

# Une approche statistique de comportement visco-hyper-plastique pour des élastomères chargés

S. MÉO<sup>a</sup>, A. BOUKAMEL<sup>b,c</sup>, J.-M. MARTINEZ<sup>b</sup> ET S. LEJEUNES<sup>b</sup>

a. Laboratoire de Mécanique et Rhéologie de l'Université de Tours, 7 avenue Marcel Dassault 37200 Tours

b. Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 chemin Joseph-Aiguier 13402 Marseille Cedex 20

c. Ecole Centrale de Marseille, 38 rue Frédéric Joliot-Curie 13451 MARSEILLE Cedex 2

## Résumé :

Ce papier présente une généralisation statistique de modèles rhéologiques étendus au cadre des grandes déformations afin de modéliser la réponse à des sollicitations complexes d'élastomères chargés. Cette méthode permet le passage d'un modèle rhéologique présentant un nombre fini de branches rhéologiques en parallèle, de type Maxwell par exemple, à un nombre infini. Sont présentés des résultats expérimentaux, théoriques, d'identification, ainsi que quelques éléments de modélisation.

## Abstract :

This paper deals with a statistical generalization of rheological models extended to finite deformation, in order to modelize the behavior of filled rubber subjected to complex loads. This method allows to pass from a discrete number of rheological branches of Maxwell to an infinity. Here we present some experimental and theoretical results, an identification strategy and the numerical implementation.

**Mots clés :** Élastomère chargé, hyperélasticité, viscosité, plasticité, assemblage rhéologique, caractérisation expérimentale, identification.

## 1 Introduction

Les élastomères sont de plus en plus présents dans le monde industriel. Ils possèdent un haut pouvoir de déformabilité tout en étant incompressibles – ou quasiment – et proposent dans le cas des élastomères chargés, un caractère amortissant.

Ces propriétés, bien qu'intéressantes au niveau industriel, engendrent de nombreuses difficultés dans la prévision de leur comportement (grandes déformations, incompressibilité, auto-échauffement, forte sensibilité à la température, à la vitesse de sollicitation...). De plus, leur utilisation se faisant dans des conditions de plus en plus extrêmes (larges gammes de températures, d'amplitudes et de fréquences), il devient difficile de proposer un modèle (*i.e.* une loi de comportement et un et un seul jeu de paramètres) permettant de couvrir l'intégralité du domaine d'utilisation.

L'idée dans ce papier est de caractériser expérimentalement un matériau élastomère afin de mettre en évidence les caractéristiques de comportement (élasticité, plasticité, viscosité...) nécessaires à sa modélisation, puis d'établir un modèle théorique cohérent et de proposer une technique d'identification de ce dernier. Il sera obtenu, au final, un outil de simulation permettant la prévision de la réponse de pièces réelles industrielles, sous diverses sollicitations mécaniques avec le même jeu de paramètres matériau.

## 2 Résultats expérimentaux

### 2.1 Introduction

Dans le but de caractériser nos élastomères, une campagne expérimentale complète est mise en place. Celle-ci s'articule autour :

- d'essais de traction sur éprouvette de type H2 :
  - en relaxation à différentes déformations nominales
  - en traction quasi-statique à rupture à différents taux de déformation
- d'essais de cisaillement sur éprouvettes de double cisaillement
  - en relaxation à diverses amplitudes de cisaillement
  - en cycles de charge-décharge à différentes amplitudes
  - en chargements cycliques triangulaires à différentes vitesses (de  $0.03s^{-1}$  à  $10s^{-1}$ ) et amplitudes (12.5%, 25% et 50%) de chargement.

De plus, tous ces tests ont été réalisés sous enceinte thermique. Ceci a permis de les mener à des températures allant de  $-55^{\circ}\text{C}$  à  $+70^{\circ}\text{C}$ .

## 2.2 Constatations et comportements

### 2.2.1 Essais de relaxation

Les évolutions présentées Figure 1 illustrent les réponses du matériau à une sollicitation de type relaxation dans des cas de chargement de traction et de cisaillement. Elles représentent la contrainte normalisée en fonction du temps.

Les courbes Figure 1(a)-1(b) montrent l'indépendance de la réponse, en terme de contrainte normalisée, vis-à-vis de l'amplitude de déformation.

Les réponses Figure 1(d)-1(c) mettent quant à elles, clairement en évidence l'influence de la température sur le comportement du matériau.

L'ensemble des courbes Figure 1 semble indiquer des comportements similaires en traction et cisaillement.

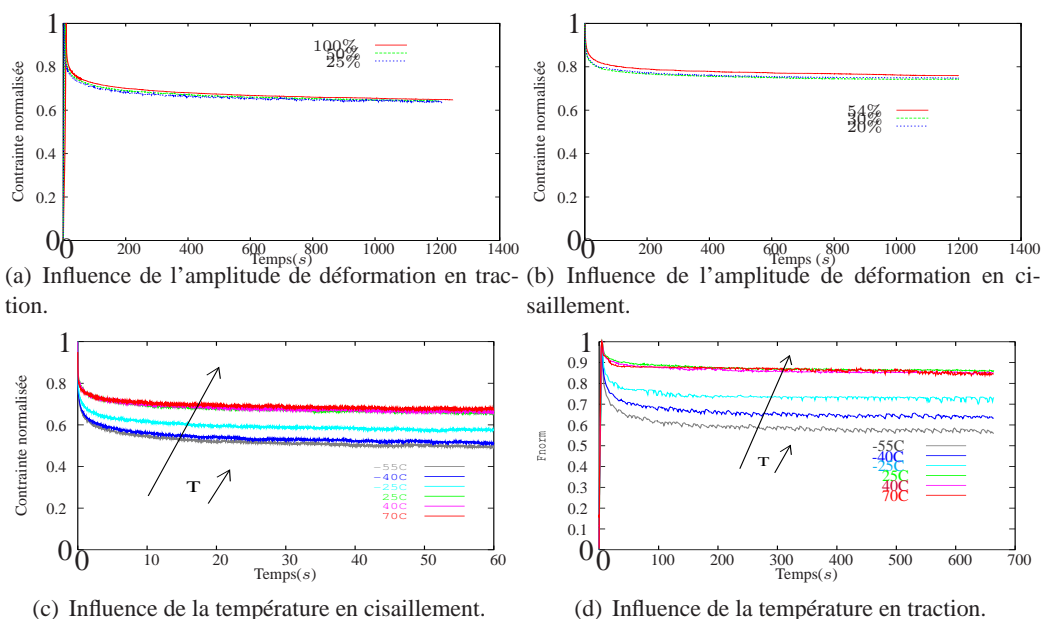


FIG. 1 – Réponse du matériau sous sollicitation de relaxation.

### 2.2.2 Essais quasi-statiques

La Figure 2 représente la réponse à très faible vitesse de cisaillement ( $\dot{\gamma} = 0.03\text{s}^{-1}$ ) du matériau pour 3 amplitudes de charge/décharge. Il apparaît un comportement dissipatif malgré la faible vitesse de déformation (*i.e.* absence de viscosité) imputable à un comportement élasto-plastique.

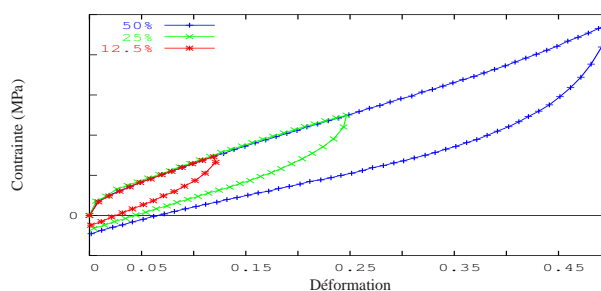


FIG. 2 – Réponses quasi-statiques en cisaillement ( $\dot{\gamma} = 0.03\text{s}^{-1}$ ).

### 2.2.3 Essais cycliques

Les tests présentés dans ce paragraphe représentent la réponse du matériau soumis à des chargement de cisaillement cycliques triangulaires d'amplitudes croissantes avec un maintien constant de l'amplitude sur une dizaine de cycles. Les paramètres des essais sont les suivants :

- Température ( $T$ ) :  $70^{\circ}\text{C}$ ,  $40^{\circ}\text{C}$ ,  $25^{\circ}\text{C}$ ,  $-25^{\circ}\text{C}$ ,  $-40^{\circ}\text{C}$  et  $-55^{\circ}\text{C}$ .
- Taux de cisaillement :  $0.03\text{s}^{-1}$ ,  $0.1\text{s}^{-1}$ ,  $0.3\text{s}^{-1}$ ,  $1\text{s}^{-1}$ ,  $3\text{s}^{-1}$  et  $10\text{s}^{-1}$ .
- Amplitude du cisaillement ( $\gamma_{max}$ ) : 12.5%, 25% et 50%.

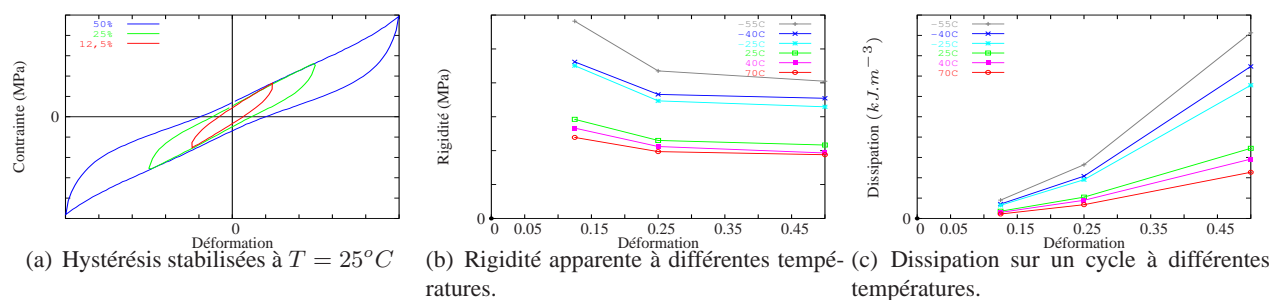


FIG. 3 – Influence de l'amplitude de déformation dans un cas de chargement de cisaillement triangulaire cyclique ( $\dot{\gamma} = \pm 0.3s^{-1}$ ). Résultats exprimés en fonction de l'amplitude.

La Figure 3, qui représente un cycle stabilisé, met en exergue de fortes non-linéarités pour les amplitudes élevées. Il est aussi possible d'observer une baisse de rigidité moyenne avec l'augmentation de l'amplitude (effet PAYNE), phénomène d'autant plus prononcé que la température est basse (voir Figure 3(b)). Ce comportement est souvent lié dans la littérature à un comportement plastique des élastomères chargés (voir [1, 2]). De manière plus classique, une augmentation du taux de déformation, nous permet de voir Figure 4 une augmentation de la rigidité (EFFET GENT-FLETCHER) ainsi que de la dissipation.

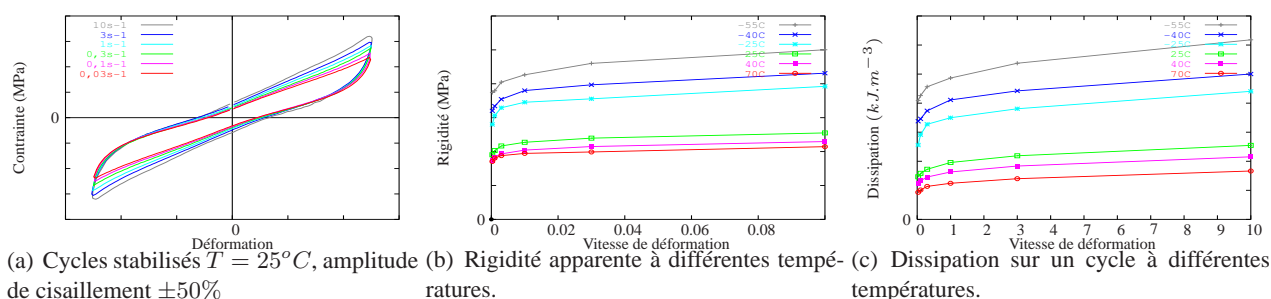


FIG. 4 – Influence de la vitesse de déformation dans un cas de chargement de cisaillement triangulaire cyclique (amplitude de déformation 50%). Résultats exprimés en fonction de la vitesse de cisaillement.

Enfin, l'influence importante de la température est mise en avant par la Figure 5, en particulier :

- un adoucissement et une réduction de la dissipation sur un cycle avec l'augmentation de la température,
- l'aspect non linéaire du comportement semble s'amplifier avec les températures basses :
  - apparition d'un point de rebroussement et d'une rigidification au changement de signe de la vitesse,
  - une contraction de la boucle d'hystérésis au passage à déformation nulle.

Ces non-linéarités semblent confirmer un comportement plastique qui semblent s'amplifier à l'approche de la température de transition vitreuse du matériau.

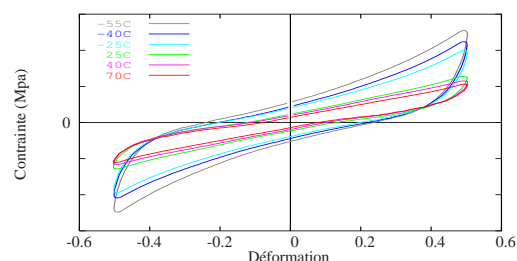


FIG. 5 – Influence de la température sur un cycle triangulaire stabilisé de cisaillement ( $\gamma_{max} = 50\%$  et  $\dot{\gamma} = \pm 10s^{-1}$ ).

Pour résumer, cette rapide présentation semble mettre en évidence quelques points qu'il sera important de traduire dans le modèle théorique à venir :

- les non linéarités géométriques inhérentes aux grandes déformations,
- le caractère viscoélastique couplé à l'hyperélasticité pour caractériser une partie du caractère dissipatif du matériau et l'influence de la vitesse de chargement (effet Gent Fletcher en particulier).
- et enfin l'influence de la plasticité pouvant traduire les effets de point anguleux à basses températures ainsi que l'effet Payne.

### 3 Modèle de comportement

#### 3.1 Loi de comportement pour un modèle unitaire viscoélastique

##### REMARQUE 1

Plus de détail dans la détermination du modèle sont donnés dans [3, 2].

Dans la configuration eulérienne, la dissipation s'écrit :

$$\phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - J^{-1} \rho_0 \dot{\psi}, \quad (1)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $J$ ,  $\psi$  sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy, le taux de déformation, le déterminant de  $\mathbf{F}$  le gradient de la transformation et l'énergie libre. Cette dernière est découpée en deux, une partie isochorique ( $\bar{\psi}$  dépendant de  $\bar{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$ ) et une volumétrique ( $\psi_{vol}$  dépendant uniquement de  $J$ )

$$\psi = \bar{\psi} + \psi_{vol}(J) \quad (2)$$

La notion d'état intermédiaire [4], permet de décomposer  $\bar{\mathbf{F}}$ , le tenseur de déformation incompressible :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{F}}_a. \quad (3)$$

$\bar{\psi}$  est alors choisie comme :

$$\bar{\psi}(\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}_e) = \psi_e(\bar{\mathbf{B}}_e) + \psi_0(\bar{\mathbf{B}}) \quad (4)$$

( $\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_e$ ,  $J$ ) seront considérés comme des variables indépendantes. Le cadre des matériaux standards généralisés permet de postuler l'existence d'un pseudo-potential de dissipation  $\varphi_v$ , qui devra, pour des raisons d'objectivité, être considéré comme dépendant de  $\bar{\mathbf{D}}_v^0$  le tenseur objectif des vitesses de déformations visqueuses.

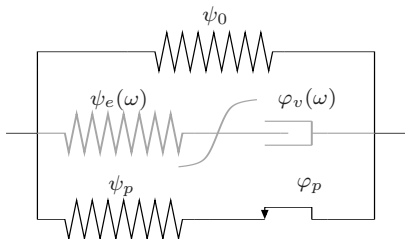
$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0^D + \boldsymbol{\sigma}_e^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} \\ 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e \cdot \frac{\partial \psi_e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \bar{\mathbf{D}}_v^0} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_0 = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{\mathbf{B}}} , \boldsymbol{\sigma}_{vol} = \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma}_e = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e \cdot \frac{\partial \psi_e}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e} \end{array} \right. \quad (5)$$

Ce qui peut être vu comme une généralisation aux grandes déformations d'un modèle rhéologique de Zener.

## 3.2 Généralisation statistique

### REMARQUE 2

L'implantation numérique de ce modèle a été réalisée dans un code de calcul orienté objet. Pour de plus amples informations nous renvoyons le lecteur vers [5, 3].



Nous rappelons que nous avons deux problèmes à résoudre : traduire au mieux le comportement sur une large gamme de températures ainsi qu'en couvrant un large spectre de fréquences et ce en traduisant les phénomènes présentés dans les paragraphes précédents. Des travaux antérieurs ont montré que la prise en compte d'un comportement plastique donne de bon résultats pour rendre compte des phénomènes de point anguleux au changement de signe de la sollicitation ainsi que les phénomènes liés à la baisse de température ambiante (augmentation de la rigidité, de la dissipation...). Les modèles rhéologiques multibranches semblent adaptés pour rendre compte de la réponse du matériau pour des sollicitations présentant des fréquences différentes, voir superposées (on parle de sollicitations multifréquentielles) [6, 1, 7].

L'inconvénient est le nombre important de paramètres à identifier. Pour pallier cette difficulté, il a été proposé une approche statistique généralisant un nombre discret de branches à "une infinité". Ceci permet alors, avec un nombre réduit de paramètres, de rendre compte du comportement sur un large domaine de fréquences. Pour un modèle multi-branches<sup>1</sup>, l'énergie libre (resp. le potentiel de dissipation) est considéré comme la somme des énergies libres (resp. des potentiels de dissipation) de chaque branche. Pour un modèle continu statistique Figure 6, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_0(\bar{\mathbf{B}}) + \psi_{vol}(J) + \int_0^\infty \psi_e(\omega, \bar{\mathbf{B}}_e(\omega)) P(\omega) d\omega + \psi_p(\bar{\mathbf{B}}_{ep}) \\ \varphi = \int_0^\infty \varphi_v(\omega, \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)) P(\omega) d\omega + \varphi_p(\bar{\mathbf{D}}_p^0) \end{array} \right. \quad (6)$$

$\omega$  est une variable statistique liée à l'énergie d'activation d'un micro-mécanisme et  $P(\omega)$  est la probabilité qu'une population de charges se voit associer à la valeur  $\omega$ .

Les équations (6) et (5) donnent alors les lois de comportement et complémentaires du modèle (Figure 6)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>  $N$  branches de Maxwell à la place de la branche statistique (*i.e.* la branche grise) sur Figure 6.

<sup>2</sup> Pour la branche hyperélasto-plastique,  $\bar{\mathbf{F}}$  est multiplicativement décomposée en une transformation élastique  $\bar{\mathbf{F}}_{ep}$  et une autre plastique  $\bar{\mathbf{F}}_{pp}$ , telles que  $\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_{ep} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{pp}$ .

$C_1$  et  $C_2$  sont les deux coefficients d'une loi hyperélastique de Gent-Thomas,  $\bar{G}$  et  $\bar{\eta}$  sont deux fonctions, dépendant de  $\omega$  et choisies pour couvrir notre temps caractéristique<sup>3</sup>,  $\chi$  et  $A_p$  les paramètres de la branche elasto-plastique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0^D + \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \int_0^\infty \boldsymbol{\sigma}_e^D(\omega) P(\omega) d\omega + \boldsymbol{\sigma}_p^D \\ \boldsymbol{\sigma}_0 = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \quad \boldsymbol{\sigma}_{vol} = \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma}_e(\omega) = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \psi_e(\omega)}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e(\omega)} \\ 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{V}}_e(\omega) \cdot \frac{\partial \psi_e(\omega)}{\partial \bar{\mathbf{B}}_e(\omega)} \cdot \bar{\mathbf{V}}_e(\omega) = \frac{\partial \varphi_v(\omega)}{\partial \bar{\mathbf{D}}_v^0(\omega)} \\ \boldsymbol{\sigma}_p = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{ep} \cdot \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\mathbf{B}}_{ep}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_p = \frac{\partial \varphi_p}{\partial \bar{\mathbf{D}}_p^0} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \psi_0 = C_1 (I_1(\bar{\mathbf{B}}) - 3) + C_2 \ln \left( \frac{I_2(\bar{\mathbf{B}})}{3} \right) \\ \psi_{vol} = \frac{k}{2} (J - 1)^2 \\ \rho_0 \psi_e(\omega) = \bar{G} (I_1(\bar{\mathbf{B}}_e(\omega)) - 3) \\ \varphi_v(\omega) = \frac{\bar{\eta}}{2} \bar{\mathbf{D}}_v^0 : \bar{\mathbf{D}}_v^0 \\ \rho_0 \psi_p = A_p (I_1(\bar{\mathbf{B}}_{ep}) - 3) \quad \varphi_p = \chi \|\bar{\mathbf{D}}_p^0\| \\ P(\omega) = P_0 e^{-\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \end{array} \right. \quad (7)$$

## 4 Identification

### 4.1 Stratégie

L'identification des lois de comportement (7) se fait par l'ajustement des réponses théoriques semies-analytiques aux données expérimentales et ce en minimisant une distance des moindres carrés. Les formes des différents gradients de transformations nécessaires sont supposées connues.

Ce qui permet via les équations (7) de connaître les réponses en contraintes ( $\pi_{12} = \tau$  pour le cisaillement et  $\pi_{11} = \sigma$  pour la traction, avec  $\pi$  le premier tenseur de Piola-Kirchoff) et de les comparer aux réponses expérimentales.

### 4.2 Algorithme d'identification

L'identification des paramètres  $\mathbf{X} = \{C_1, C_2, G_0, \eta_\infty, A_p, \chi, \Omega\}$  peut se réduire à un problème de minimisation entre les courbes expérimentales  $\{(\lambda_i, \sigma_i), i = 1, N_T\}$  et  $\{(\gamma_i, \tau_i), i = 1, N_S\}$  et théoriques  $(\lambda, \sigma(\lambda, \mathbf{X}))$  et  $(\gamma, \tau(\gamma, \mathbf{X}))$ . Ceci peut se faire, par exemple, au travers d'une distance des moindres carrés. La stratégie d'identification, s'articule alors autour de trois points :

1. Sur un essai de chargement monotone quasi-statique, on donne une première évaluation des paramètres  $C_1, C_2, A_p, \chi$ .
2. Puis au travers des essais de relaxation une correction est amenée à cette prédiction.
3. Enfin à l'aide des essais triangulaires cycliques à amplitude croissante,  $\bar{G}_0, \bar{\eta}_\infty$  sont déterminés.

Cette procédure est répétée pour les différentes températures expérimentales permettant l'obtention de l'évolution donnée en Figure 4.2.

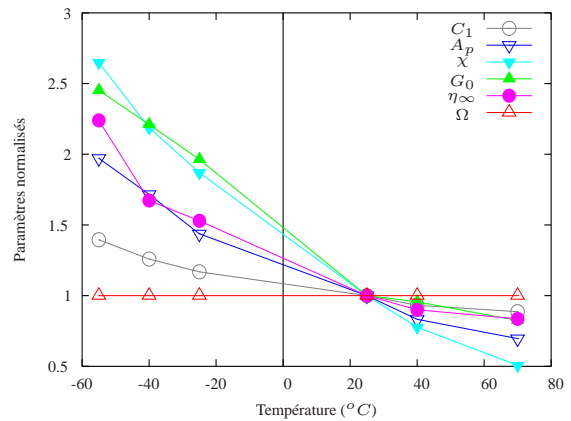


FIG. 7 – Paramètres normalisés en fonctions de la température ( $X_n = X_T/X_{25}$ ).

## 5 Exemples et résultats

On réalise via l'implantation éléments finis du modèle, en utilisant les paramètres identifiés, le cisaillement d'un pavé d'élastomère. La Figure 8(c) montre une bonne corrélation entre le modèle éléments finis et expérience pour un essai de cisaillement à amplitude croissante. Pour un même jeu de paramètres, il en va de même pour des sollicitation multifréquentielles complexes (Figure 8(a)-8(b)). On peut aussi voir, un accord correct sur les évolutions des dissipations en fonction de l'amplitude ou de la fréquence sur les figures 9(d) et 9(b). Les courbes obtenues sur les graphes 9(a) et 9(c) illustrent une bonne représentation respectivement des effets Gent-Fletcher et Payne.

<sup>3</sup>Les fonctions statistiques  $\bar{G}$  et  $\bar{\eta}$  ne dépendent respectivement que des paramètres  $G_0$  et  $\eta_\infty$

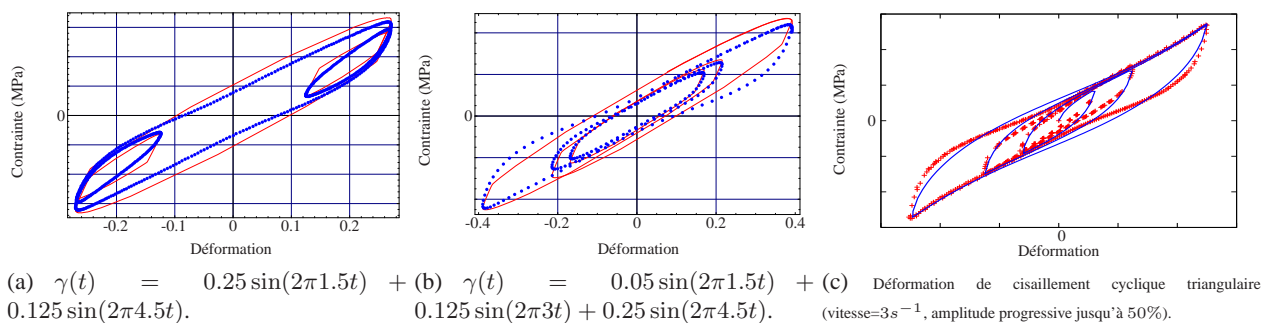


FIG. 8 – Résultats pour des chargements complexes. Tests réalisés sur éprouvette de double cisaillement.

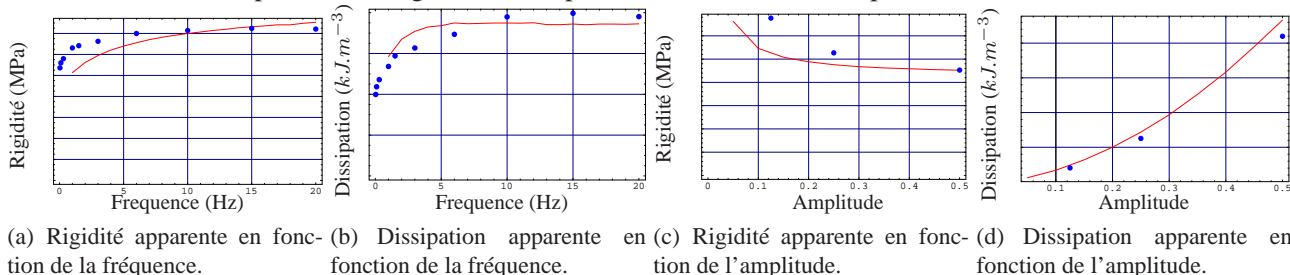


FIG. 9 – Confrontation modèle–expérience (cisaillement).

## 6 Conclusion

Une étude expérimentale originale a été menée dans le but de caractériser les phénomènes mécaniques inhérents au matériau considéré. Les essais ont été menés à différentes températures, afin de bien en appréhender l'influence sur le comportement du matériau.

Par la suite, un modèle théorique en grande déformation, basé sur la notion d'état intermédiaire, a été proposé. Il repose sur une généralisation statistique de modèles rhéologiques. Il sera apte, pour un même jeu de paramètres de rendre compte des effets Gent-Fletcher et Payne –phénomènes très peu simultanément modélisés. L'implantation éléments finis est encourageante et semble ouvrir la voie à des modélisations de pièces industrielles complexes.

Enfin, il pourrait être intéressant de prendre en compte l'autoéchauffement du matériau dans le cadre d'une modélisation thermo-mécanique par exemple. Un pas a été fait dans ce sens, par la détermination de l'évolution des paramètres matériaux en fonction de la température.

## Références

- [1] Miehe C. and Keck J. Surimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. experiments, modelling and algorithmic implementation. *Journal of Mechanics and Physics Solids*, 48, 323–365, 2002.
- [2] Boukamel A., Martinez J., and Méo S. A statistical approach for a hyper-visco-elasto-plastic model for a filled elastomer. In *Constitutive Models for Rubber IV*, pages 191–196. Proceedings of the 4th European Conference for Constitutive Models for Rubber, 2005.
- [3] Boukamel A. and Méo S., S. ans Lejeunes. Fe-implémentation of a statistical hyper-visco-plastic model. In *Constitutive Models for Rubber V*. Proceedings of the 5th European Conference for Constitutive Models for Rubber, 2007.
- [4] Sidoroff F. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. Méc.*, 13(4), 679–713, 1974.
- [5] Lejeunes S., Méo S., and Boukamel A. Un schéma direct d'intégration numérique de modèles rhéologiques hyper-viscoélastiques par retour exponentiel. In *Actes du Neuvième Colloque National en Calcul des Structures*, 2009.
- [6] Olsson A. and Austrell P. A fitting procedure for a viscoelastic-elastoplastic material. In *Constitutive Models for Rubber II*. Proceedings of the 2nd European Conference for Constitutive Models for Rubber, 2001.
- [7] Nedjar B. Frameworks for finite strain viscoelastic-plasticity based on multiplicative decomposition. part i : Continuum formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 191, 1541–1562, 2002.