayons X (X $\mu$ CT) [12-15]. Cette méthode a déjà été utilisée dans un cas de fissuration pour mesurer la composante de déplacement suivant l'axe de chargement sur un acier XC48 proche de la pointe de fissure [16].

Dans cette étude, les mesures 3D sont réalisées sur une éprouvette fissurée SEN (Single Edge Notch) sollicitée en mode I. Une comparaison est alors effectuée entre les résultats obtenus expérimentalement et ceux obtenus par la théorie des contraintes planes, ceci permettant également d'observer la zone des effets 3D en pointe de fissure correspondant aux écarts entre les champs de déplacements théoriques et expérimentaux suivant la direction  $z$ .

## 2 Champs théoriques de déplacements

En élasticité plane, deux approches donnent des formulations pour les champs de déplacements et les champs de contraintes, celles-ci étant appelées déformations planes et contraintes planes. Wastergaard [1] proposa une expression mathématique des champs de déplacements dans le plan. Ces deux champs de déplacements caractérisent les déplacements dans le plan dans une zone proche de la pointe de fissure. En se basant sur ces formulations, Williams [2] exprima les champs de contraintes et de déplacements par le biais de développement limités.

Pour cette étude, le premier et le second terme de la série de Williams ont été choisis pour calculer les déplacements théoriques par l'approche des contraintes planes, car ce sont les deux termes identifiés physiquement en fonction des paramètres mécaniques et géométriques.

$$\begin{cases} u_x(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\sigma}{E} r \cos \theta + O \times r^{n/2} \\ u_y(r, \theta) = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\nu\sigma}{E} r \sin \theta + O \times r^{n/2} \\ u_z(r, \theta, z) = -\frac{\nu}{E} \int_0^z \left( K_I \sqrt{\frac{2}{r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} - \sigma \right) dz \end{cases} \quad (1)$$

Le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est centré sur la pointe de fissure au point  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Le plan  $z=0$  correspond à la demi-épaisseur de la plaque.

$\mu = E/(2(1+\nu))$  est le second coefficient de Lamé (aussi appelé module de cisaillement),  $\sigma$  le chargement extérieur,  $E$  le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.

La formulation choisie pour le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  est basé sur les modifications de Tada [17] apportées sur les travaux d'Irwin :

$$K_I = \sigma \sqrt{a} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (2)$$

Où  $f$  est une fonction dépendant de la longueur de fissure ( $a$ ) et de la largeur de l'éprouvette ( $W$ ).

## 3 Mesure de champs de déplacements au cœur du solide

Afin de mesurer les champs de déplacements au cœur du solide, nous utilisons la DVC en association avec la X $\mu$ CT.

La DVC est une extension de la DIC au cas 3D pour laquelle les images sont des volumes présentant une variation 3D de niveaux de gris. Elle utilise deux images tridimensionnelles de l'échantillon étudié à deux états mécaniques différents (un état de référence et un état déformé). Ces deux images sont corrélées en plusieurs points d'une grille virtuelle 3D disposée au sein du volume étudié. A chaque point de cette grille, un sous-volume  $D$  est défini par les niveaux de gris voisins et est composé de plusieurs voxels (dénomination du pixel en 3D). Une intercorrélacion de chacun des sous-volumes entre les deux états donne ensuite une estimation des déplacements de chacun des points de la grille virtuelle.

Considérons  $\underline{X}$  et  $\underline{x}$  les coordonnées en voxels d'un même point dans les deux états mécaniques, ainsi qu'une

transformation matérielle  $\phi$  liant ces deux configurations  $\underline{x} = \phi(\underline{X})$ . Pour un sous-volume  $D$  centré sur le point  $\underline{X}_0$  à l'état de référence,  $\phi$  est estimé par son développement au premier ordre correspondant à un mouvement de solide rigide combiné à un gradient homogène :

$$\phi(\underline{X}) = \underline{X} + u(\underline{X}) \approx \underline{X} + u(\underline{X}_0) + \frac{\partial u}{\partial \underline{X}}(\underline{X}_0) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_0) \quad (3)$$

Le déplacement  $u(\underline{X}_0)$  de  $D$  définit les paramètres de la translation de solide rigide  $(u, v, w)$ . Le gradient de déplacement prend en compte la rotation de corps rigide et la déformation homogène locale du sous-volume.

La détermination de la position finale est réalisée par le biais d'une minimisation premier gradient. Pour calculer les variations de niveaux de gris entre deux voxels adjacents, une interpolation trilineaire est utilisée sur l'image correspondant à l'état déformé. De cette manière, il est possible d'atteindre une précision subvoxel pour la détermination de la position du sous-volume. La précision de cette technique est équivalente à celle obtenue par DIC [15].

Pour notre étude, nous appliquons ce principe sur des images volumiques acquises sur un micro-tomographe de laboratoire nous permettant d'obtenir une résolution spatiale minimale de 10 $\mu$ m. La technique consiste à enregistrer avec une caméra CCD l'intensité des rayons X transmis à travers le matériau pour différentes positions angulaires. A partir de ces images, une image volumique est reconstruite par une technique de rétro projection filtrée [18]. La distribution des niveaux de gris, provoquée par les différences locales de densité, est utilisée par la DVC pour suivre les mouvements locaux au sein de l'éprouvette. Cependant, tous les matériaux ne présentent pas naturellement un contraste aux rayons X suffisant. Alors, l'inclusion de particules de plus forte densité dans le matériau pendant l'élaboration de l'éprouvette est nécessaire.

## 4 Spécifications expérimentales

Le choix du matériau constituant l'éprouvette s'est porté sur le polyuréthane afin de répondre à trois critères. Premièrement, l'éprouvette a été conçue à partir d'une résine liquide afin de faciliter l'ajout et le mélange des particules denses donnant le contraste aux rayons X suffisant. Ensuite, le matériau choisi se devait de présenter un faible module d'Young pour permettre d'avoir des valeurs de déformation suffisamment importantes afin d'être supérieures de la précision de la DVC. Enfin, pour rester dans les hypothèses élastiques utilisées pour l'établissement des formulations théoriques, le matériau devait présenter un comportement élastique même en cas de fortes déformations.

Le choix du matériau pour les particules, suite à une étude précédente [15], s'est porté sur des particules de cuivre (calibrées à 150 $\mu$ m) afin d'obtenir un meilleur contraste aux rayons X. Ces particules ont été incluses à hauteur de 10% de la masse totale de l'éprouvette. Les gradients mécaniques créés par ces particules sont considérés comme étant localisés à l'échelle de la particule, ceci impliquant que le comportement de l'éprouvette reste homogène à notre échelle de mesure [19].

Les caractéristiques de l'éprouvette ainsi conçu ont été obtenues expérimentalement par la méthode de suivi de marqueurs [20] : module d'Young  $E=3,56 \pm 0,02$ MPa et coefficient de Poisson  $\nu=0,48 \pm 0,02$ .

L'éprouvette présente les dimensions géométriques suivantes : longueur  $L=70$ mm, largeur  $W=29$ mm, épaisseur  $h=21$ mm et une longueur de fissure  $a=7,5$ mm. Un voxel a pour dimensions  $45 \times 45 \times 45 \mu\text{m}^3$  et un sous volume  $31 \times 31 \times 31$  voxels<sup>3</sup>. Avec ces paramètres, et selon [15], l'incertitude sur la mesure de déplacement est de 0,05 voxels, soit 2,5 $\mu$ m.

## 5 Confrontation entre résultats expérimentaux et formulations théoriques

L'essai présenté correspond à un chargement de 19N. Les résultats pour  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  pour les approches expérimentales et théoriques sont représentées en figure 1.

Pour  $u_x$  et  $u_y$  expérimentaux, seule la représentation à  $z=h/2$  est affichée étant donné que les mesures volumiques montrent de très faibles variations de ceux-ci le long de l'axe  $z$ . Les formulations théoriques de ces deux composantes de déplacement n'étant pas dépendantes de  $z$ , celles-ci sont tracées sur un plan.

Pour  $u_z$  expérimental et théorique, les résultats sont présentés à différents  $z$  à travers l'éprouvette afin de montrer l'évolution de cette composante de déplacement à travers l'épaisseur. Le tracé est effectué entre la surface libre ( $z=h/2$ ) et le plan médian ( $z=0$ ) étant donné que pour l'approche théorique et celle expérimentale les résultats obtenus montrent une symétrie selon le plan médian.

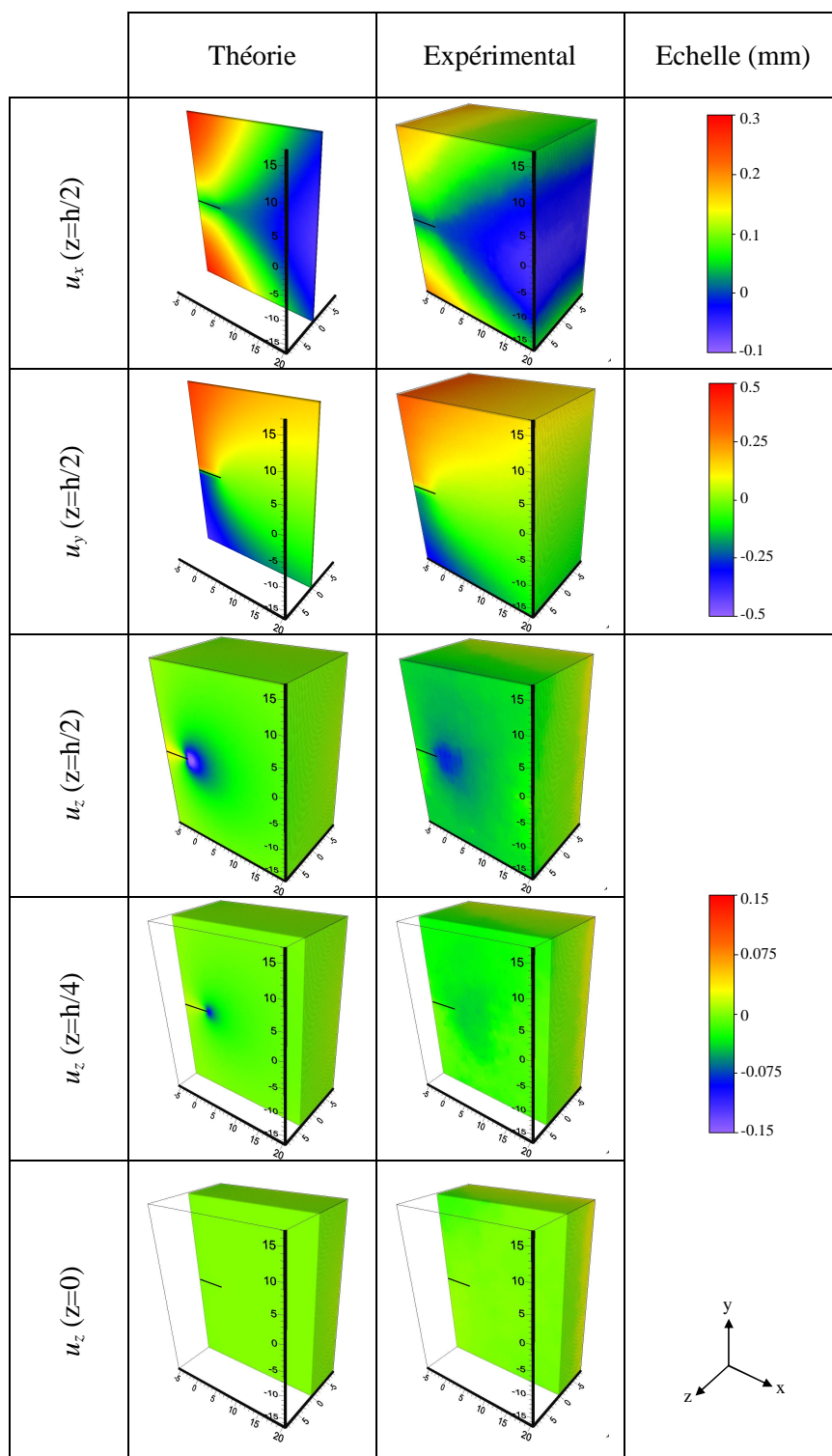


Figure 1 : Résultats obtenus pour  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  pour la théorie des contraintes planes et l'expérimental

A la vue de la figure 1, l'approche théorique des contraintes planes et l'approche expérimentale pour  $u_x$  et  $u_y$  donnent des résultats différents lorsque l'on s'éloigne de la pointe de fissure, en particulier à l'arrière de celle-ci. Pour  $u_z$ , les résultats semblent différer entre les deux approches au niveau de la pointe de fissure.

Afin de réaliser une analyse quantitative de ces résultats, les différences entre les deux approches sont représentées en figure 2 pour les trois composantes de déplacement. Les tracés sont effectués sur une moitié de l'éprouvette selon l'axe de chargement afin de visualiser l'évolution de ces différences selon l'épaisseur

pour chacune des composantes de déplacement. De même, cette représentation permet d'observer la zone des effets 3D sur la figure des différences pour  $u_z$ .

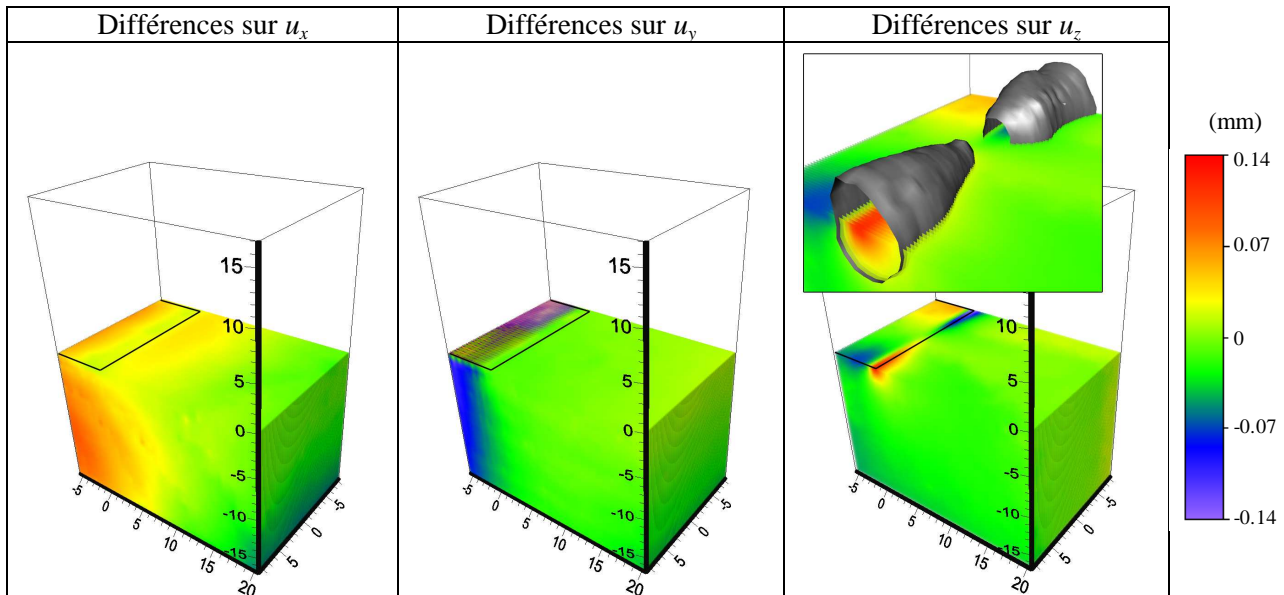


Figure 2 : Différences entre la théorie des contraintes planes et l'expérimental pour les trois composantes de déplacement sur la moitié de l'éprouvette. Représentation de la zone des effets 3D.

La figure 2 montre que pour  $u_y$  les différences entre les deux approches se situent en arrière de fissure, alors que pour  $u_x$  et  $u_z$  celles-ci sont localisées à la fois en arrière et en avant de fissure ( $u_z$  présentant ses écarts les plus importants au niveau du front de fissure).

Pour  $u_x$ , les valeurs expérimentales sont inférieures à celles obtenues par la formulation théorique (équation 1). Ces différences sont principalement dues à l'hypothèse de plaque infinie utilisée pour l'établissement des formulations théoriques. Par conséquent, les déplacements  $u_x$  calculés à partir de la formulation de Williams ne représente pas correctement un cas réel de structure finie et fissurée. De plus, une variation des différences peut être observée à travers l'épaisseur de l'éprouvette et à l'avant de la fissure, celle-ci pouvant être associée à des effets 3D. Cependant, il convient de rester prudent car son amplitude est de l'ordre de la précision de mesure.

Pour  $u_y$ , les écarts sont moins importants, ceci indiquant que cette composante est peu sensible à la présence d'effets 3D locaux et aux différences de conditions aux limites entre l'expérience (modèle fini) et la formulation théorique (modèle infini).

Pour  $u_z$ , les différences en pointe de fissure correspondent à la zone d'effets 3D déjà observée en surface à partir de mesures 2D en surface libre [5]. Dans notre travail, cette zone d'effets 3D peut être observée à travers l'épaisseur de l'éprouvette. Celle-ci présente une évolution selon l'épaisseur, étant plus large aux surfaces libres qu'à cœur. Pour une meilleure visualisation de l'étendue de cette zone d'effets 3D, une isosurface est tracée en figure 2. Afin de rester dans la précision de mesure de la méthode, la valeur de l'écart entre les deux approches a été choisie à 0,015mm, ce qui correspond à un rapport  $r/h$  de 0,13 à la surface libre de l'éprouvette.

## 6 Conclusion

La DVC couplée à la X $\mu$ CT s'avère être un moyen efficace pour extraire les champs de déplacements au sein d'un matériau fissuré et permet donc d'étudier la répartition de ceux-ci dans le volume.

La comparaison entre les résultats obtenus par la théorie 2D en contraintes planes et ceux obtenus expérimentalement nous permettent d'évaluer les limitations du modèle dans l'estimation des champs de déplacement pour une éprouvette fissurée SEN chargée en mode I.

Les résultats obtenus par la théorie 2D présentent des différences avec ceux obtenus expérimentalement, ceci indiquant que la théorie 2D n'est pas totalement représentative du comportement mis en évidence par l'expérience. Ces différences sont plus importantes en arrière de fissure pour  $u_x$  et  $u_y$ , alors que celles-ci sont plus importantes en pointe de fissure pour  $u_z$ . Ces écarts ont permis la visualisation de la zone d'effets 3D autour du front de fissure et à travers le volume. Ceux-ci ont également confirmé le fait que deux termes des séries de Williams sont suffisants pour définir correctement  $u_y$  en avant de fissure, mais qu'il est nécessaire d'en prendre plus en compte pour l'arrière de fissure quelque soit la composante de déplacement, ainsi que pour définir correctement  $u_x$  et  $u_z$  en avant de fissure.

## References

- [1] Westergaard H.M., Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6, 49–53, 1939.
- [2] Williams M.L., On the stress distribution at the base of a stationary crack, *Journal of Applied Mechanics*, 24, 109–114, 1957.
- [3] Theocaris P.S., The reflected-shadow method for the study of the constrained zones in cracked birefringent media, *Journal of Strain Analysis*, 7(2), 75-83, 1972.
- [4] Irwin G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361-364, 1957.
- [5] Rosakis J., Ravi-Chandar K., On crack-tip stress state: an experimental evaluation of three-dimensional effects, *International Journal of Solids and Structures*, 22(2), 121-134, 1986.
- [6] Humbert L., Valle V., Cottron M., Experimental determination and empirical representation of out-of-plane displacements in a cracked elastic plate loaded in mode I, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 5493-5504, 2000.
- [7] Pfaff R.D., Washabaugh P.D., Knauss W.G., An interpretation of Twyman-Green interferograms from static and dynamic fracture experiments, *International Journal of Solids and Structures*, 32(6/7), 939-955, 1995.
- [8] Arakawa J., Takahashi K., Displacement fields around a crack tip in polymers, *International Journal of Fracture*, 86, 289–300, 1997.
- [9] Sutton M.A., Turner J.L., Chao Y.J., Bruck H.A., Chae T.L., Experimental investigations of the three-dimensional effects near a crack tip using computer vision, *International Journal of Fracture*, 53, 201-228, 1992.
- [10] Hedan S., Valle V., Cottron M., In plane displacement formulation for finite cracked plates under mode I using grid method and finite element analysis, *Accepted pour Experimental Mechanics*.
- [11] Peters K., Studer M., Botsis J., Iocco A., Limberger H., Salathé R., Embedded optical fiber Bragg grating sensor in a nonuniform strain field: measurements and simulations, *Experimental Mechanics*, 41, 19–28, 2001.
- [12] Bay B.K., Smith T.S., Fyhrie D.P., Saad M. Digital Volume Correlation: Three-dimensional strain mapping using X-ray tomography, *Experimental Mechanics*, 39, 217–226, 1999.
- [13] Verhulp E., Van Rietbergen B., Huiskes R., A three-dimensional digital image correlation technique for strain measurements in microstructures, *Journal of Biomechanics*, 37, 1313–1320, 2004.
- [14] Liu L., Morgan E.F., Accuracy and precision of digital volume correlation in quantifying displacements and strains in trabecular bone, *Journal of Biomechanics*, 40, 3516–3520, 2007.
- [15] Germaneau A., Doumalin P., Dupré J.C., Comparison between X-ray micro-computed tomography and optical scanning tomography for full 3D strain measurement by digital volume correlation, *NDT&E International*, 41, 407– 415, 2008.
- [16] Réthoré J., Tinnes J.P., Roux S., Buffière J.Y., Hild F., Extended three-dimensional digital image correlation (X3D-DIC), *C. R. Mécanique*, 336, 643–649, 2008.
- [17] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed. Paris Productions, 1985.
- [18] Feldkamp L.A., Davis L.C., Kress J.W., Practical cone-beam algorithm, *Journal of the Optical Society of America A*, 1(6), 612-619, 1984.
- [19] Bornert M., Chaix J.M., Doumain P., Dupré J.C., Fournel T., Jeulin D., Maire E., Moreaud M., Moulinec, H., Mesure tridimensionnelle de champs cinématiques par imagerie volumique pour l'analyse des matériaux et des structures, *I2M*, 1, 2005.
- [20] Rotinat R., Tié R., Valle V., Dupré J.C. Three optical procedures for local large-strain measurements. *Strain* 2001;37:89-98.