

# Etude analytique et numérique du transfert de chaleur et de masse dans un écoulement de type TCP.

M. MODERRES<sup>(a)</sup>, M. IHDENE<sup>(a)</sup>, A. GHEZAL<sup>(a)</sup>, J. C. LORAUD<sup>(b)</sup>

a. Institut de Physique, USTHB, B.P.32, El-Alia, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

b. Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels, Université de Provence- CNRS, U.M.R. 6595, Marseille, France.

E-mail [mouradw002@yahoo.fr](mailto:mouradw002@yahoo.fr)

## Résumé :

*Ce travail s'intéresse à l'étude analytique et numérique de l'influence du nombre de Reynolds sur le transfert de chaleur et de matière dans un écoulement de fluide entre deux cylindres coaxiaux avec un débit axial imposé, le cylindre intérieur est mis en rotation, sa paroi est maintenue à une température fixe. Le problème est résolu numériquement par la méthode de différences finies. On étudie le cas de faibles valeurs de Schmidt correspondant aux cas des gaz. Le nombre de Reynolds varie entre 100 et 600. Les résultats montrent que les tourbillons commencent à se déplacer vers l'aval de l'espace annulaire jusqu'à une disparition définitive. Les lignes isothermes indiquent que le fluide ne commence à se chauffer qu'à partir de l'instant  $t=5$ . Les lignes d'iso concentrations, pour un nombre de Reynolds  $Re=100$ , se localisent près de l'entrée au voisinage de la paroi non activée. En augmentant la vitesse du débit axial, on constate que la région caractérisée par la présence des tourbillons possède une concentration presque nulle et la région à l'amont possède une concentration variable. On note que la présence des tourbillons est à l'origine de la répartition du champ thermique et solutal d'une manière non uniforme dans l'écoulement.*

## Abstract:

*We present an analytical and numerical study on the influence of Reynolds number on heat and mass transfer in an annular space between two coaxial cylinders with an imposed axial flow. The rotating inner cylinder has a constant wall temperature, greater than the fluid temperature. The resolution is based on the finite difference scheme. A small ( $Sc=0.7$ ) value of Schmidt number are considered; number corresponding to gas. The Reynolds number varying from 100 to 600. The results show that the vortex starts to remove verse downstream of the annular space. The variation of concentration is localised in the vicinity of the wall of the non activated cylinder. We note that the presence of the vortex is responsible of the non uniform repartition of the thermal and solutal fields.*

**Mots clefs :** Transfert de chaleur et de masse, espace annulaire, différences finies.

## 1 Introduction

Les études sur les phénomènes où les mouvement de fluide sont générés par des gradients de densité qui sont dus à la fois au champs de température et de concentration, correspondent au cas de la convection thermosolutale qui appartient à une famille plus large connue sous le nom de la convection double diffusive. L'intérêt considérable qui a été porté, ces dernières années, à la convection thermosolutale est dû principalement à sa présence dans plusieurs applications industrielles telles que: le refroidissement des rotors des moteurs électriques, séparation gaz-solide, gaz-liquide, liquide-liquide, récupération de la totalité de l'huile dans les solutions aqueuses en industrie pétrolière, le stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine

Les procédés de transport dans les écoulements double-diffusifs sont basés sur l'orientation de la température extérieure imposée et le gradient solutal. **Ostrach [1]** a précisé que les divers modes de convection peuvent se baser sur l'orientation des gradients de température et de concentration. La plupart des études examinées dans la littérature ont porté principalement sur la convection naturelle double-diffusive en cavité

rectangulaire. **Allebon et al [2]** et **Wang et Wei [3]** ont cité certains des études principales à cet égard. Les recherches liées à la convection double diffusive dans un espace annulaire sont relativement moins nombreuses. Une étude numérique de **Ship et al [4]** sur la convection naturelle double diffusive en régime laminaire dans un espace annulaire vertical confiné a été faite pour des valeurs de température et de concentration constantes à travers les parois verticales, leurs résultats montrent que le rapport des forces de volume est le paramètre principal qui définit la structure de l'écoulement. Plus tard, **Lee et al [5]**, ont étudié parmi d'autre, l'effet de la rotation dans la convection double diffusive pour un fluide stratifié dans un espace annulaire, l'effet de la rotation sur le développement et le fusionnement de la structure d'écoulement multicellulaires. **Sung et al [6]** ont étudié une configuration d'un espace annulaire horizontale rotatif où la température est imposé horizontalement tandis que le gradient solutal est appliqué dans la direction vertical. Le présent travail est consacré à une modélisation numérique du transfert de chaleur et de masse lors de l'écoulement axial laminaire d'un fluide Newtonien incompressible dans un espace annulaire cylindrique

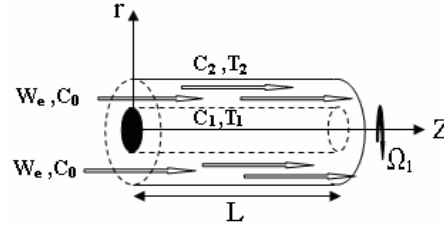


FIG.1 : Représentation de la géométrie étudiée

## 2 Equations mathématiques

Les équations de conservation adimensionnelles sont obtenues en utilisant les variables adimensionnelles définies comme suit:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{w_e}; & v^* &= \frac{v}{w_e}; & w^* &= \frac{w}{w_e}; & C^* &= \frac{C-C_0}{C_2-C_0}; & \Theta^* &= \frac{T-T_0}{T_0}; \\ r^* &= \frac{r}{R_2}; & z^* &= \frac{z}{R_2}; & t^* &= \frac{t w_e}{R_2}; & \Pi^* &= \frac{\Pi}{\rho w_e^2} \end{aligned}$$

En se basant sur ces variables adimensionnelles, les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, de concentration et de l'énergie s'écrivent alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1-\eta}{\text{Re}_a} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{1}{(1-\eta)R^2 e_a} (Gr_T \Theta + Gr_C C) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v u}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1-\eta}{R e_a} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1-\eta}{R e_a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial r} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{1-\eta}{S c R e_a} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1-\eta}{P r R e_a} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.5)$$

Avec :  $d = R_2 - R_1$  la largeur de l'espace annulaire,  $\eta = \frac{R_1}{R_2}$  : le rapport des rayons. Les grandeurs de références sont  $R_2$ , rayon du cylindre extérieur pour les longueurs,  $w_e$  vitesse d'injection du fluide pour les vitesses,  $C_0$  concentration de référence,  $\Theta_0$  température initiale du fluide. Le problème de la convection thermosolutale dans un espace annulaire dépend donc de cinq paramètres en tenant compte de l'approximation de Boussinesq :

$$Gr_T = \frac{g \beta_T d^3 (T_1 - T_0)}{v^2} \quad \text{et} \quad Gr_C = \frac{g \beta_C d^3 (C_2 - C_0)}{v^2}, \quad \text{qui sont respectivement les nombres de Grachof thermique et}$$

solutal avec  $Re_a = \frac{w_e d}{\nu}$  nombre de Reynolds,  $Sc = \frac{\nu}{D}$ , le nombre Schmidt et  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  le nombre de Prandtl.

### 3 Conditions initiales et aux limites

#### 3.1 Conditions initiales :

$$t = 0 \quad \begin{cases} u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = \Pi(r, z, 0) = T(r, z, 0) = 0 \\ C(r, z, 0) = C_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

#### 3.2 Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} r=\eta \quad z \geq 0 \quad & u(\eta, z, t)=0 \\ & w(\eta, z, t)=0 \\ & v(\eta, z, t)=v_p \end{aligned} \quad (3.2.a)$$

#### 3.2.1 Dynamiques

$$\begin{aligned} r=1 \quad z \geq 0 \quad & u(1, z, t)=0 \\ & w(1, z, t)=0 \end{aligned}$$

#### 3.2.2 Thermiques :

$$\begin{aligned} \eta < r < 1 \quad z=0 \quad & u(r, 0, t)=0, w(r, 0, t)=1 \\ r=\eta \quad z > 0 \quad & \Theta = 1/3 \\ r=1 \quad z > 0 \quad & \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.b)$$

#### 3.2.3 Solutales :

$$\begin{aligned} r=\eta \quad z > 0 \quad & C=0 \\ r=1 \quad z > 0 \quad & C=1 \\ \eta < r < 1 \quad z=0 \quad & C=1 \end{aligned} \quad (3.2.c)$$

#### 3.3 Condition à la sortie :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (3.2.d)$$

### 4 Résolution numérique

Le schéma aux différences finies retenu pour la résolution est très proche de celui utilisé par **R. Peyret [7]**, **A. Ghezal et al [8]**, **Z. Ouchiha [9]**, **B. Dadda [10]**, **N. Ait Moussa [11]**, **R. Hadj- Ali [12]**, **M. Ihdene [13]**. Il s'agit d'un schéma semi implicite de type Crank-Nicholson. Le domaine de calcul est divisé en mailles rectangulaires ( $\Delta r = 1/48, \Delta z = 1/16$ ). La discrétisation spatiale utilisant la maille Marker And Cell (MAC) est indiquée sur la Fig.2.

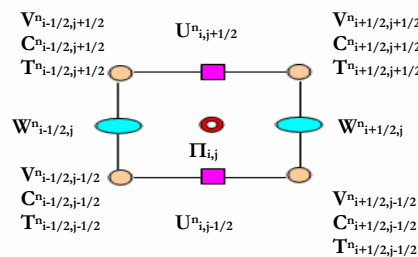


FIG. 2. Cellule de M.A.C

### 5 Solution analytique

Afin de résoudre le système d'équations (2.1) à (2.5) on a choisi l'approximation de l'écoulement parallèle qu'a été utilisée dans le passé par **Cormack et al. (1974). [14]**, et par **Bejan et Tien (1978). [15]** pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée par les cotés. Des publications récentes effectuées par différents auteurs tels que **Bahloul et al (2006) [16]**, sur la convection naturelle au sein d'un cylindres annulaire vertical saturé par un fluide binaire, ainsi que celle faite par **Mahidjiba et al. (2006) [17]**, sur l'écoulement d'une couche fluide induite par l'action combinée d'une force de cisaillement et de l'effet soret, utilisant également la méthode de l'approximation de l'écoulement parallèle. Le concept de l'écoulement parallèle consiste à supposer que dans un espace annulaire de grande extension ( $\Gamma \gg 1$ ), l'écoulement est parallèle relativement aux longues parois de l'espace annulaire. Ceci permet de négliger la composante verticale de la vitesse, de telle sorte que :

$$w(z, r) = w(r) \quad (5.1.a)$$

$$u(z,r)=0 \quad (5.1.b)$$

Les profils de la température et de la concentration sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$\Theta(r, z) = C_T \cdot z + \theta_r(r) \quad (5.2.a)$$

$$C(r, z) = C_S \cdot z + C_r(r) \quad (5.2.b)$$

Où  $C_\theta$  et  $C_S$  : sont des constantes qui expriment respectivement les gradients de température et de concentration selon la direction z.

## 4.2 Equations régissantes :

En substituant les équations de l'approximation des vitesses (5.1.a) et (5.1.b), et des profils de température et de concentration (5.2.a) et (5.2.b) dans les équations de base (2.3), (2.4) et (2.5), nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] \quad (5.3.a)$$

$$w C_T = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 \theta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_r}{\partial r} \right] \quad (5.3.b)$$

$$w C_S = \frac{1}{\text{Sc} \cdot \text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 C_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_r}{\partial r} \right] \quad (5.3.c)$$

Après l'intégration et avec les conditions aux limites (3.2), les solutions de ces équations donnent :

$$W(r) = \left( 1 - r^2 - \frac{1 - \eta^2}{\ln \eta} \ln r \right) \quad (5.4.a)$$

$$C(z, r) = C_p + C_S \cdot z + \text{Sc} \cdot \text{Re} \cdot C_S \cdot \left[ \frac{r^2 - \eta^2}{4} - \frac{r^4 - \eta^4}{16} - \frac{1 - \eta^2}{\ln \eta} \left( \frac{r^2}{4} \ln r - \frac{\eta^2}{4} \ln \eta - \frac{3}{4}(r - \eta) \right) \right] - \quad (5.4.b)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{r}{\eta}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} \left\{ C_p + \text{Sc} \cdot \text{Re} \cdot C_S \cdot \left[ \frac{1 - \eta^2}{4} - \frac{1 - \eta^4}{16} + \frac{1 - \eta^2}{\ln \eta} \left( \frac{\eta^2}{4} \ln \eta + \frac{3}{4}(1 - \eta) \right) \right] \right\}$$

$$\Theta(z, r) = \Theta_p + C_T \cdot z + C_T \cdot \text{Pr} \cdot \text{Re} \cdot \left[ \frac{r^2 - \eta^2}{4} - \frac{r^4 - \eta^4}{16} - \frac{1 - \eta^2}{\ln \eta} \left( \frac{r^2}{4} \ln r - \frac{\eta^2}{4} \ln \eta - \frac{3}{4}(r - \eta) \right) \right] \quad (5.4.b)$$

$$- \frac{1}{2} C_T \cdot \text{Pr} \cdot \text{Re} \cdot \ln\left(\frac{r}{\eta}\right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \eta^2}{\ln \eta} \right)$$

## 6. Résultats et discussion

Cette étude correspond au cas où les forces d'origine thermique et solutales agissent dans deux sens opposés et pour un rapport de poussée  $N=-5$ .

### 6.1. Influence de Re

#### 6.1.1 Comparaison des résultats analytiques et numériques.

La solution analytique trouvée par la théorie de l'écoulement parallèle dans le cas sans rotation est indiquée sur la fig.4 par des lignes en trait, alors que les résultats numérique sont représentées par des symboles. Ceci pour des faibles valeurs de Schmidt ( $\leq 2.8$ ) correspondant aux gaz et des valeurs relativement grandes correspondant aux cas des liquides. On constate que les valeurs de la concentration augmentent au fur et à mesure que le Sc croit.

#### 6.1.2 Sur la structure de l'écoulement

La figure 5, illustre des résultats numériques obtenus pour le cas :  $Ta=200$ ,  $Pr=0.7$ ,  $Sc=0.7$  et  $\eta=0.5$  pour différentes valeurs de Re. La figure (5.a) montre que l'écoulement résultant consiste à des tourbillons pouvant tourner indifféremment dans le sens horaire ou anti-horaire. La convection est relativement intense, donnant lieu à une déformation importante des isothermes et des lignes d'iso concentrations. En augmentant le nombre de Re, la figure (5.b) indique que les tourbillons commencent à se déplacer vers l'aval de l'espace annulaire jusqu'à une disparition définitive, ceci pour une valeur de  $Re=600$ . On constate

également que la convection est intensifiée, résultant en un transfert de chaleur et de masse plus important. Cette tendance est conforme aux résultats obtenus dans le passé par différents auteurs dans l'étude de la convection double diffusive dans des enceintes, (Nield et Béjan 1999) [18]. A partir de  $Re=400$  des instabilités hydrodynamiques apparaissent au sein de l'écoulement, particulièrement près de la paroi inerte de l'espace annulaire, ce qui signifie que l'écoulement passe du régime laminaire avec tourbillons vers un régime turbulent. En ce qui concerne les lignes isothermes, la déformation de ces lignes est due pratiquement à l'effet de tourbillons, cette déformation a tendance de disparaître pour une valeur de  $Re=400$ , au-delà de cette valeur des instabilités thermiques apparaissent dans la zone l'entrée de l'espace annulaire, elles deviennent très accentués pour les grandes valeurs de  $Re$ .

### 6.1.3. Sur le transfert thermique et de matière

La figure 6, montre l'effet du débit axial de l'écoulement sur la variation de la température et de la concentration de transfert de chaleur et de masse pour  $Sc=0.7$  et  $Pr=0.7$  (cas des gaz). Les deux valeurs de  $Nu$  et de  $Sh$  prennent des valeurs maximales juste à l'entrée de l'espace annulaire, puis diminuent rapidement vers une valeur asymptotique. On constate également que ces valeurs asymptotiques augmentent quand le nombre de  $Re$  croit, ceci dans les deux cas.

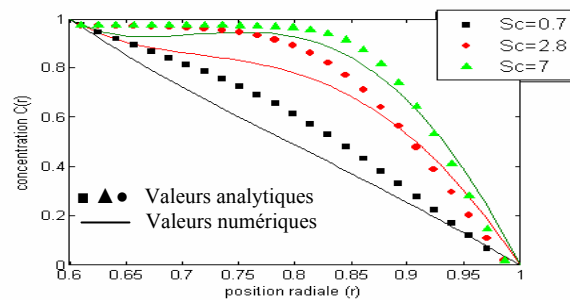


FIG. 4 : Influence du nombre de Schmidt sur le profil de concentration pour :  $Ta=0$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0.7$ ,  $N=-5$  et  $\eta=0.5$

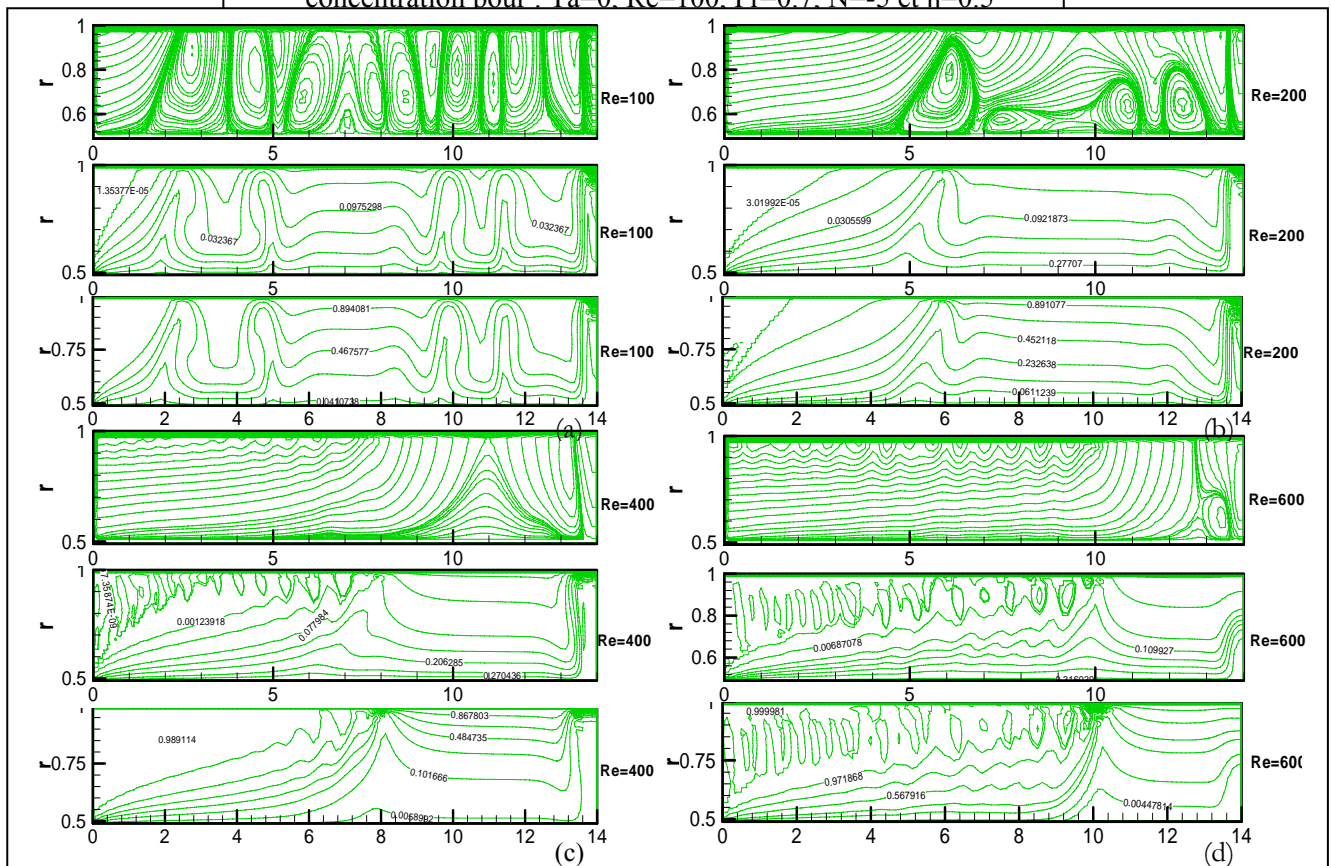
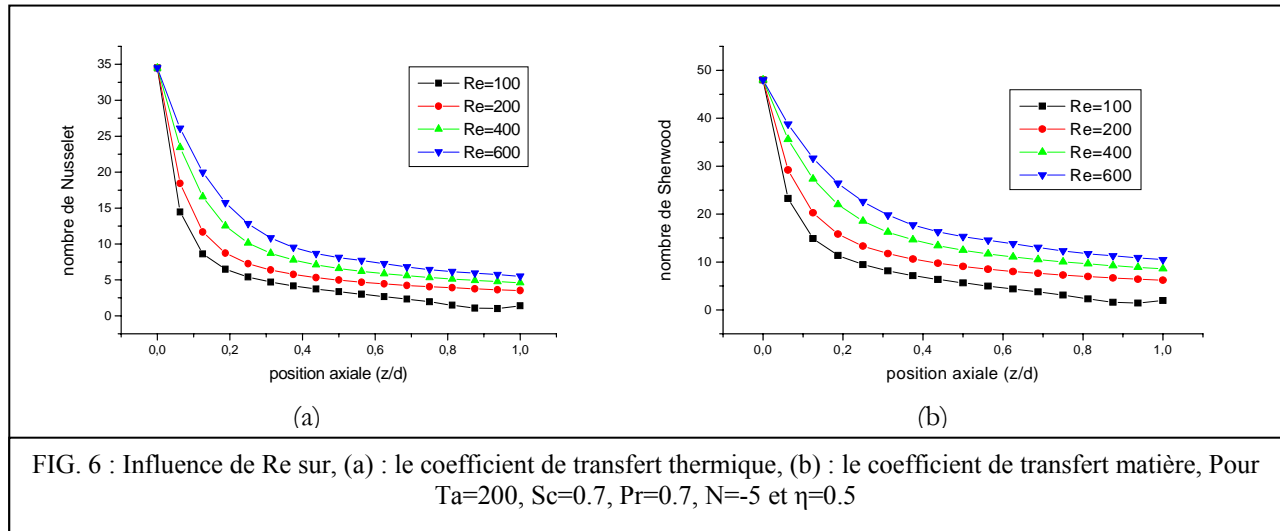


FIG.5 : lignes de courant, de température et de concentration pour,  $Ta=200$ ,  $Sc=0.7$ ,  $Pr=0.7$ ,  $N=-5$  et  $\eta=0.5$  (a)  $Re=100$ , (b)  $Re=200$ , (c)  $Re=400$ , (d)  $Re=600$ .



## Conclusion

On a étudié le transfert de chaleur et de masse par convection mixte thermosolutale d'un fluide newtonien dans un espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux horizontaux, lorsque les forces de volume (thermiques et solutales) sont opposées. Un code aux différences finies permettant de résoudre les équations complètes de Navier Stokes a été utilisé dans cette étude. Nous avons montré l'influence du nombre de Reynolds sur le transfert de chaleur et de masse entre la paroi et le fluide. On a abouti à la situation où l'augmentation du débit axial contribue à une augmentation du transfert de chaleur et de matière, ceci pour un rapport de poussée  $N=-5$  (les forces de volume solutales est très grandes devant les forces de volume thermiques). Une comparaison des résultats analytique et numérique a été faite dans le cas sans rotation.

## Références

- [1] S. Ostrach, Fluid mechanics in crystal growth—The 1982 Freeman Scholar Lecture, J. Fluids Engrg. pp 5–20. N 105 (1983).
- [2] N. Alleborn, H. Raszillier, F. Durst, Lid-driven cavity with heat and mass transport, Int. J. Heat Mass Transfer. pp 833–853. 42 (1999)
- [3] L.W. Wang, C.Y. Wei, Natural convection heat and mass transfer in a vertical annular enclosure, in: Proc. Symposium on Transfer Phenomena and Applications, pp. 401–406. (1992).
- [4] P.W. Ship, M. Shoukri, M.B. Carver, Double-diffusive natural convection in a closed annulus, Numer. Heat Transfer: PP 339–356. Part A 24 (1993)
- [5] J. Lee, S.H. Kang, Y.S. Son, Experimental study of double-diffusive convection in a rotating annulus with lateral rotating annulus with lateral heating, Numer. Heat Transfer: 467–489. Part A 38 (2000)
- [6] H.J. Sung, W.K. Cho, J.M. Hyun, Double-diffusive convection in a rotating annulus with horizontal temperature and vertical solutal gradients, Int. J. Heat Mass Transfer. pp 3773–3782. N36 (1993)
- [7] R. Peyrret Unsteady evolution of horizontal jet in a stratified fluid. J. Fluid mechanics, vol.78, part 1, pp.49-63 (1976).
- [8] A.Ghezal, B. Porterie, J.C. Loraud. Modélisation du transfert de chaleur, avec couplage conduction convection, entre un obstacle en mouvement hélicoïdal est un fluide visqueux en écoulement confiné. Int.J.Heat.Mass. Transfer.Jan. (1991).
- [9] Z. Ouchiha. Ecoulement d'un fluide réel dans une conduite verticale en présence d'un obstacle cylindre chauffé. Thèse de magister USTHB ALGERIA. (1998)
- [10] B. Dadda. Etude d'un écoulement ascendant en régime dynamique et thermique non établi en présence d'un cylindre chauffé avec effets de conductivité. Thèse de magister. USTHB ALGERIA. (2004)
- [11] N. Ait Moussa. Etude numérique des instabilités Taylor Couette dans un écoulement ascendant autour d'un cylindre en rotation. USTHB Thèse de magister. ALGERIA, (2004)
- [12] Hadj. Ali. Etude numérique d'un écoulement pulsé, en présence d'un cylindre chauffé thèse de magister en préparation. USTHB Thèse de magister. ALGERIA, (2006)
- [13] M. IHDENE. Transfert de matière dans des conduits rotatifs. Thèse de magister, USTHB ALGERIA (2007).
- [14] Cormack D.E., Leal L.G., Imberger J. Natural convection in a shallow cavity

with differentially heated end walls, Part 1: Asymptotic theory, *J. Fluid Mechanics*, 65, 209-230. (1974).

[15] Bejan A., Tien C.L. Fully developed natural counter flow in a long horizontal pipe with different end temperatures, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21, 6, 701-708. (1978).

[16] Bahloul A., Boutana N., Vasseur P. Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.*, 491, 325-352. (2006).

[17] Mahidjiba A. Convection naturelle en milieu poreux anisotrope – Effet de maximum de densité, *Thèse de doctorat*, École Polytechnique de Montréal, Canada. (2001).

[18] Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media, Second edition, Springer-Verlag. (1999).