

Propagation de fissure et endommagement dans un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant

SY TUAN NGUYEN^{a,b}, L. DORMIEUX^a, Y. LE PAPE^b ET J. SANAHUJA^b

a. Laboratoire Navier, ENPC, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée

b. EDF R&D, Site des Renardières, 77818 Moret sur Loing

Résumé :

On généralise l'approche énergétique classique de la propagation de fissure et la notion de taux de restitution de l'énergie à un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant (v.l.n.v.). On développe une écriture incrémentale de la loi de comportement en vue du calcul numérique d'une structure soumise à la fissuration. On aborde ensuite l'homogénéisation d'un matériau v.l.n.v. endommagé par microfissuration.

Abstract :

The classical energy approach to crack propagation and the concept of energy release rate are extended to the case of a linear viscoelastic non aging material (l.v.n.a.). An incremental formulation of the state equation is proposed in view of numerical applications including crack propagation. The homogenization of a l.v.n.a. material which is damaged by microcracks is finally considered.

Mots clefs : viscoélasticité, endommagement, fissuration, fluage

1 Introduction

Pour limiter le débit de fuite dans l'espace inter-enceintes en cas d'accident survenant sur un réacteur de centrale nucléaire, une première enceinte en béton précontraint entoure ce dernier. La précontrainte vise notamment à fermer les fissures présentes dans la paroi de l'enceinte et à s'opposer à leur propagation dans le cas d'une mise en pression de l'enceinte interne consécutive à l'accident. On sait en effet que la perméabilité d'un matériau microfissuré est contrôlée par la densité, le rayon et l'ouverture des fissures [1].

Le fluage étant de nature à faire perdre progressivement le bénéfice de la précontrainte, il importe d'analyser le comportement d'une structure fissurée ou microfissurée constituée d'un matériau qui est le siège de déformations différées et d'évaluer le risque de propagation de la fissuration dans ce contexte.

Dans la suite, on commence par s'intéresser au cas de la fissure unique dans une structure constituée d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant (v.l.n.v.). On illustre cette situation par l'exemple de la flexion 3 points dans lequel on évalue l'influence de la vitesse de chargement sur le taux de restitution de l'énergie. On aborde ensuite la modélisation de l'endommagement par microfissuration d'un matériau v.l.n.v. en quantifiant l'impact du paramètre d'endommagement sur les caractéristiques viscoélastiques du matériau homogénéisé.

2 Modèle viscoélastique linéaire non vieillissant tridimensionnel

Une classe de comportements v.l.n.v. tridimensionnels isotropes est obtenue en transposant dans un contexte tensoriel les modèles rhéologiques unidimensionnels classiques. Dans le cas du béton, on fait couramment appel à une combinaison en série des modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt (FIG 1). On utilise dans la suite les indices M et K respectivement pour la partie "Maxwell" et à la partie "Kelvin". Pour établir la

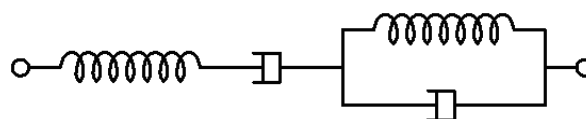


FIG. 1 – Modèle rhéologique pour le béton

loi de comportement du matériau correspondant à ce modèle, on décompose la déformation totale selon la contribution de la partie de Maxwell et celle de la partie de Kelvin-Voigt :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_K \quad (1)$$

La déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_M$ de la partie de Maxwell est reliée à la contrainte totale selon :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_M = \mathbb{S}_M^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbb{S}_M^v : \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

où \mathbb{S}_M^e est le tenseur de souplesse et \mathbb{S}_M^v l'inverse du tenseur de viscosité. De façon similaire, l'équation d'état de la partie "Kelvin" relie la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_K$ et le champ des contraintes totales $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_K^e : \boldsymbol{\varepsilon}_K + \mathbb{C}_K^v : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K \quad (3)$$

où apparaissent un nouveau tenseur de raideur \mathbb{C}_K^e et un nouveau tenseur de viscosité \mathbb{C}_K^v . En combinant (1), (2) et (3) ainsi que leurs dérivées par rapport au temps, on obtient finalement une équation différentielle d'ordre deux représentant la loi de comportement du matériau :

$$\mathbb{A} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbb{B} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbb{D} : \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_K^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbb{C}_K^v : \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4)$$

où l'on a posé :

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^v; \quad \mathbb{B} = \mathbb{I} + \mathbb{C}_K^e : \mathbb{S}_M^e + \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^v; \quad \mathbb{D} = \mathbb{C}_K^v : \mathbb{S}_M^e \quad (5)$$

Les tenseurs d'ordre 4 de raideur et de viscosité (resp. leurs inverses) sont supposés isotropes, de sorte qu'ils sont exprimés en fonction des 8 constantes caractéristiques du matériau qui représentent des raideurs et des viscosités en compression ou en cisaillement :

$$\mathbb{C}_K^e = 3k_K \mathbb{J} + 2\mu_K \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_K^v = \eta_K^s \mathbb{J} + \eta_K^d \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_M^e = 3k_M \mathbb{J} + 2\mu_M \mathbb{K}; \quad \mathbb{C}_M^v = \eta_M^s \mathbb{J} + \eta_M^d \mathbb{K}$$

où les tenseurs \mathbb{J} et \mathbb{K} sont respectivement les projecteurs des parties sphérique et déviatorique. Avec (5), il est facile de vérifier que :

$$\mathbb{A} = \frac{3k_K}{\eta_M^s} \mathbb{J} + \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} \mathbb{K}; \quad \mathbb{B} = \left(1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s}\right) \mathbb{J} + \left(1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d}\right) \mathbb{K}; \quad \mathbb{D} = \frac{\eta_K^s}{3k_M} \mathbb{J} + \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \mathbb{K} \quad (6)$$

3 Forme incrémentale de l'équation différentielle

Pour le calcul de structures constituées de matériaux v.l.n.v., on utilise couramment le théorème de correspondance [2] qui permet de se ramener à un problème d'élasticité linéaire après usage de la transformation de Laplace-Carson (voir (23)). Cependant, en présence de propagation de fissures, on doit renoncer à l'utilisation de celle-ci, la propagation pouvant être assimilée à un changement de nature des conditions aux limites. En vue du calcul numérique de structures soumises à propagation de fissure, on part de l'équation différentielle (4) pour en proposer une forme incrémentale. On adopte à cet effet les approximations suivantes des dérivées par rapport au temps :

$$\dot{a} \simeq \frac{a(t+dt) - a(t)}{dt}; \quad \ddot{a} \simeq \frac{a(t+dt) + a(t-dt) - 2a(t)}{dt^2} \quad (7)$$

où les grandeurs sont supposées connues jusqu'à l'instant t et où dt désigne l'incrément de temps. En introduisant (7) dans l'équation (4), celle-ci devient :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{A} + \frac{1}{dt} \mathbb{B} + \frac{1}{dt^2} \mathbb{D} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t+dt) - \left(\frac{1}{dt} \mathbb{B} + \frac{2}{dt^2} \mathbb{D} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t) + \frac{1}{dt^2} \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}(t-dt) \\ & = \left(\frac{1}{dt} \mathbb{C}_K^e + \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v \right) : \left(\boldsymbol{\varepsilon}(t+dt) - \boldsymbol{\varepsilon}(t) \right) - \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v : \left(\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t-dt) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

En remplaçant les tenseurs \mathbb{A} , \mathbb{B} et \mathbb{D} par les expressions données en (6) on obtient :

$$\mathbb{A} + \frac{1}{dt} \mathbb{B} + \frac{1}{dt^2} \mathbb{D} = c_1 \mathbb{J} + c_2 \mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt} \mathbb{B} + \frac{2}{dt^2} \mathbb{D} = c_3 \mathbb{J} + c_4 \mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt^2} \mathbb{D} = c_5 \mathbb{J} + c_6 \mathbb{K} \quad (9)$$

On pose de même :

$$\frac{1}{dt} \mathbb{C}_K^e + \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v = k_1 \mathbb{J} + k_2 \mathbb{K}; \quad \frac{1}{dt^2} \mathbb{C}_K^v = k_3 \mathbb{J} + k_4 \mathbb{K} \quad (10)$$

où les coefficients c_i ($1 \leq i \leq 6$) et k_j ($1 \leq j \leq 4$) sont définis à l'annexe 6. A noter qu'ils dépendent explicitement du pas de temps choisi. Avec ces notations ci-dessus, l'équation (8) se met sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(t + dt) = \mathbb{C}' : \boldsymbol{\varepsilon}(t + dt) + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbb{C}' : \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}' = \frac{k_1}{c_1} \mathbb{J} + \frac{k_2}{c_2} \mathbb{K} \quad (11)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \left(\frac{c_3}{c_1} \mathbb{J} + \frac{c_4}{c_2} \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t) - \left(\frac{c_5}{c_1} \mathbb{J} + \frac{c_6}{c_2} \mathbb{K} \right) : \boldsymbol{\sigma}(t - dt) - \left(\frac{k_3}{c_1} \mathbb{J} + \frac{k_4}{c_2} \mathbb{K} \right) : (\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t - dt)) \quad (12)$$

On obtient une relation entre $\boldsymbol{\sigma}(t + dt)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(t + dt)$ qui est formellement semblable à une équation d'état élastique linéaire avec précontrainte, celle-ci étant égale à $\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbb{C}' : \boldsymbol{\varepsilon}(t)$. Elle est calculée en fonction des valeurs de la contrainte et de la déformation aux instants t et $t - dt$ précédents.

4 Analyse énergétique de la propagation de fissure

On s'intéresse à une structure fissurée soumise à un chargement défini par l'évolution d'un paramètre cinématique noté formellement \mathcal{E} . Soit \mathcal{Q} la variable représentant l'effort extérieur dual de \mathcal{E} . La puissance mécanique fournie à la structure s'écrit donc $\mathcal{Q} \cdot \dot{\mathcal{E}}$. Dans le cas élastique linéaire [3], l'énergie élastique de la structure est une fonction du paramètre de chargement \mathcal{E} et de la longueur ℓ de la fissure, dont on suppose qu'elle se propage de façon rectiligne : $W = W(\mathcal{E}, \ell)$. On montre que la dissipation s'écrit :

$$\dot{\mathcal{D}} = - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}} (\mathcal{E}, \ell) \dot{\ell} \quad (13)$$

Le taux de restitution de l'énergie en facteur de $\dot{\ell}$ apparaît ainsi comme la force motrice de la propagation, de sorte que le critère de propagation porte de façon naturelle sur cette quantité.

Dans le cas viscoélastique, l'énergie élastique de la structure peut à nouveau être considérée comme une fonction de \mathcal{E} et de la longueur de fissure, en rajoutant à présent un troisième argument qui n'est autre que le champ de déformations visqueuses $\{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}$: $W = W(\mathcal{E}, \ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\})$. Dans ces conditions, la dissipation prend la forme :

$$\dot{\mathcal{D}} = \mathcal{Q} \cdot \dot{\mathcal{E}} - \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} \Big|_{\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} \dot{\mathcal{E}} - \frac{\partial W}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} \Big|_{\mathcal{E}, \ell} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v\} - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} \dot{\ell} \quad (14)$$

En analysant d'abord une évolution non dissipative, on montre que :

$$\mathcal{Q} = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} \Big|_{\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} = R(\ell) (\mathcal{E} - \mathcal{E}^{vis}(\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\})) \quad (15)$$

$R(\ell)$ représente l'élasticité instantanée de la structure et \mathcal{E}^{vis} s'interprète comme la valeur de \mathcal{E} à l'issue d'une décharge totale instantanée. Le terme en $\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v\}$ dans (14) représente la dissipation visqueuse $\dot{\mathcal{D}}^{vis}$. La dérivée étant effectuée par rapport à un champ, elle revêt bien évidemment un sens formel :

$$\dot{\mathcal{D}}^{vis} = - \frac{\partial W}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} \Big|_{\mathcal{E}, \ell} \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v\} \quad (16)$$

La puissance dissipée dans la propagation est donc le complémentaire de $\dot{\mathcal{D}}^{vis}$ dans la dissipation totale :

$$\dot{\mathcal{D}} - \dot{\mathcal{D}}^{vis} = - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} \dot{\ell} \quad (17)$$

La quantité

$$\mathcal{F} = - \frac{\partial W}{\partial \ell} \Big|_{\mathcal{E}, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}} (\mathcal{E}, \ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}) \quad (18)$$

apparaît à nouveau comme la force motrice de la propagation. La nouveauté réside dans le fait que sa valeur est affectée par le champ de déformations visqueuses, lui-même tributaire de l'histoire du chargement $\mathcal{E}(0 \rightarrow t)$ et de celle de la longueur de fissure $\ell(0 \rightarrow t)$ sur l'intervalle d'étude $[0, t]$ considéré.

On montre que l'énergie élastique se met sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} R(\ell) (\mathcal{E} - \mathcal{E}^{vis})^2 + W_r(\ell, \{\boldsymbol{\varepsilon}^v\}) \quad (19)$$

Le premier terme représente l'énergie récupérable dans une décharge instantanée. Le second terme s'interprète comme l'énergie élastique qui subsiste dans la structure immédiatement après cette décharge. Du fait que \mathcal{E}^{vis} et W_r dépendent tous les deux de ℓ , le calcul de \mathcal{F} ne se réduit pas à celui de $R'(\ell)$, à la différence de ce qui prévaut en élasticité linéaire.

Sur la figure 2, on présente le calcul de \mathcal{F} pour une poutre entaillée soumise à une flexion 3 points, en fonction du déplacement du point d'application de la force. L'effet de la vitesse de chargement est très significatif. Comme prévu, aux vitesses élevées, on retombe sur le résultat du calcul élastique linéaire.

Le critère de propagation repose sur l'hypothèse que la dissipation liée à la propagation est proportionnelle au taux de longueur de fissure $\dot{\ell}$: $\dot{D} - \dot{D}^{vis} = G_c \dot{\ell}$, qui fait intervenir l'énergie critique G_c . En comparant avec (17), on est amené à formuler le critère de propagation sur \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} < G_c \Rightarrow \dot{\ell} = 0 \quad ; \quad \mathcal{F} = G_c \Rightarrow \dot{\ell} \geq 0 \quad (20)$$

L'égalité $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \ell, \{\varepsilon^v\}) = G_c$ permet de prévoir la propagation en fonction des évolutions du paramètre de chargement. Il est important de voir qu'elle fait intervenir explicitement le champ de déformations visqueuses, et donc la vitesse de sollicitation.

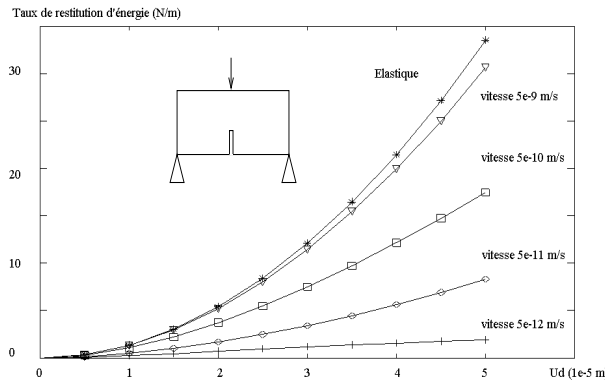


FIG. 2 – Taux de restitution de l'énergie pour une poutre en flexion 3 points (longueur 30 cm, hauteur 10 cm, entaille 15 mm)

5 Endommagement par microfissuration d'un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant

On s'intéresse à présent au comportement d'un matériau v.l.n.v. endommagé par microfissuration. On met en œuvre à cet effet une démarche d'homogénéisation. On se donne donc un volume élémentaire représentatif Ω (v.e.r.) qui est constitué du matériau étudié à la section 2 et d'un réseau de fissures planes circulaires (modèle de Griffith). Sur la durée de l'intervalle d'étude, on définit sur le bord $\partial\Omega$ du v.e.r. des conditions aux limites sur le déplacement $\xi(\mathbf{z}, t)$ à partir du tenseur de déformation macroscopique $\mathbf{E}(t)$ de la forme $\xi(\mathbf{z}, t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{z}$. On note $\Sigma(t)$ la contrainte macroscopique mobilisée qui est reliée au champ de contraintes locales $\sigma(\mathbf{z}, t)$ par une relation de moyenne : $\Sigma = \bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma}$ désigne la moyenne au sens intégral usuel sur Ω . On rappelle que la déformation macroscopique est reliée au champ de déformations locales dans le solide Ω^s par une règle de moyenne corrigée d'un terme correspondant à la déformation dans les fissures :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega^s} \varepsilon dV + \sum_i \int_{F_i} [\xi] \otimes \mathbf{n} dS \right) \quad (21)$$

où F_i désigne la fissure n^o i , \mathbf{n} la normale unitaire au plan de fissure et $[\xi]$ la discontinuité de déplacement entre les lèvres de la fissure, comptée dans le sens de \mathbf{n} .

Dans le cas de fissures vides (non pressurisées), on note par ailleurs que la règle de moyenne sur les contraintes prend la forme :

$$\Sigma = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \sigma dV \quad (22)$$

En l'absence de propagation des fissures, on peut étudier la réponse du v.e.r. à l'histoire de chargement à l'aide du théorème de correspondance en faisant appel à la transformée de Laplace-Carson [2] :

$$a^*(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} a'(t) e^{-pt} dt = p \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) e^{-pt} dt \quad (23)$$

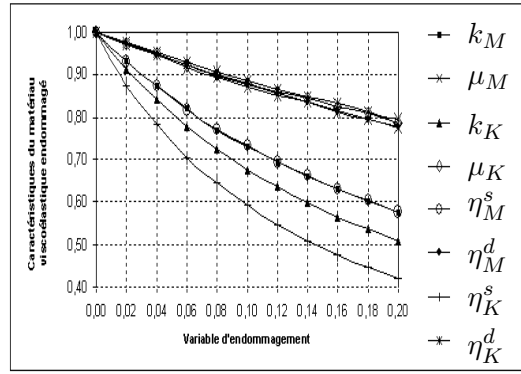


FIG. 3 – Paramètres du matériau endommagé normalisés par les paramètres du matériau sain

Dans un premier temps, l'équation d'état de la phase solide dans l'espace de Laplace-Carson est déduite de (4) et prend la forme $\sigma^* = \mathbb{C}^* : \varepsilon^*$ avec :

$$\mathbb{C}^* = (\mathbb{A} + p\mathbb{B} + p^2\mathbb{D})^{-1} : (p\mathbb{C}_K^e + p^2\mathbb{C}_K^v) \quad (24)$$

La relation (21) peut être réécrite en remplaçant \mathbf{E} par \mathbf{E}^* , ε par ε^* et $[\xi]$ par $[\xi]^*$. De même dans (22), on remplace Σ et σ par Σ^* et σ^* . En introduisant l'équation d'état de la phase solide dans cette dernière, il vient :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^s} \varepsilon^* dV = \mathbb{C}^*(p)^{-1} : \Sigma^* \quad (25)$$

dont on déduit, après combinaison avec (21) :

$$\mathbf{E}^* = \mathbb{C}^*(p)^{-1} : \Sigma^* + \frac{1}{|\Omega|} \left(\sum_i \int_{F_i} [\xi]^* \otimes \mathbf{n} dS \right) \quad (26)$$

Il s'agit donc d'estimer $[\xi]^*$ en fonction du chargement macroscopique. On adopte ici une approche de type diluée en contrainte (voir par exemple [4]). Ceci revient à placer une fissure unique dans un milieu infini d'élasticité $\mathbb{C}^*(p)$ avec un état de contrainte Σ^* à l'infini et à approcher $[\xi]^*$ par la valeur de la solution dans ce problème auxiliaire. Les solutions classiques de mécanique linéaire de la rupture donnent ainsi accès à la valeur de $[\xi]^*$. Dans le cas où le chargement macroscopique est une traction isotrope avec $\Sigma = \Sigma \mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ désignant le tenseur identité d'ordre 2), on obtient ainsi la transformée $[\xi_n]^*$ de la discontinuité normale de déplacement :

$$[\xi_n]^* = \frac{8}{\pi} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{2\mu^*} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (27)$$

où a désigne le rayon de fissure et r le rayon en coordonnées polaires. La contribution élémentaire d'une fissure vaut donc :

$$\int_{F_i} [\xi]^* \otimes \mathbf{n} dS = \frac{8a^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (28)$$

Dans l'hypothèse d'une répartition isotrope des orientations des fissures (de même rayon a), on obtient sans peine la contribution totale des fissures :

$$\frac{1}{|\Omega|} \left(\sum_i \int_{F_i} [\xi]^* \otimes \mathbf{n} dS \right) = \frac{8Na^3}{3} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \int_{|\mathbf{n}|=1} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \frac{dS}{4\pi} = \frac{8Na^3}{9} \frac{\Sigma^*(1-\nu^*)}{\mu^*} \mathbf{1} \quad (29)$$

où N désigne la densité de fissures. L'intégrale dans (29) est effectuée sur l'ensemble des orientations de \mathbf{n} sur la boule unité. En rapprochant (26) de (29), on obtient le comportement sous traction isotrope :

$$\Sigma^*(p) = k^{hom*}(p) \text{tr} \mathbf{E}^*(p) \quad \text{avec} \quad k^{hom*} = \frac{k^*}{1 + dQ_1^*}; \quad Q_1^* = \frac{16}{9} \frac{1-\nu^{*2}}{1-2\nu^*} \quad (30)$$

avec $d = Na^3$. On note que le module de compression homogénéisé $k^{hom*}(p)$ obtenu par ce procédé est identique à l'estimation de Mori-Tanaka (voir par exemple [5]), dont la mise en œuvre (en variable de Laplace-Carson) aurait été cependant problématique en raison des changements de géométrie locaux liés à l'ouverture

des fissures. La variable d'endommagement identifiée par ce raisonnement micromécanique n'est autre que d . A la différence du matériau sain, le matériau endommagé caractérisé par $k^{hom*}(p)$ ne relève pas de la classe introduite à la section 2. Cependant, il est possible de définir de façon approchée un matériau de cette classe qui soit équivalent au matériau "réel" à court terme et dans le régime asymptotique. Les 8 caractéristiques en sont représentées à la figure 3. La figure 4 présente la réponse à un échelon de traction isotrope du matériau sain ($d = 0$) et pour deux valeurs de la variable d'endommagement ($d = 0.1$ et 0.2). Comme attendu, l'endommagement majore la souplesse instantanée et l'amplitude du fluage. On note également (pour $d = 0.1$) l'excellent accord entre le matériau endommagé "réel" et l'approximation par modèle rhéologique (voir figure 3), sur toute la gamme de temps étudiée.

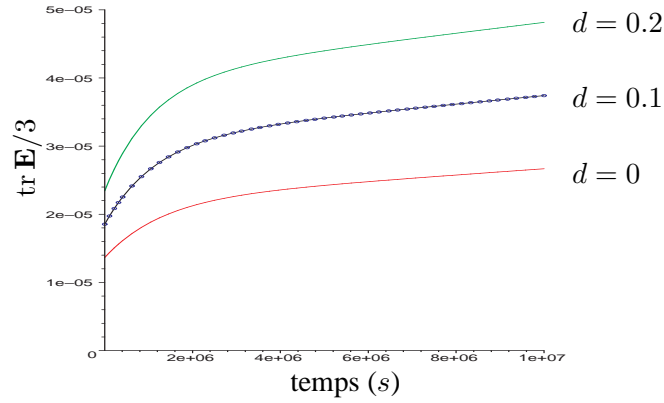


FIG. 4 – Déformation volumique macroscopique en réponse à un échelon de traction isotrope ($\Sigma = 1\text{MPa}$)

6 Annexe

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{3k_K}{\eta_M^s} + \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M}; & c_2 &= \frac{2\mu_K}{\eta_M^d} + \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \\
 c_3 &= \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{k_K}{k_M} + \frac{\eta_K^s}{\eta_M^s} \right) + \frac{2}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M}; & c_4 &= \frac{1}{dt} \left(1 + \frac{\mu_K}{\mu_M} + \frac{\eta_K^d}{\eta_M^d} \right) + \frac{2}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M} \\
 c_5 &= \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^s}{3k_M}; & c_6 &= \frac{1}{dt^2} \frac{\eta_K^d}{2\mu_M}
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$k_1 = \frac{1}{dt} 3k_K + \frac{1}{dt^2} \eta_K^s; \quad k_2 = \frac{1}{dt} 2\mu_K + \frac{1}{dt^2} \eta_K^d; \quad k_3 = \frac{1}{dt^2} \eta_K^s; \quad k_4 = \frac{1}{dt^2} \eta_K^d \tag{32}$$

Références

- [1] Dormieux L. and Kondo D. Approche micromécanique du couplage perméabilité-endommagement. C. R. Mécanique Acad. Sc. Paris, 332/2, 135–140, 2004.
- [2] Salençon J. Viscoélasticité. Presses de l'ENPC, 1983.
- [3] Leblond J.-B. Mécanique de la rupture fragile et ductile. Hermes, 2003.
- [4] Dormieux L. and Kondo D. Stress-based estimates and bounds of effective elastic properties : the case of cracked media with unilateral effects. Computational Materials Science, accepted for publication, 2009.
- [5] Ponte-Castaneda P. and Willis J. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. J. Mech. Phys. Solids, 43(12), 1919–1951, 1995.