

Extension d'un modèle de fissuration multi échelle en mode mixte (I+II) et mise en oeuvre dans un code XFEM.

SOPHIE DARTOIS^a, SYLVIE POMMIER^a, PIERRE-ALAIN GUIDAULT^a

*a. LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris),
61, av. du President Wilson, F-94230 CACHAN*

Résumé :

On souhaite étudier le comportement de pièces soumises à des chargements de fatigue aléatoires en mode mixte (I+II). En particulier on s'intéresse à des chargements variables dans le temps et non-proportionnels. Le cadre de travail doit répondre à un double objectif : le comportement élasto-plastique en pointe de fissure doit être décrit, afin de pouvoir tenir compte des effets d'histoire du chargements induits par plasticité, et les temps de calculs doivent rester réduits. Pour répondre à cette problématique Pommier, Lopez-Crespo et al. [1, 2], ont proposé un modèle construit par transition d'échelle permettant de décrire le comportement élasto-plastique en pointe de fissure à l'échelle globale et qui servira ici de base de travail. Par construction ce modèle permet de ne travailler qu'avec des grandeurs macroscopiques ce qui induit une diminution significative des temps de calculs par rapport à des simulations par éléments finis élasto-plastiques par exemple. Le modèle multi échelle de comportement élasto-plastique est ici complété par une loi de propagation permettant de prédire la direction et la vitesse de propagation de la fissure, en fonction des taux d'écoulement plastique en pointe de fissure. Le modèle complet de fissuration ainsi obtenu est ensuite implanté dans un code XFEM (eXtended Finite Element Method) pour validation sur des structures simples soumises à des chargements élémentaires. Les premiers résultats obtenus ouvrent la voie vers de nouvelles extensions, comme par exemple la prise en compte des effets de frottement ou de fermeture, afin de pouvoir traiter des structures à la géométrie plus complexe soumises à des chargements véritablement aléatoires.

Abstract :

A multiscale modelling has been developed by Pommier, Lopez-Crespo et al. [1, 2], to describe the cyclic mixed mode elastic-plastic behaviour at crack tip through the use of global quantities. The interest of such an approach is notably to predict the effects of mixed mode variable amplitude an non-proportional loading conditions with noticeably lower computation cost compares with elastic-plastic Finite Element (FE) simulations. The purpose of the work presented here is first to append a proper crack growth rule to the crack tip plasticity model. Then the enriched model is implemented in an eXtended Finite Element Method (XFEM) code as this technique presents major assets to deal with crack propagation. Elastic XFEM simulations are performed on basic structures, in order to check if memory effects due to confined plasticity are correctly taken into account via the crack propagation law based on the crack tip plasticity model. The first results obtained allow some new prospects such as the modelling of friction on crack lips or crack closure, in order to perform numerical simulations to predict the evolution of crack path in more complex structures submitted to real random fatigue loadings.

Mots clefs : propagation de fissure, fatigue, mode mixte, XFEM, plasticité confinée, surcharges

1 Introduction

Ces travaux s'inscrivent dans le cadre d'une large problématique visant à prédire les effets de surcharges éventuelles sur la propagation de fissures préexistantes au cours de chargements de fatigue aléatoires. Pour ce faire il est nécessaire de prendre en compte le comportement élasto-plastique en pointe de fissure. Par ailleurs, le fait de travailler sur des chargement de fatigue impose des temps de calcul faibles pour chaque cycle de chargement. Pour répondre à ce double objectif, Pommier, Lopez-Crespo *et al.* [1, 2] ont développé un modèle multi échelle permettant de décrire, à l'aide de grandeurs macroscopiques exclusivement, le comportement véritablement élasto-plastique en pointe de fissure, et ce pour des chargements en mode mixte (I+II). Le modèle permet ainsi de remplacer des calculs éléments finis élasto-plastiques extrêmement coûteux en termes de temps de calcul pour le type de chargements visé, par des calculs de structure élastiques plus économes et pour lesquels la plasticité en pointe de fissure est condensée dans le modèle élasto-plastique cyclique global de la région en pointe de fissure [1,2].

Les travaux présentés ici ont d'abord consisté à adjoindre au modèle de comportement élasto-plastique [1,2]

global une loi de propagation pour la fissure, qui permet de statuer sur la vitesse et la direction de propagation de la fissure simulée. Dans un second temps, le modèle ainsi enrichi est implanté dans un code éléments finis étendus (XFEM). Dans ce type de modélisation, la présence d'une macrofissure peut être prise en compte indépendamment du maillage par l'incorporation de fonctions de base discontinues additionnelles dans l'approximation du champ de déplacement. Des fonctions d'enrichissement s'appuyant sur les solutions asymptotiques sont également utilisées en pointe de fissure afin d'obtenir une bonne estimation des facteurs d'intensité de contrainte nominaux. La méthode des Level Sets [3] permet enfin de gérer la propagation des fissures et de faciliter la définition des fonctions d'enrichissement.

Les principaux ingrédients du modèle de comportement élasto-plastique en pointe de fissure seront tout d'abord rappelés (§2), puis on présentera la loi de propagation que l'on souhaite adjoindre au modèle (§3). Enfin, après une brève présentation du code de calcul XFEM (§4), on analysera les premiers résultats obtenus pour des essais effectués sur une plaque afin de valider le modèle enrichi de la loi de propagation (§4.1), ainsi que sa bonne intégration dans le code de calcul.

2 Principaux ingrédients du modèle multi échelle de plasticité en pointe de fissure

Le modèle de plasticité proposé par Pommier, Lopez-Crespo *et al.* [1, 2] se présente comme une extension de la LEFM¹ où le champ de vitesse d'un point P dans le référentiel attaché à l'extrémité de la fissure est classiquement estimé par le produit de la variation d'un facteur d'intensité de contrainte nominal (\dot{K}^∞) et d'un champ de référence \vec{u}^e pour chacun des modes considérés. Le champ de référence \vec{u}^e est déterminé analytiquement en utilisant les solutions de Westergaard ou numériquement par le biais d'un calcul élément fini. On peut alors écrire le champ de vitesse de la manière suivante pour chacun des modes de sollicitation :

$$\begin{cases} \vec{v}_I(P) = \dot{K}_I^\infty \vec{u}_I^e \\ \vec{v}_{II}(P) = \dot{K}_{II}^\infty \vec{u}_{II}^e \end{cases} \quad (1)$$

Afin de prendre en compte le comportement élasto-plastique en pointe de fissure, on suppose que le champ de vitesse s'écrit désormais de la manière additive suivante :

$$\begin{cases} \vec{v}_I(P) = \dot{K}_I^\infty \vec{u}_I^e + \dot{\rho}_I (\beta \vec{u}_I^c + \vec{u}_I^c) & \text{ou encore } \vec{v}_I(P) = \dot{\tilde{K}}_I \vec{u}_I^e + \dot{\rho}_I \vec{u}_I^c \\ \vec{v}_{II}(P) = \dot{K}_{II}^\infty \vec{u}_{II}^e + \dot{\rho}_{II} (\gamma \vec{u}_{II}^c + \vec{u}_{II}^c) & \text{ou encore } \vec{v}_{II}(P) = \dot{\tilde{K}}_{II} \vec{u}_{II}^e + \dot{\rho}_{II} \vec{u}_{II}^c \end{cases} \quad (2)$$

avec ($\vec{u}_I^c, \vec{u}_{II}^c$) deux champs de référence complémentaires (ρ_I, ρ_{II}) leurs facteurs d'intensité respectifs qualifiés de facteurs d'intensité plastique, et (β, γ) des constantes. Le "·" désigne classiquement la dérivée temporelle. Les champs de référence \vec{u}_I^c et \vec{u}_{II}^c sont obtenus numériquement grâce à un calcul par éléments finis préliminaire faisant intervenir la loi de comportement élasto-plastique du matériau que l'on souhaite étudier et une décomposition orthogonale de Karhunen-Loeve. Ils peuvent aussi être considérés comme les champs de déplacement associés à une dislocation coin couchée sur le plan de la fissure. Dans ce cas, le déplacement normal aux lèvres de fissure est constant et égal à 1. ρ_I peut alors être considéré comme l'émoussissement plastique de la fissure pour le mode d'ouverture ou CTOD (Crack Tip Opening Displacement) et, analogiquement, ρ_{II} comme le CTSD (Crack Tip Sliding Displacement).

Les calculs numériques par éléments finis permettent de générer numériquement des évolutions de ρ_I et ρ_{II} pour divers chargement de mode mixte (K_I et K_{II}) et on élabore un modèle global simplifié qui permet de prévoir les mêmes évolutions que les calculs élasto-plastiques par éléments finis mais sans effectuer ces calculs. Pour cela, l'évolution des facteurs d'intensité plastique ρ_I et ρ_{II} est ensuite déterminée au moyen de trois outils brièvement rappelés ci-dessous :

1. Un critère de plasticité de type Von Mises généralisé (un critère en énergie élastique de cisaillement) exprimé dans un repère ($K_{II}^\infty, K_I^\infty$) permet de définir le domaine au-delà duquel l'approximation élastique du champ de vitesse n'est plus satisfaisante (voir Fig.(1).a)).

$$f(K_{II}^\infty, K_I^\infty, K_I^X, K_I^Y) = (K_I^\infty - K_I^X)^2 + \left(\frac{K_I^Y}{K_{II}^\infty}\right)^2 (K_{II}^\infty - K_{II}^X)^2 - (K_I^Y)^2 \quad (3)$$

K_I^Y et K_{II}^Y sont les seuils de plasticité pour les modes I et II respectivement. K_I^X et K_{II}^X définissent le centre du domaine d'élasticité et représentent donc à l'échelle macroscopique, les contraintes internes en pointe de fissure.

2. Une loi d'écoulement normale au domaine d'élasticité, définie en termes énergétiques sur un diagramme G_I, G_{II} , est choisie comme suit :

$$G_i = \text{signe}(K_i^\infty - K_i^X) \frac{(K_i^\infty - K_i^X)^2}{E^*} \quad \text{et} \quad G_i^Y = \frac{(K_i^Y)^2}{E^*} \quad \text{où } i = \{1, 2\} \quad \text{et } E^* = E/(1 - \nu^2) \quad (4)$$

¹Linear Elastic Fracture Mechanics

La définition du domaine d'élasticité devient donc (Fig.(1).b)) :

$$f(G_I, G_{II}) = |G_I| + \frac{G_I^Y}{G_{II}^Y} |G_{II}| - G_I^Y \quad (5)$$

Enfin, la loi d'écoulement normale associée à ce domaine s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_I = \dot{\rho}_{II} = 0 \text{ si } f = 0 \text{ ou si } (f > 0 \text{ et } \dot{f} < 0) \\ \dot{\rho}_I = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial G_I} \text{ et } \dot{\rho}_{II} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial G_{II}} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

3. Des équations d'évolution pour K_I^X et K_{II}^X permettent de décrire les translations du domaine d'élasticité au cours du chargement (Fig.(1).c)). Pommier *et al.* [2] ont par ailleurs montré qu'il est raisonnable de supposer que ce dernier se déplace conformément à l'écoulement plastique, ainsi les équations de déplacement de son centre sont directement liées aux évolutions de ρ_I et ρ_{II} :

$$\begin{cases} \dot{K}_I^X = p \dot{\rho}_I & \text{avec } p(G_i^Y, \frac{\partial f}{\partial G_i}), \text{ où } i = \{1, 2\}. \\ \dot{K}_{II}^X = p \dot{\rho}_{II} \end{cases} \quad (7)$$

Les points 2 et 3 permettent de déterminer $\dot{\lambda}$ et par suite l'évolution de ρ_I et ρ_{II} , en considérant classiquement que durant la déformation plastique, $f = 0$ et $\dot{f} = 0$.

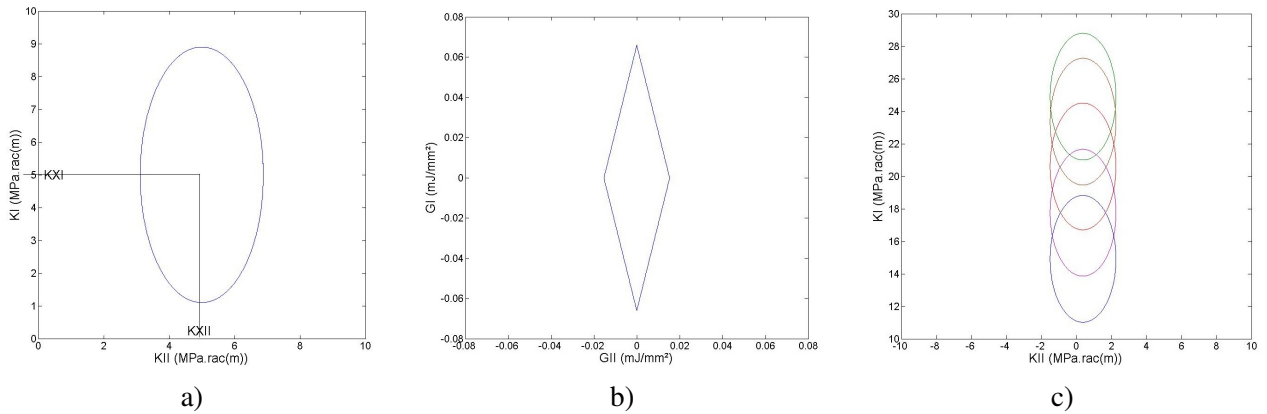


FIG. 1 – a) Seuil de plasticité exprimé dans un repère $(K_{II}^\infty, K_I^\infty)$. b) Seuil de plasticité exprimé dans un repère (G_{II}, G_I) . c) Illustration de l'écrouissage observé lors d'un chargement en mode I pur.

3 Loi de propagation de fissure

Le modèle simplifié [1, 2] permet donc de prévoir la plasticité cyclique en mode mixte en pointe de fissure à l'échelle globale, sans effectuer de calcul par éléments finis. On souhaite désormais enrichir le modèle de plasticité confinée d'une loi de propagation permettant de statuer sur le taux d'accroissement et la direction de propagation d'une fissure. Comme la propagation de la fissure est ici gouvernée par la plasticité, les directions de contrainte de cisaillement maximale ($\pm\alpha = 71,5^\circ$) sont privilégiées. De plus on rappelle que $\dot{\rho}_I$ et $\dot{\rho}_{II}$ peuvent être considérés comme les taux d'ouverture et de glissement en pointe de fissure (CTOD et CTSD respectivement). On choisit donc les avancées de fissures exprimées dans la base locale attachée à la pointe de fissure comme une combinaison linéaire des $\dot{\rho}_i$:

$$\begin{cases} \dot{a}_x = (\lambda_1 + \lambda_2) [|\dot{\rho}_I| + |\dot{\rho}_{II}|] \cos(\alpha) \\ \dot{a}_y = (\lambda_1 - \lambda_2) [|\dot{\rho}_I| + |\dot{\rho}_{II}|] \sin(\alpha) \end{cases} \quad (8)$$

où (\vec{x}, \vec{y}) est la base locale en pointe de fissure (Fig.(3)).

Les coefficients λ_1 et λ_2 sont déterminés suivant le type de chargement. Les chargements en mode I et mode II purs font en particulier l'objet d'un traitement spécifique. En effet, si l'on prend le cas du mode I pur, lorsqu'on atteint le seuil de plasticité pour $G_I > 0$, on se trouve au niveau de l'un des sommets du domaine d'élasticité dans le plan (G_I, G_{II}) . La direction d'écoulement normale est alors indéterminée et l'extraction de $\dot{\rho}_I$ et

ρ_{II} indirecte. On choisit alors de conserver les deux directions d'écoulement normales envisageables (selon que G_{II} est positif ou non) et de leur attribuer un poids identique ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$). Ceci revient physiquement à activer successivement (voir Fig.(2)) ou simultanément les deux axes de glissement correspondant aux deux directions de cisaillement maximum. Le bilan de cette propagation peut s'écrire de la manière suivante : $\dot{a}_x = [|\dot{\rho}_I| + |\rho_{II}|] \cos(\alpha)$ et $\dot{a}_y = 0$ ce qui correspond bien à une propagation suivant l'axe de la fissure. Un traitement analogue à celui présenté est ensuite appliqué pour chacun des sommets.

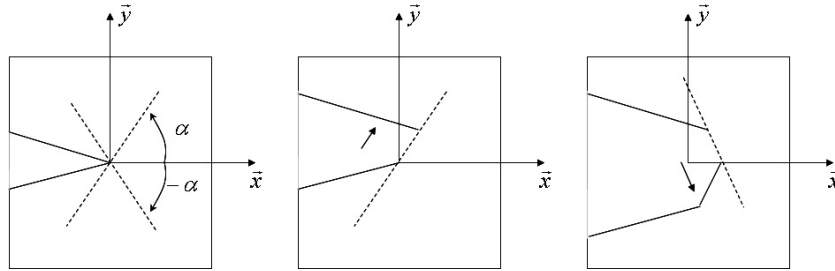


FIG. 2 – Schématisation du mécanisme de propagation conforme à la loi proposée dans le cas d'une sollicitation en mode I pur, avec en pointillés les plans de cisaillement maximal.

4 Modélisation de la propagation d'une fissures par la XFEM

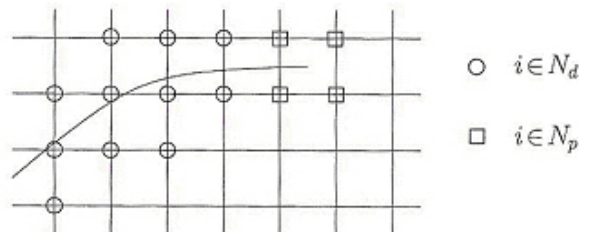
Afin d'étudier la propagation de fissure dans des structures plus ou moins complexes, le modèle de plasticité enrichi de la loi de propagation a été implanté dans un code XFEM développé dans l'environnement MATLAB et utilisé dans les travaux de Guidault *et al.* [4]. La XFEM permet de s'affranchir des problèmes d'adéquation entre trajet de fissure et maillage. En effet, dans un code éléments finis classique, une fissure ne peut se propager que le long d'éléments, le maillage doit donc être conforme aux géométries initiale et future de la fissure. Cette condition n'est obtenue qu'au prix de remaillages parfois complexes, et/ou par la connaissance a priori du trajet de propagation. Pour éviter cela, de nouvelles fonctions de forme sont ajoutées localement au voisinage de la fissure via le concept de la PUM (Partition Unity Method, Melenk *et al.* [5]) dans l'approximation du champ de déplacement afin de prendre en compte une discontinuité et d'incorporer la solution asymptotique en pointe de fissure de la LEFM (Moës *et al.* [6], Elguedj *et al.* [7]). La fonction d'enrichissement de Heavyside H est utilisée pour les noeuds (N_d) des éléments traversés par la fissure (terme A dans (9)). L'élément contenant la pointe de fissure est ensuite enrichi à l'aide des fonctions asymptotiques spécifiques (noeuds N_p). En élasticité il peut s'agir de l'ensemble de fonctions suivantes : $F_j = \sqrt{r} \{ \sin(\theta/2), \sin(\theta/2), \sin(\theta)\sin(\theta/2), \sin(\theta)\cos(\theta/2) \}$ (terme B dans (9)). Cette technique permet d'obtenir une estimation des champs en pointe de fissure de meilleure qualité qu'avec des éléments finis classiques.

Au final, le champ de déplacement est cherché sous la forme :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum_{i \in N} N_i(\vec{x}) \vec{u}_i + \underbrace{\sum_{i \in N_d} N_i(\vec{x}) H(\vec{x}) \vec{a}_i}_A + \underbrace{\sum_{i \in N_p} N_i(\vec{x}) \left(\sum_{j=1}^4 F_j(\vec{x}) \vec{b}_i^j \right)}_B \quad (9)$$

où

- N est l'ensemble des noeuds du maillage.
- \vec{u}_i sont les déplacements au noeud i (degré de liberté vectoriel classique).
- N_i sont les fonctions de forme des éléments finis classiques.
- \vec{a}_i sont les degrés de liberté permettant de quantifier le saut de déplacement induit par la discontinuité.
- \vec{b}_i^j sont les degrés de liberté agissant sur les fonctions asymptotiques.



Les enrichissements se font donc exclusivement aux noeuds, et leur bonne distribution dépend de la connaissance précise de la position de la fissure, sachant que cette dernière peut évoluer.

La fissure est ici repérée au moyen de deux fonctions de niveau (communément appelées Level Sets), l'une décrivant l'abscisse curviligne de la fissure, et l'autre orthogonale au front de fissure, comme proposé initialement par Stolarska *et al.* [3]. L'enrichissement des champs de déplacement des noeuds se fait après évaluation des Level Sets en chacun des noeuds. Le suivi de la progression de la fissure consiste donc en une mise à jour des fonctions de niveaux représentant cette dernière, et par conséquent de la liste des noeuds à enrichir suivant leur position par rapport à la fissure.

Le code utilisé est également doté d'une procédure de détermination des facteurs d'intensité de contrainte (FIC) en fonction du chargement appliqué à la structure étudiée d'une part, et de la géométrie actuelle de la fissure d'autre part. Cette procédure fait appel à la technique des intégrales d'interaction.

Pour l'étude de l'évolution de la fissuration dans une structure donnée et sous un chargement quelconque, on propose donc l'algorithme simplifié suivant (Fig.(2bis)). Il sera utilisé pour chacune des simulations qui seront présentées dans le paragraphe (4.1).

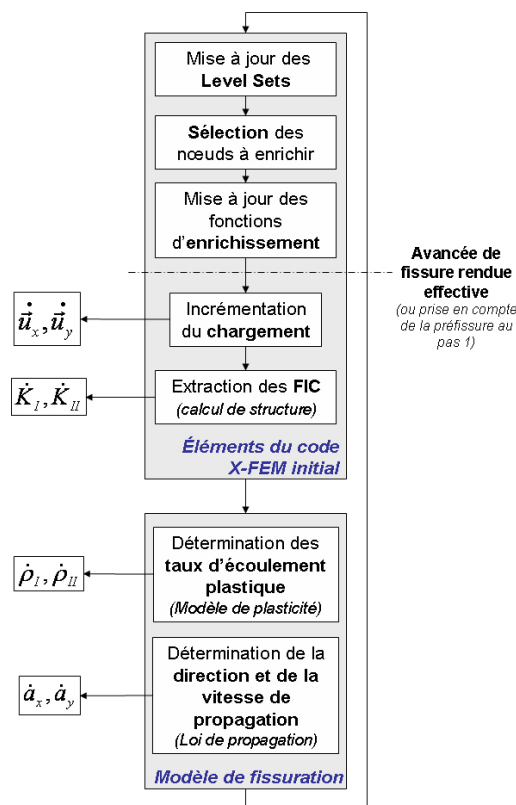


Fig.(2bis) Algorithme de résolution simplifié faisant apparaître l'insertion du modèle de fissuration dans la structure initiale du code XFEM.

4.1 Résultats numériques

Les premières simulations présentées ici s'inscrivent évidemment dans une démarche "prototype" nécessaire de mise en oeuvre et de validation du modèle enrichi. Ainsi la structure d'étude choisie de même que les types de sollicitations demeurent pour l'instant très simples.

La structure choisie pour l'étude est une plaque de dimension 7×15 mm, dont le maillage comporte 15 éléments dans la largeur, et 33 dans la longueur (voir Fig.(3).a)). Dans les conditions initiales, la plaque présente une fissure débouchante à mi-hauteur d'une taille $a_0 = 1.5$ mm. Les chargements sont imposés sous forme de déplacement aux extrémités de la plaque. Le formalisme adopté est celui des déformations planes. Enfin on précise que la mise à jour des Level Sets n'est effectuée que lorsque la fissure s'est propagée d'un dixième de sa longueur initiale.

Afin de tester la bonne intégration du modèle de fissuration dans le code XFEM, on simule dans un premier temps un essai de traction uniaxiale caractérisé par une évolution initiale de KI sinusoïdale et d'amplitude $20 \text{ MPa}\sqrt{m}$. Après 1800 cycles de chargement, on constate que la fissure est restée coplanaire et s'est propagée avec une vitesse de $5 \mu\text{m}/\text{cycle}$ environ, et que la gestion des mises à jour des Level Sets et des enrichissements a correctement été prise en compte comme en témoignent les Fig.(3).b) et (3).c).

Ces premiers résultats encourageants permettent d'ores et déjà d'envisager des chargements plus complexes. En particulier on souhaite comparer les résultats obtenus pour deux chargements en mode mixte pour lesquels les conditions aux limites en déplacements imposés sont telles que les variations initiales des facteurs d'intensité de contrainte sont sinusoïdales, de même amplitude, avec un déphasage de $\Pi/2$ ou sans déphasage. D'après les travaux de Doquet et Bertolino [8, 9] lorsque les deux sollicitations sont en phase la bifurcation du trajet de fissuration est systématique contrairement à ce que l'on peut observer lorsque les signaux sont déphasés. Les simulations correspondantes sont en cours de réalisation et seront présentées ultérieurement. Les premiers résultats obtenus semblent toutefois montrer qu'une prise en compte des phénomènes de frottements qui jouent un rôle important lors de sollicitations en mode II, semble nécessaire.

5 Conclusion

L'objectif de ces travaux est double. Tout d'abord, on souhaitait compléter le modèle multi échelle de plasticité à l'aide d'une loi de propagation afin d'obtenir un modèle de fissuration complet permettant de statuer sur l'évolution de l'extrémité de la fissure en fonction d'un chargement donné. La loi proposée est fondée sur l'hypothèse que la fissuration par fatigue est induite par plasticité, ce qui suppose une direction de propagation de la fissure selon les plans de cisaillements maximum, et une vitesse de fissuration proportionnelle à la vitesse de déformation plastique équivalente. Par ailleurs, comme la surface seuil de plasticité possède des points angu-

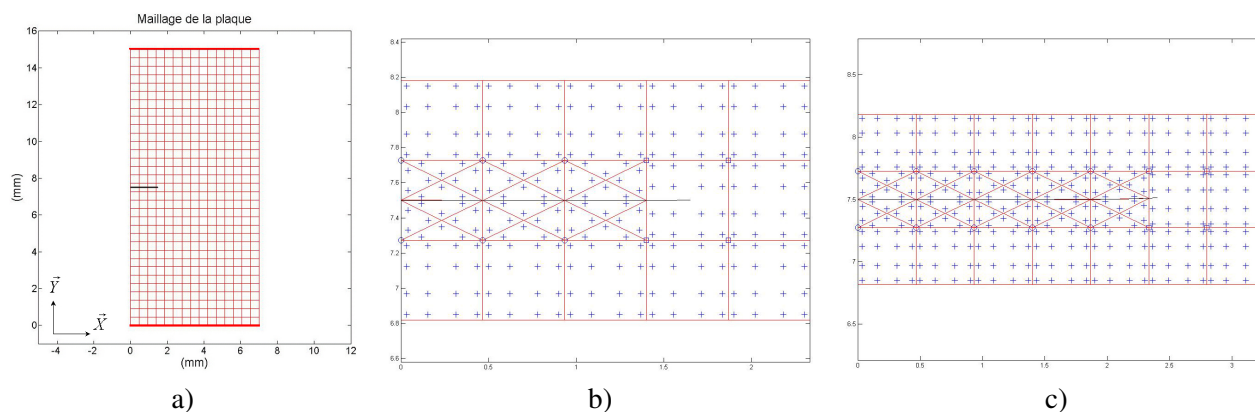


FIG. 3 – a) Maillage de la plaque d'étude, représentation de la fissure initiale et indication schématisée des noeuds où sont appliquées les conditions aux limites (trait gras). b) Représentation des enrichissements à l'instant initial ($a_0 = 1,5\text{mm}$) avec le même formalisme qu'au §(4). c) Représentation des enrichissements après 1800 cycles de chargement ($a_0 = 2,4\text{mm}$).

leux et qu'on a adopté une loi d'écoulement normale, on définit la direction d'écoulement plastique au niveau d'un sommet comme une combinaison linéaire des directions d'écoulement de part et d'autre de ce sommet, plus clairement deux "systèmes de glissement" sont activés, donc la vitesse de propagation s'exprimera aussi comme une combinaison linéaire des taux d'écoulement plastique pour les deux modes.

Le modèle de fissuration obtenu a ensuite été implanté dans un code XFEM permettant de réaliser un certain nombre de simulations numériques sur des structures basiques afin de valider non seulement le choix de la loi de propagation, mais également l'implantation du modèle de fissuration dans le code. Les résultats obtenus pour la simulation d'un essai de traction uniaxiale sont à ce titre encourageants (bonne mise à jour des Level Sets, propagation de la fissure suivant son axe,...). L'application de chargements en mode mixte qui est en cours de réalisation semble en revanche mettre en lumière la nécessité d'enrichir la loi de propagation. Il serait en particulier intéressant de prendre en compte des effets de frottement des lèvres de fissure afin d'obtenir une modélisation plus réaliste du mode II de propagation. Une loi d'évolution pour la prise en compte de la fermeture éventuelle de la fissure en fonction de (ρ_I et ρ_{II}) est également à envisager. D'un point de vue plus numérique, il conviendra désormais de s'intéresser non seulement à des géométries plus complexes, mais aussi et surtout à l'application sur ces structures de véritables chargements aléatoires en fatigue afin de valider par comparaison à l'expérience, la bonne prise en compte des effets de surcharge au moyen du modèle complet de fissuration.

Références

- [1] Lopez-Crespo P. and Pommier S. Numerical analysis of crack tip plasticity and history effects under mixed mode conditions. *Journal of Solid Mechanics and Material Engineering*, 2(12), 1567–1576, 2008.
- [2] Pommier S., Lopez-Crespo P., and Decreuse P. A multiscale approach to build a global variational formulation of the mixed-mode cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, page à paraître, 2009.
- [3] Stolarska M., Chopp D., Moës N., and Belytschko T. Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 51(8), 943–960, 2001.
- [4] Guidault P., Allix O., Champaney L., and Cornuault C. A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 197, 381–399, 2008.
- [5] Melenk J. and Babuska I. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 139, 289–314, 1996.
- [6] Moës N., Dolbow J., and Belytschko T. A finite-element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 46, 131–150, 1999.
- [7] Elguedj T., Gravouil A., and Combescure A. Appropriate extended functions for x-fem simulation of plastic fracture mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195, 501–515, 2006.
- [8] Doquet V. and Bertolino G. A material and environment-dependent criterion for the prediction of fatigue crack paths in metallic structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 3399–3412, 2008.
- [9] Doquet V. and Bertolino G. Local approach to fatigue cracks bifurcation. *International Journal of Fatigue*, 30, 942–950, 2008.