

# Identification de faibles non-linéarités dans les systèmes en vibration à partir de données temporelles

J. LARDIES

*Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée, rue de l'Épitaphe, BESANCON  
joseph.lardies@univ-fcomte.fr*

## Résumé :

*On se propose d'identifier les faibles non-linéarités dans les systèmes en vibration à partir de leur réponse temporelle. Deux méthodes sont proposées. La première méthode est basée sur une analyse du modèle espace d'état non linéaire issu du système en vibration. Une identification par sous-espaces est alors proposée. La deuxième méthode est basée sur une analyse par la transformée en ondelettes des données temporelles. Des résultats numériques sont présentés.*

## Abstract :

*Our purpose is the identification of weak nonlinearities in vibrating systems from time data. Two methods are proposed. The first method is based on the non linear state space model of the vibrating system and uses a subspace approach to identify the system matrices. The second method uses the wavelet transform of transient signals. Numerical results are presented..*

**Mots clefs :** identification modale, sous-espaces, transformée en ondelettes, vibrations non linéaires, oscillateur de Duffing

## 1 Introduction

La plupart des structures mécaniques soumises à des vibrations sont habituellement traitées par un modèle linéaire. Cependant, lorsque les structures subissent de grands déplacements, les effets de non-linéarités deviennent importants et le modèle linéaire n'est plus correct. Il faut noter aussi que, même lorsque l'amplitude du déplacement d'une structure reste faible, des distorsions importantes peuvent apparaître lorsqu'on considère, par exemple, un frottement sec. Pour ces raisons, l'identification des non-linéarités est un sujet de recherche toujours d'actualité. Dans le domaine temporel, cette identification fait souvent appel à des techniques de traitement du signal comme la transformée de Hilbert, qui est proposée par Feldman [1]. Dans le cas d'un système à plusieurs d.d.l. cette méthode nécessite un filtre passe-bande pour séparer chaque composante du signal, ce qui perturbe fortement l'identification de chaque mode et ses non-linéarités, surtout si les modes sont proches. Cette communication a pour but de présenter deux méthodes d'identification et de quantification des faibles non-linéarités dans les systèmes en vibration. La première méthode est basée sur le modèle espace d'état non-linéaire de l'oscillateur. Les matrices d'état : la matrice de transition et la matrice des entrées du système qui contiennent toute l'information modale sont déterminées par les algorithmes sous-espaces [2-5]. C'est grâce à ces matrices que nous pourrions identifier et quantifier les non-linéarités. La deuxième méthode utilise la transformée en ondelettes de la réponse libre du système vibrant [6-8]. On montre que les non-linéarités en raideur sont liées à la phase de la transformée en ondelettes et les non-linéarités en amortissement à l'amplitude de la transformée en ondelettes. Des résultats numériques et expérimentaux sur un oscillateur de Duffing sont présentés, montrant l'efficacité des algorithmes lors de l'identification et quantification de faibles non-linéarités dans les oscillateurs.

## 2 Identification par sous-espaces

### 2.1 Le modèle espace d'état continu

L'équation différentielle du mouvement d'un système à  $n'$  degrés de liberté, ayant des non-linéarités en amortissement et en raideur, se met sous la forme :

$$M_o \ddot{x}(t) + C_o \dot{x}(t) + K_o x(t) + \sum_{j=1}^p \alpha_j L_j g_j(t) = f(t) \quad (1)$$

Avec  $M_o$ ,  $C_o$  et  $K_o$  les matrices ( $n' \times n'$ ) masse, amortissement et raideur;  $x(t)$  le vecteur déplacement des  $n'$  d.d.l.,  $\alpha_j$  terme scalaire paramétrant l'amplitude de la  $j^{\text{ème}}$  non linéarité,  $L_j$  est un vecteur ( $n' \times 1$ ) localisant les non-linéarités dont les composantes sont 1,-1 ou 0 et  $g_j(t)$  est une fonction scalaire indiquant le type de non-linéarité (en amortissement de type sec ou de Coulomb, quadratique, ... , en raideur de type bilinéaire, quadratique, cubique...) et  $f(t)$  le vecteur excitation. Le genre de non-linéarité est donc exprimé par la fonction  $g(t)$  et la valeur de  $p$ , qui n'est pas connue et qui fournit le nombre de non-linéarités, peut croître pour prendre en compte le maximum de non-linéarités. On transforme l'équation différentielle du second ordre en équation différentielle du premier ordre en utilisant une représentation dans un espace de dimension  $n=2n'$ . Pour cela on effectue le changement de variable [2, 4]:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ -g_1(t) \\ \cdot \\ -g_p(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\xi(t)$  est le vecteur d'état continu ( $n \times 1$ ) et  $u(t)$  le vecteur des entrées ( $(n'+p) \times 1$ ). Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n' \times n'} & I_{n' \times n'} \\ -M_o^{-1} K_o & -M_o^{-1} C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n' \times n'} & 0_{n' \times 1} & \cdot & 0_{n' \times 1} \\ M_o^{-1} & M_o^{-1} \alpha_1 L_1 & \cdot & M_o^{-1} \alpha_p L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ -g_1(t) \\ \cdot \\ -g_p(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

et donc  $\dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c u(t)$  avec  $A_c$  la matrice de transition continue et  $B_c$  la matrice des entrées continue. Ces deux matrices s'expriment en fonction des paramètres physiques du système.

Le vecteur des mesures temporelles (ou des sorties), appelé vecteur observation et provenant des capteurs placés sur la structure, se met sous la forme [2] :  $y(t) = C \xi(t)$  avec  $C$  matrice de positionnement des capteurs de déplacement, formée de 0 et de 1. Cette matrice est aussi appelée matrice des observations ou matrice des sorties du vecteur espace d'état.

La méthode d'identification et de quantification des non-linéarités est basée sur la détermination de la matrice transfert de l'oscillateur non linéaire. Cette matrice de transfert est :

$$H(\omega) = C(j\omega I - A_c)^{-1} B_c \quad (4)$$

Lorsqu'on développe on obtient

$$H(\omega) = (K_o + j\omega C_o - \omega^2 M_o)^{-1} (I \quad \alpha_1 L_1 \quad \alpha_2 L_2 \quad \dots \quad \alpha_p L_p) \quad (5)$$

Dans le cas particulier où  $\omega = 0$  on a

$$H(0) = -C A_c^{-1} B_c = (K_o^{-1} \quad K_o^{-1} \alpha_1 L_1 \quad K_o^{-1} \alpha_2 L_2 \quad \dots \quad K_o^{-1} \alpha_p L_p) \quad (6)$$

C'est cette expression qui sera utilisée pour identifier et quantifier les faibles non-linéarités en amortissement et raideur. Mais pour pouvoir obtenir cette égalité nous devons déterminer en un premier temps les matrices d'état du système :  $A_c$ ,  $B_c$  et la matrice d'observation  $C$  en utilisant la méthode des sous-espaces.

## 2.2 Le modèle espace d'état discret

Le modèle espace d'état continu précédent est discrétisé avec une période d'échantillonnage  $\Delta t$  et devient, en tenant compte du bruit de process  $w_k$  et du bruit de mesure  $v_k$  [3]:

$$\xi_{k+1} = A \xi_k + B u_k + w_k \quad (7)$$

$$y_k = C \xi_k + v_k \quad (8)$$

$\xi_k$  est le vecteur d'état discret ( $n \times 1$ ) qui est dans la pratique inconnu ;  $A = \exp(A_c \Delta t)$  est matrice de transition discrète ( $n \times n$ ) et  $B$  la matrice des entrées discrète  $n \times (n' + p)$  indiquant l'influence des entrées sur l'état du système,  $u_k$  est le vecteur des entrées discrétisé à l'instant  $k$  et  $y_k$  le vecteur des mesures (ou des sorties) ou encore le vecteur observation discrétisé à l'instant  $k$ . La matrice des entrées discrète se met sous la forme :

$$B = (\exp(A_c \Delta t) - I) A_c^{-1} B_c \quad (9)$$

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du modèle discret qui nous permettent de déterminer les matrices  $A_c$  et  $B_c$  du modèle continu sont obtenues en utilisant la méthode des sous-espaces [3, 4]. Pour cela on forme les matrices de Hankel des entrées et des sorties  $U$  et  $Y$  ainsi que la matrice de Hankel  $G$  contenant une partie des entrées et des sorties. On détermine la projection oblique  $P_i$  de  $Y$  sur  $G$  à l'instant  $i$ . On effectue la décomposition en valeurs singulières de cette projection orthogonale qui peut être pondérée avec deux matrices  $W_1$  et  $W_2$ . Les matrices de pondération dépendent de l'algorithme sous-espaces choisi : N4SID, MOESP, CVA [3]. En ne retenant que les  $n$  valeurs singulières les plus importantes et les vecteurs singuliers associés on a :

$$W_1 P_i W_2 = U_1 S_1 V_1^T \quad (10)$$

La matrice d'observabilité définie par

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

peut alors être estimée par  $\Psi_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$ , à partir de laquelle nous pouvons identifier les matrices  $A$  et  $C$ . Une autre technique pour identifier  $A$ ,  $B$  et  $C$  consiste à déterminer la matrice des états  $\Phi_i$  à l'instant  $i$  et  $\Phi_{i+1}$  à l'instant  $i+1$ . On montre, en notant  $\Psi_{i-1}$  la matrice d'observabilité à laquelle on a enlevé un bloc lignes, que la matrice des états se met sous la forme :

$$\Phi_i = \Psi_i^+ P_i \quad ; \quad \Phi_{i+1} = \Psi_{i-1}^+ P_{i+1} \quad (12)$$

$\Psi_i^+$  et  $\Psi_{i-1}^+$  sont les pseudo-inverses de  $\Psi_i$  et de  $\Psi_{i-1}$ . Par conséquent, les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont déterminées par résolution aux moindres carrés du système :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_i \\ U_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \quad (13)$$

$\rho_w$  et  $\rho_v$  représentant les résidus. Ayant identifié les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ , par sous-espaces on forme les matrices  $A_c$ ,  $B_c$  et  $C$  et on identifie les non-linéarités dans le système en vibration en utilisant l'équation (6).

## 2.3 Cas particulier d'un système non linéaire à un d.d.l.

Nous allons étudier le cas particulier d'un système non linéaire à un d.d.l. en réponse libre. Pour cela on considère l'équation (1) qui normalisée à la masse se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \sum_{i=0}^p \mu_i |\dot{x}|^i \text{sign}(\dot{x}) + \eta_q x^q = 0 \quad (14)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation naturelle du système linéaire,  $\mu_i$  le  $i^{\text{ème}}$  coefficient d'amortissement et  $\eta_q$  le coefficient de raideur à l'ordre  $q$ . Conformément à Bogoliubov [9] nous cherchons une solution de la forme :

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_n t + \beta(t)) = A(t) \cos(\varphi(t)) \quad (15)$$

avec  $A(t)$  et  $\varphi(t)$  les modulations en amplitude et phase de la réponse libre. On montre [9-11] que la dérivée de l'amplitude est fonction des coefficients d'amortissement et non des coefficients de raideur et que la dérivée de la phase est fonction des coefficients de raideur et non des coefficients d'amortissement. On obtient :

$$\dot{A}(t) = - \sum_{i=0}^p \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2 + 1)}{\Gamma(i/2 + 3/2)} A^i(t) \quad (16)$$

$$\dot{\beta}(t) = \frac{\eta_q A^{q-1}(t)}{2\omega_n} [1 + (-1)^{q+1}] \left[ \frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1} (\Gamma(q/2 + 3/2))^2} \right] \quad (17)$$

En utilisant la transformée en ondelettes, la relation (16) nous permettra d'identifier et de quantifier les valeurs des coefficients d'amortissement non linéaires et la relation (17) nous permettra d'identifier et de quantifier la non linéarité en raideur. C'est grâce à cette dernière relation que l'on pourra obtenir la relation fréquence instantanée-amplitude, pour un oscillateur non linéaire en raideur.

## 3 Identification par la transformée en ondelettes

### 3.1 Théorie et généralités

La Transformée en Ondelettes (T O) continue d'un signal  $x(t)$  est définie par [6] :

$$(W_\Psi x)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (18)$$

où  $x(t)$  est le signal à analyser et  $\Psi(t)$  est l'ondelette mère analysante. Le paramètre  $a$  est le facteur d'échelle, ou paramètre de dilatation, définissant la largeur de la fenêtre d'analyse. La variable  $a$  joue le rôle de l'inverse de la fréquence : plus  $a$  est petit moins l'ondelette analysante est étendue temporellement, plus son spectre est étendu et sa fréquence centrale élevée. Le paramètre  $b$  est le paramètre de translation, permettant la localisation de l'ondelette analysante dans le domaine temporel. Les ondelettes sont donc de forme constante mais de taille variable, proportionnelle au paramètre de dilatation  $a$ . Modifier  $a$  et  $b$  permet d'avoir des ondelettes à la fréquence voulue et à l'instant souhaité. La T O décrit le contenu de  $x(t)$  localement au voisinage de  $(a, b)$  dans le plan temps-échelle et en définitive, les ondelettes sont des signaux utilisés pour analyser d'autres signaux : on choisit un signal bien connu, l'ondelette analysante, et on va chercher la similitude qui existe entre le signal à étudier et notre ondelette.

La linéarité de la TO implique que la TO de  $P$  signaux est :

$$(W_\Psi \sum_{i=1}^P x_i)(a, b) = \sum_{i=1}^P (W_\Psi x_i)(a, b) \quad (19)$$

Cette propriété est pratique pour l'analyse de signaux multi-composantes car grâce à elle on pourra isoler chaque mode et identifier les non-linéarités relatives au mode isolé.

L'ondelette mère choisi dans cette étude est l'ondelette de Morlet modifiée qui est définie par :

$$\Psi(t) = e^{j \omega_0 t} e^{-t^2/2N} \quad (20)$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de l'ondelette et  $N$  le paramètre qui commande la forme de l'ondelette, ce paramètre fournit un compromis entre une bonne résolution temporelle et fréquentielle. La valeur optimale de  $N$  est obtenue par minimisation de l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes [11]. La version dilatée dans le domaine fréquentiel de l'ondelette de Morlet modifiée est :

$$\hat{\Psi}(a\omega) = \sqrt{N\pi} e^{-\frac{N}{4}(a\omega - \omega_0)^2} \quad (21)$$

L'ondelette de Morlet dilatée est un filtre passe-bande de pulsation centrale  $\omega_c = \omega_0/a$  dont la largeur est proportionnelle à  $1/a$  ou à  $\omega_c$ .

### 3.2 Amplitude et phase de la transformée en ondelettes

Soit  $x(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$  signal modulé en amplitude et en fréquence. La TO de  $x(t)$  est [6-8]

$$(W_\Psi x)(a,b) = (\sqrt{a}/2) A(b) \hat{\Psi}^*(a\dot{\varphi}(b)) e^{j\varphi(b)} \quad (22)$$

En utilisant l'ondelette de Morlet modifiée, le module de la TO est maximal le long d'une courbe définie par  $a=a(b)=\omega_0/\dot{\varphi}(b)$ , appelée arête de la transformée en ondelettes, avec  $\dot{\varphi}(b)=\omega_n + \dot{\beta}(b)$  pulsation instantanée. Les valeurs prises par les coefficients de la TO le long de l'arête constituent le squelette de la TO et on a en utilisant l'ondelette de Morlet modifiée:

$$(W_\Psi x)(a(b),b) = (\sqrt{N\pi a(b)}/2) A(b) e^{j\varphi(b)} \quad (23)$$

$$d'où \quad A(b) = 2 \left| (W_\Psi x)(a(b),b) \right| / \sqrt{N\pi a(b)} \quad \text{et} \quad \varphi(b) = \text{Arg}[(W_\Psi x)(a(b),b)] \quad (24)$$

A partir de ces deux relations nous obtenons  $\dot{A}(b)$  et  $\dot{\beta}(b) = \dot{\varphi}(b) - \omega_n$  qui sont utilisés dans les équations (16) et (17) pour identifier et quantifier les non linéarités en amortissement et raideur. Pour un système à plusieurs ddl la linéarité de la TO nous permet de séparer chaque mode et d'effectuer la même procédure d'identification.

## 4 Application

On considère un oscillateur à amortissement visqueux et à raideur cubique (Duffing) dont l'équation différentielle est :  $m_0 \ddot{x}(t) + c_0 \dot{x}(t) + k_0 x(t) + k_3 x^3(t) = f(t)$  avec  $m_0 = 1$  kg,  $c_0 = 0,7$  Ns/m,  $k_0 = 400$  N/m et  $k_3 = 500$  N/m<sup>3</sup>. En considérant la méthode des sous espaces, l'amplitude, le type et la position de la non-linéarité sont respectivement :  $\alpha_1 = k_3$ ,  $g_1(t) = x^3(t)$  et  $L_1 = 1$  et on obtient la fonction de transfert pour  $\omega = 0$   $H(0) = -C A_c^{-1} B_c = [1/k_0 \quad k_3/k_0]$ . Le système est excité par une force aléatoire gaussienne centrée. La réponse  $x(t)$  est obtenue numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta, sur 2048 points de mesure. C'est cette réponse qui sera analysée par l'algorithme sous espaces pour déterminer d'abord A, B et C suivant (13) et par la suite  $A_c$  et  $B_c$ . Les valeurs identifiées au cours d'un essai sont  $c_0 = 0,66$  Ns/m,  $k_0 = 401$  N/m et  $k_3 = 505$  N/m<sup>3</sup>. En fait, comme on génère des nombres aléatoires, ces valeurs varient d'une simulation à une autre, mais ne dépassent jamais 10% des valeurs exactes.

La TO en ondelettes s'applique à la réponse libre du système. La figure 1 (a) nous montre la réponse libre temporelle de l'oscillateur. On applique la TO à cette réponse et nous obtenons l'amplitude de la TO (figure 1(b)) grâce à laquelle on extrait l'arête et le squelette de la TO. Ils nous permettent d'obtenir la pulsation instantanée  $\omega(t)$  et l'amplitude  $A(t)$  du signal. Nous pouvons alors former  $\dot{A}(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  qui seront utilisés dans les équations (16) et (17) pour déterminer le coefficient d'amortissement et le coefficient de raideur non-linéaire. La figure 1 (c) montre les variations de l'amplitude en fonction de la fréquence instantanée :  $A = h(\dot{\varphi}/2\pi)$ , la pulsation  $\omega_n$  est obtenue à partir de cette figure en considérant  $A(t) = 0$ . Ainsi on obtient  $f_n =$

3,184 Hz. Pour déterminer le coefficient d'amortissement on trace  $\dot{A}$  en fonction de  $A$ . On obtient une droite dont la pente nous permet d'obtenir  $\mu_1$ . En effet, d'après l'équation (16) on a  $\dot{A} = -\frac{\mu_1}{2}A$ . La valeur du coefficient de raideur  $\eta_3$  est obtenue par régression linéaire de l'équation (17) qui s'écrit  $\dot{\beta}(t) = \frac{3\eta_3}{8\omega_n}A(t)^2$ .

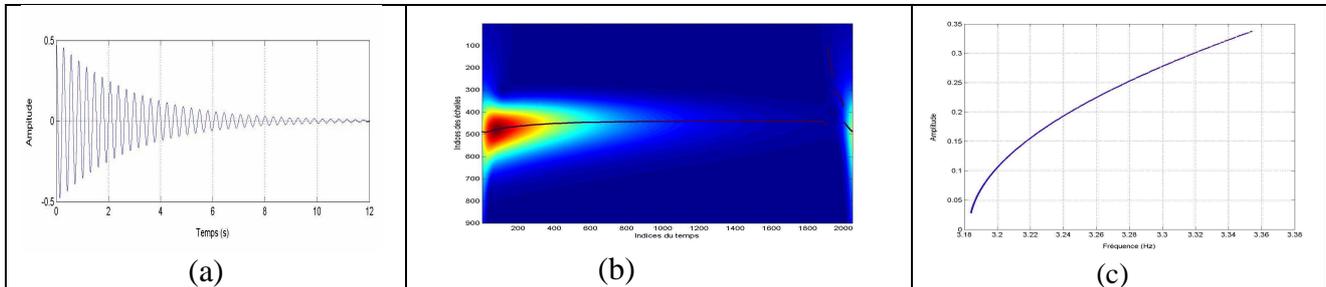


Figure 1. Réponse temporelle, amplitude de la TO et variations de l'amplitude en fonction de la fréquence

Les résultats de l'identification, ainsi que les erreurs relatives sur les paramètres, sont donnés dans le tableau 1. On étudie le système non bruité et bruité avec un bruit gaussien dont le rapport signal sur bruit (S/B) de 15 dB. Les résultats de l'identification sont convenables et meilleurs que ceux obtenus par la méthode des sous espaces.

Paramètres à identifier	$\mu_1$ (s <sup>-1</sup> )	$\Delta\mu_1$ (%)	$\omega_n$ (rad.s <sup>-1</sup> )	$\Delta\omega_n$ (%)	$\eta_3$ (m.s) <sup>-2</sup>	$\Delta\eta_3$ (%)
Exactes	0,7		20		500	
Identifiés, S/B= $\infty$	0,702	0,3	20,005	0,03	502,044	0,41
Identifiés, S/B=15	0,690	-1,4	20,018	0,10	495,175	-0,97

Tableau 1. Paramètres d'identification pour l'oscillateur à amortissement visqueux et à raideur cubique

## 5 Conclusion

Deux algorithmes ont été utilisés pour identifier et quantifier les non-linéarités. Ils ont été appliqués sur un simple oscillateur à 1 ddl et les résultats obtenus sont satisfaisants. Ils vont être appliqués sur des systèmes à plusieurs ddl et sur des cas tests en laboratoire. Les résultats seront fournis lors de la conférence.

## Références

- [1] Feldman M., Non-linear free vibration identification via the Hilbert transform, Journal of Sound and Vibration, 208, 475-489, 1997
- [2] Juang J. N., Applied system identification, Prentice Hall, N.J., 1994
- [3] Van Overschee P., De Moor B., Subspace identification for linear systems, Kluwer Academic Publishers, 1996
- [4] Lardiès J., Synthèse des techniques d'analyse modale dans le domaine temporel, XVIIIème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007
- [5] Marchesiello S., Garibaldi L., Identification of clearance-type nonlinearities, Mechanical Systems and Signal Processing, 22, 1133-1145, 2008
- [6] Torrèsani B., Analyse continue par ondelettes. Éditions du CNRS, EDP sciences, 1995.
- [7] Le T.P., Argoul P., Utilisation de la transformée en ondelettes pour l'identification des systèmes mécaniques non linéaires en vibration, XVIème Congrès Français de Mécanique, Nice, 2003
- [8] Ta, M.N., Lardiès J., Foltête E., Différentes approches pour estimer les faibles non linéarités dans les systèmes en vibration, XVIIème Congrès Français de Mécanique, Troyes, 2005
- [9] Bogolioubov N. and I. Mitropolski, Les méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non linéaires. Gauthier-Villars Edition, 1962
- [10] Nayfeh A.H., Perturbation Methods. John Wiley and Sons, 1973
- [11] Lardiès J, Ta M.N., A wavelet based approach for the identification of damping in non-linear oscillators, International Journal of Mechanical Sciences, 47, 1262-1281, 2005