

Analyse modale temporelle par sous-espaces

J. LARDIES

Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée, rue de l'Épitaphe, BESANCON
joseph.lardies@univ-fcomte.fr

Résumé :

On se propose d'identifier les paramètres modaux d'une structure à partir des données temporelles provenant des capteurs placés sur la structure, sans utilisation de l'excitation. Quatre algorithmes basés sur l'identification par sous-espaces sont étudiés. Deux algorithmes utilisent la matrice bloc de Hankel décalée. Deux autres algorithmes utilisent la matrice bloc de contrôlabilité et d'observabilité décalées. On montre que, même dans le cas où le système en vibration est bruité, ces algorithmes sont équivalents. Des résultats numériques et expérimentaux sont présentés montrant la robustesse de ces algorithmes en analyse modale.

Abstract :

Our purpose is the identification of modal parameters of a vibrating system from output data only. The identification is based on the knowledge of output only responses, without using excitation information. Four subspace algorithms are proposed: two shifted block Hankel matrix algorithms, the shifted block controllability matrix algorithm and the shifted block observability matrix algorithm. It is shown that these algorithms are equivalent in the exact data case and have minor difference implementation in the noisy data case. Numerical and experimental results show the robustness of these algorithms.

Mots clefs : domaine temporel, paramètres modaux, espace d'état, matrice bloc de Hankel

1 Introduction

L'analyse modale permet d'étudier, de surveiller et de contrôler la stabilité d'une structure dans les domaines du génie mécanique, de l'aéronautique et du génie civil. Cette analyse consiste à déterminer les paramètres modaux de la structure : les fréquences propres, les coefficients d'amortissement et les déformées modales, à partir des mesures réalisées sur la structure. Dans cette communication, on se propose d'identifier les paramètres modaux en utilisant seulement les données temporelles provenant des capteurs placés sur la structure, sans utilisation de l'excitation. Cette excitation peut être aléatoire et inconnue ou déterministe et connue, mais dans tous les cas elle ne sera pas prise en considération lors de l'identification des paramètres modaux. Pour effectuer cette identification nous allons déterminer la matrice de transition du modèle espace d'état discret car elle contient toute l'information modale. Quatre méthodes sont présentées pour déterminer cette matrice de transition. La première méthode consiste à former la matrice bloc de contrôlabilité [1-3] et à effectuer le décalage d'un bloc colonne dans cette matrice (voir les références [1-3] qui définissent la matrice de contrôlabilité). En exploitant les propriétés du décalage de cette matrice nous obtenons la matrice de transition du système. La deuxième méthode consiste à exploiter les propriétés du décalage d'un bloc colonne de la matrice bloc de Hankel. La référence [1] définit la matrice bloc de Hankel. La troisième méthode utilise la matrice bloc d'observabilité [1-3] dans laquelle nous effectuons le décalage d'un bloc ligne dans cette matrice. En considérant les propriétés de ce décalage nous obtenons la matrice de transition. Dans la quatrième méthode nous nous intéressons à la matrice bloc de Hankel décalée d'un bloc ligne afin d'obtenir la matrice de transition. Nous montrons que ces méthodes d'identification conduisent à des algorithmes identiques, même lorsque les données temporelles sont bruitées. Des résultats numériques sur un système à deux degrés de liberté et expérimentaux sur l'étude d'un câble en vibration en laboratoire montrent l'efficacité des algorithmes proposés lors de l'analyse modale.

2 Modélisation du comportement dynamique d'une structure

2.1 Le modèle espace d'état discret

Le comportement dynamique d'une structure linéaire à n' degrés de liberté modélisée par un ensemble de masses, ressorts et amortisseurs est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$M_o \ddot{\zeta}(t) + C_o \dot{\zeta}(t) + K_o \zeta(t) = w(t) \quad (1)$$

Avec M_o , C_o et K_o les matrices ($n' \times n'$) masse, amortissement et raideur; $\zeta(t)$ le vecteur déplacement des n' d.d.l. et $w(t)$ le vecteur excitation qui ne sera pas mesuré. Le vecteur des mesures temporelles, appelé vecteur observation et provenant des capteurs placés sur la structure, se met sous la forme [2] :

$$y(t) = C_a \ddot{\zeta}(t) + C_v \dot{\zeta}(t) + C_d \zeta(t) \quad (2)$$

avec C_a , C_v et C_d les matrices ($m \times n'$) de positionnement des accéléromètres, des capteurs de vitesse et des capteurs de déplacement. Expérimentalement nous n'utiliserons que les accéléromètres. On transforme les équations différentielles du second ordre en équations différentielles du premier ordre en utilisant une représentation dans un espace de dimension $n=2n'$. Pour cela on effectue le changement de variable [2,3]:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} \text{ d'où } \dot{x}(t) = Dx(t) + Jw(t) \quad (3)$$

avec D matrice ($n \times n$) d'état du système. Les matrices D et J s'expriment en fonction des paramètres physiques M_o , C_o et K_o [2,3].

L'équation (2) s'écrit, en posant $C = [C_d - C_a M_o^{-1} K_o \quad C_v - C_a M_o^{-1} C_o]$

$$y(t) = C x(t) \quad (4)$$

Finalement le modèle continu précédent est discrétisé avec une période d'échantillonnage Δt et devient, en tenant compte du bruit de mesure v_k [3-5]:

$$x_{k+1} = A x_k + u_k \quad (5)$$

$$y_k = C x_k + v_k \quad (6)$$

avec x_k vecteur d'état discret ($n \times 1$) qui est dans la pratique inconnu ; $A = \exp(D \Delta t)$ matrice de transition ($n \times n$) ; $u_k = B w_k$ avec $B = \int_0^{\Delta t} \exp(D(\Delta t - \tau)) E d\tau$; y_k vecteur ($m \times 1$) discrétisé des mesures bruitées ou vecteur observation discrétisé.

La matrice de transition A contient toute l'information modale : ses valeurs propres sont reliées directement aux fréquences propres et aux coefficients d'amortissement de la structure analysée ; ses vecteurs propres sont reliés aux déformées modales. En effet, la diagonalisation de la matrice de transition A conduit à $A = \Psi \Lambda \Psi^{-1}$, où Ψ est la matrice ($n \times n$) des vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, la matrice diagonale ($n \times n$) des valeurs propres qui sont complexes conjuguées. Les fréquences propres f_i et les coefficients d'amortissement ξ_i sont obtenus à partir des relations [3, 4]:

$$f_i = \frac{1}{2\pi \Delta t} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}{4} + [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*})]^2} ; \xi_i = \frac{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}{\sqrt{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2 + 4 [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*})]^2}} \quad (7)$$

Les déformées modales sont obtenues à partir de la relation $\Phi = C \Psi$; ces vecteurs décrivent comment chaque fréquence propre contribue à la forme globale de la structure en vibration. Notre but est donc de

déterminer la matrice de transition A qui contient toute l'information modale ; nous déterminerons aussi la matrice d'observation C afin d'évaluer les déformées modales.

2.2 Estimation de la matrice de transition par décalage de la matrice bloc de contrôlabilité et par décalage de bloc colonnes de la matrice bloc de Hankel

On définit le vecteur futur des observations (mpx1) par $y_k^+ = [y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+p-1}]^T$ et le vecteur passé des observations (mpx1) $y_{k-1}^- = [y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-p}]^T$, où le symbole $'$ indique le transposé. La matrice de covariance (mxm) des signaux est définie par $R_i = \mathbf{E}[y_{k+i}y_k'] = CA^iG$ où \mathbf{E} est l'opérateur espérance mathématique et $G = \mathbf{E}[x_{k+1}y_k']$ la matrice de covariance de l'état et du signal. En considérant le vecteur passé des observations y_{k-1}^- et le vecteur futur des observations y_k^+ , on construit la matrice bloc de Hankel de dimension (mpxmp) [1, 3] :

$$H = \mathbf{E}(y_k^+ y_{k-1}^-) = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_p \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{2p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{p-1}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & \dots & CA^{2p-2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] \quad (8)$$

$$H = OK \text{ où } O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \quad (\text{mpxn}) \text{ est la matrice d'observabilité et } K = [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] \quad (\text{nxmp}) \text{ est la}$$

matrice bloc de contrôlabilité. Cette matrice se met sous la forme :

$$K = [K_1 \ A^{p-1}G] = [G \ K_2] \text{ avec } K_1 = [G \ AG \ \dots \ A^{p-2}G] ; K_2 = [AG \ \dots \ A^{p-1}G] \quad (9)$$

K_1 et K_2 étant matrices de dimension nxm(p-1) obtenues en ôtant respectivement le dernier bloc colonne et le premier bloc colonne à la matrice bloc de contrôlabilité K . On obtient alors :

$$K_2 = AK_1 \Rightarrow A = K_2 K_1^+ \quad (10)$$

avec K_1^+ le pseudo inverse de K_1 . La matrice de transition A a été obtenue par décalage de la matrice bloc de contrôlabilité et les valeurs propres de A sont $\lambda(A) = \lambda(K_2 K_1^+)$. Une deuxième méthode pour déterminer la matrice de transition A et ses valeurs propres est proposée. Pour cela soient H_1 et H_2 les matrices mpxm(p-1) obtenues en ôtant un bloc colonne à gauche et un bloc colonne à droite à la matrice bloc de Hankel H :

$$H_1 = \begin{bmatrix} R_2 & R_3 & \dots & R_p \\ R_3 & R_4 & \dots & R_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{p+1} & R_{p+2} & \dots & R_{2p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAG & CA^2G & \dots & CA^{p-1}G \\ CA^2G & CA^3G & \dots & CA^pG \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^pG & CA^{p+1}G & \dots & CA^{2p-2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} A [G \ AG \ \dots \ A^{p-2}G] \quad (11)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_{p-1} \\ R_2 & R_3 & \dots & R_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{2p-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{p-2}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^{p-1}G \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & \dots & CA^{2p-3}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} [G \ AG \ \dots \ A^{p-2}G] = OK_1 \quad (12)$$

On a donc $H_1 = OK_1 = OK_2$ et $H_2 = OK_1$, d'où la matrice de transition $A = O^+ H_1 K_1^+$. Les valeurs propres de la matrice de transition sont :

$$\lambda(A) = \lambda(O^+ H_1 K_1^+) = \lambda(K_1^+ O^+ H_1) = \lambda(H_2^+ H_1) = \lambda(K_1^+ O^+ O K_2) = \lambda(K_1^+ K_2) = \lambda(K_2 K_1^+) \quad (13)$$

D'une part les valeurs propres de la matrice de transition A obtenues par décalage de la matrice bloc de contrôlabilité sont les mêmes que celles obtenues par décalage de bloc colonnes de la matrice bloc de Hankel et d'autre part les valeurs propres de A sont aussi les valeurs propres de la matrice $(H_2^+ H_1)$. Par conséquent, dans la pratique il suffira de former la matrice bloc de Hankel H, d'extraire H_1 , H_2 et son pseudo-inverse et de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $(H_2^+ H_1)$. Dans le cas d'un système bruité on effectue la décomposition en valeurs singulières (DVS) de H et on ne retient que les n valeurs singulières les plus importantes et les vecteurs singuliers associés, de sorte que l'on a :

$$H = U S V^T = O K \quad (14)$$

avec U (mpxn), V (mpxn) matrices des vecteurs singuliers et S (nxn) matrice diagonale des valeurs singulières. Par identification nous considérons $K = V^T$ et nous effectuons la partition suivante :

$$K = V^T = [V^T_{11} \ V^T_{12}] = [V^T_{11} \ V^T_{12}] \quad (15)$$

où V^T_{11} et V^T_{12} sont les matrices formées respectivement des (p-1) premiers et derniers blocs colonnes de la matrice V^T . Nous obtenons alors :

$$\lambda(A) = \lambda(K_2 K_1^+) = \lambda[V^T_{12} (V^T_{11})^+] \quad (16)$$

relation que nous retrouvons en considérant les décalages de la matrice bloc de Hankel. En effet :

$$H_1 = U S V^T_{12} \text{ et } H_2 = U S V^T_{11} \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(H_2^+ H_1) = \lambda[(U S V^T_{11})^+ (U S V^T_{12})] = \lambda[V^T_{12} (V^T_{11})^+] \quad (17)$$

Nous allons montrer dans la prochaine section que la matrice de transition peut être aussi déterminée à partir du décalage de la matrice bloc d'observabilité et par décalage de bloc lignes de la matrice bloc de Hankel.

2.3 Estimation de la matrice de transition par décalage de la matrice bloc d'observabilité et par décalage de bloc lignes de la matrice bloc de Hankel

La matrice d'observabilité O (mpxn) se met sous la forme :

$$O = \begin{bmatrix} O_1 \\ C A^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ O_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

avec O_1 et O_2 matrices de dimension $m(p-1) \times n$ obtenues en ôtant respectivement le dernier bloc ligne et le premier bloc ligne à la matrice bloc de contrôlabilité O :

$$O_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix}; \quad O_2 = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix} \quad \text{d'où } O_2 = O_1 A \Rightarrow A = O_1^+ O_2 \quad (19)$$

On peut aussi estimer A en ôtant des lignes à la matrice bloc de Hankel. Pour cela, soient H_3 et H_4 les matrices $m(p-1) \times n$ obtenues en ôtant le premier bloc ligne et le dernier bloc ligne de la matrice H :

$$H_3 = \begin{bmatrix} R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ R_3 & R_4 & \dots & R_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p & R_{p+1} & \dots & R_{2p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ CA^2G & CA^3G & \dots & CA^{p+1}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{p-1}G & CA^pG & \dots & CA^{2p-2}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix} A [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] \quad (20)$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_p \\ R_2 & R_3 & \dots & R_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{p-1} & R_p & \dots & R_{2p-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CG & CAG & \dots & CA^{p-1}G \\ CAG & CA^2G & \dots & CA^pG \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{p-2}G & CA^{p-1}G & \dots & CA^{2p-3}G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{p-2} \end{bmatrix} [G \ AG \ \dots \ A^{p-1}G] = O_1 K \quad (21)$$

On a donc $H_3 = O_1 AK = O_2K$ et $H_4 = O_1K$, d'où la matrice de transition $A = O_1^+ H_3 K^+$. Les valeurs propres de la matrice de transition sont :

$$\lambda(A) = \lambda(O_1^+ H_3 K^+) = \lambda(K^+ O_1^+ H_3) = \lambda(H_4^+ H_3) = \lambda(K^+ O_1^+ O_2 K) = \lambda(O_1^+ O_2) \quad (22)$$

D'une part les valeurs propres de la matrice de transition A obtenues par décalage de la matrice bloc d'observabilité sont les mêmes que celles obtenues par décalage de bloc lignes de la matrice bloc de Hankel et d'autre part les valeurs propres de A sont aussi les valeurs propres de la matrice $(H_4^+ H_3)$. Il suffira donc de former la matrice bloc de Hankel H , d'extraire H_3 , H_4 et son pseudo-inverse et de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $(H_4^+ H_3)$. Dans le cas d'un système bruité nous effectuons la DVS de H et nous ne retenons que les n valeurs singulières les plus importantes et les vecteurs singuliers associés. Nous avons donc l'équation (14) dans laquelle nous choisissons $O=U$ matrice $(m \times n)$. Nous effectuons la partition suivante:

$$O = U = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{12} \end{bmatrix} \quad (23)$$

où U_{11} et U_{12} sont les matrices formées respectivement des $(p-1)$ premiers et derniers blocs lignes de la matrice des valeurs singulières à gauche U . Nous obtenons alors :

$$\lambda(A) = \lambda(O_1^+ O_2) = \lambda[U_{11}^+ U_{12}] \quad (24)$$

Nous retrouvons cette relation en considérant les décalages de la matrice bloc de Hankel. En effet :

$$H_3 = O_2 K = U_{12} K \text{ et } H_4 = O_1 K = U_{11} K \Rightarrow \lambda(A) = \lambda(H_4^+ H_3) = \lambda[K^+ U_{11}^+ U_{12} K] = \lambda[U_{11}^+ U_{12}] \quad (25)$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transition peuvent être déterminées par les décalages de la matrice de contrôlabilité suivant (16) ou (17) et par décalages de la matrice d'observabilité suivant (24) ou (25). Notons que la matrice d'observation C est le premier bloc ligne de la matrice O_1 ou U_{11} . Une fois la matrice de transition A déterminée nous pouvons extraire les paramètres modaux à partir des valeurs et des vecteurs propres de A . On établit par la suite le diagramme de stabilité en fréquence en en amortissement en augmentant progressivement l'ordre du processus. Des résultats numériques et expérimentaux sont présentés dans la prochaine section.

3 Applications

Nous allons tester les deux méthodes présentées sur un exemple numérique d'un système à deux degrés de liberté dont les fréquences propres sont 25 Hz et 30 Hz et les coefficients d'amortissement 2% et 6%. Comme le montre la figure 1 les deux méthodes donnent des résultats identiques et très convenables.

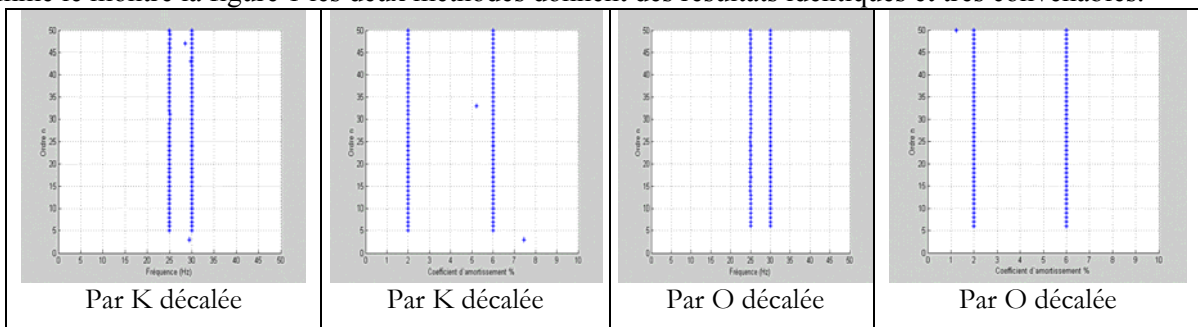


FIG. 1 – Diagramme de stabilité en fréquence et en amortissement pour un système à 2 ddl

Le deuxième exemple qui est expérimental, et qui utilise la matrice d'observabilité décalée, consiste à déterminer les paramètres modaux d'un câble tendu. La figure 2 nous montre le principe expérimental. Le câble est excité par une impulsion provenant d'un marteau et quatre accéléromètres sont utilisés lors de l'analyse modale temporelle. La figure 3 nous montre le diagramme de stabilité en fréquence du câble ainsi que ses quatre premières déformées modales. Le tableau 1 résume les résultats obtenus.

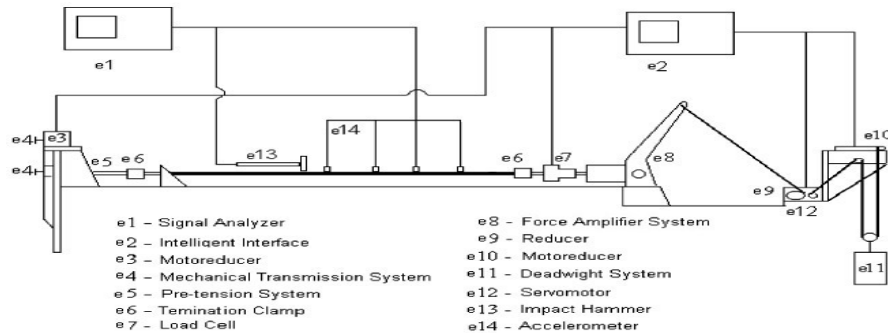


FIG. 2 – Schéma du dispositif expérimental

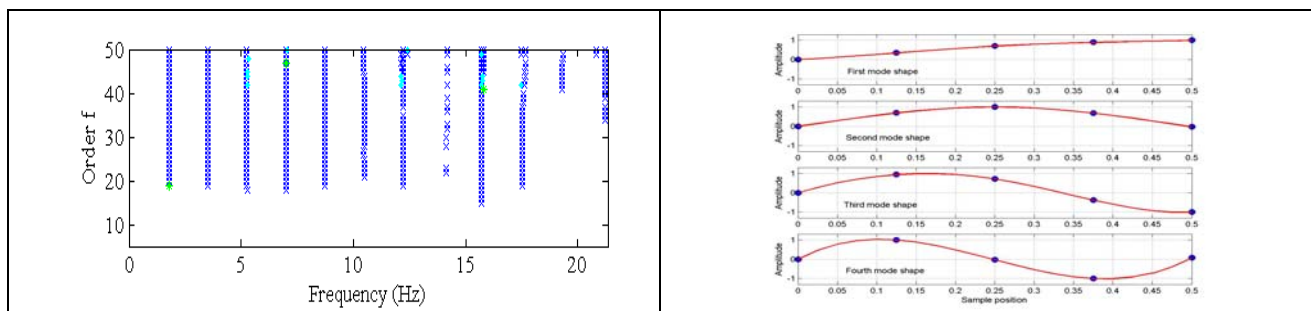


FIG. 3 – Diagramme de stabilité et déformées modales du câble en utilisant O écalée

Modes	1	2	3	4	5
f (Hz) théorique	1,765	3,530	5,295	7,060	8,825
f (Hz) expérimentale	1,773	3,517	5,256	7,016	8,732
ξ (%) coef. Amortissement	0,507	0,251	0,261	0,163	0,174

Tableau 1. Résultats des paramètres modaux du câble tendu en utilisant O décalée

4 Conclusion

Deux algorithmes basés sur le décalage de la matrice de contrôlabilité et d'observabilité nous ont permis d'estimer la matrice de transition et d'obtenir les paramètres modaux d'un système en vibration. Ces algorithmes n'utilisent que les données temporelles provenant de capteurs placés sur la structure, sans connaissance de l'excitation et donnent des résultats identiques.

Références

- [1] Aoki, M., State space modelling of time series, Springer-Verlag, 1990
- [2] Juang J. N., Applied system identification, Prentice Hall, N.J., 1994
- [3] Lardiès J., Estimation of parameters and model order in state space innovation forms, Inverse Problems in Engineering, 8, 75-92, 2000.
- [4] Lardiès J., Utilisation de matrices de pondération lors de l'analyse modale temporelle, XVIIème Congrès Français de Mécanique, Troyes, 2005
- [5] Lardiès J., Synthèse des techniques d'analyse modale dans le domaine temporel, XVIIIème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007