

# Sur la distribution alpha stable de la pente des vagues de vent.

M. JOELSON<sup>a,b</sup>, M. C. NÉEL<sup>a,b</sup>, G. SORIANO<sup>c</sup>, M. SAILLARD<sup>d</sup>

*a. INRA UMR EMMAH, Domaine St Paul, Site Agroparc - 84914 Avignon cedex 9 - France*

*b. Université d'Avignon, Département de Physique, 33 Louis Pasteur, 84000-France*

*c. Institut Fresnel, Université Paul Cézanne, Faculté de St Jérôme, Marseille, France*

*d. Laboratoire LSEET Université de Toulon, La Garde, France*

## Résumé :

*Dans cette communication, nous présentons l'analyse de la distribution de probabilité des pentes de vagues de vent issues d'expériences conduites dans la soufflerie de simulation d'interaction Océan-Atmosphère du laboratoire IRPHE-IOA. Les résultats montrent que ces pentes de vagues sont distribuées selon des lois  $\alpha$ -stable de Lévy à ailes épaisses qui généralisent la loi Gaussienne. Nous montrons aussi des simulations numériques de champs de vagues basées sur un modèle hydrodynamique nonlinéaire présentant des distributions de probabilité de pentes à ailes épaisses comparables aux lois  $\alpha$ -stable de Lévy. Nous discutons ensuite de l'impact de ces ailes épaisses de distribution dans les phénomènes de rétrodiffusion radar de la surface marine.*

## Abstract :

*In this paper, we present the study of the probability distribution of wind wave slopes from experiments conducted in Air-sea interaction facility of the IOA-IRPHE laboratory. The results show that wind wave slopes probability distribution exhibits heavy tails probability and follows the Lévy  $\alpha$ -stable law. We show also that wave slopes from numerical simulations based on nonlinear hydrodynamical model can present heavy tail probability. Then, we discuss the impact of these heavy tails probability distribution on the retrodiffusion process from the sea surface*

**Mots clefs :** pentes de vagues de vent, probabilité à ailes épaisses, lois  $\alpha$ -stable de Lévy, modèle hydrodynamique nonlinéaire

## 1 Introduction

La distribution de probabilité des pentes de vagues à la surface de la mer constitue un paramètre fondamental pour l'étude de la dynamique de la surface océanique et de ses propriétés pour la diffusion des ondes électromagnétiques. En effet, par exemple dans une configuration d'incidence proche du normal, la section de retro-diffusion d'un faisceau d'ondes électromagnétiques selon les principes de l'optique géométrique dépend directement des propriétés statistiques des pentes ([1]) :

$$\sigma_0(\theta) = \pi \sec^4 \theta f(\zeta_x, \zeta_y) |R(0)|^2 \quad (1)$$

où  $\theta$  désigne l'angle d'incidence du faisceau,  $|R(0)|^2$  est le coefficient de réflexion de Fresnel et  $f(\zeta_x, \zeta_y)$  représente la fonction de distribution de probabilité de la pente de la surface au point  $(\zeta_x, \zeta_y)$ . Dans le présent travail, nous montrons que cette distribution de probabilité peut-être décrite par des lois non-Gaussiennes à ailes épaisses de type Lévy  $\alpha$ -stable. Dans ce qui suit, nous montrons à partir de données expérimentales obtenues en soufflerie des exemples de distribution de probabilité de pentes de vagues de vent qui suivent des lois de Lévy  $\alpha$ -stables. Nous mettons en avant à partir de résultats de simulations numérique directe basée sur les équations hydrodynamiques des mouvements, les conséquences des caractères à ailes épaisses des lois de probabilité des pentes sur le processus de rétrodiffusion. Ensuite, une modélisation un peu plus théorique basée sur des concepts probabilistes est proposée et discutée.

## 2 Expérience et analyse des données

Les données de pentes de vagues que nous traitons ici proviennent d'expériences conduites dans la soufflerie d'interaction air-mer du laboratoire IRPHE-IOA. Brièvement, la soufflerie air-mer est constituée d'un bassin rempli d'eau de dimension 40x3x1m au dessus duquel est installé un tunnel muni d'un ventilateur. Un schéma de principe et des détails techniques sur cette installation sont donnés dans l'article de Coantic et al [2]). Dans cette communication, nous nous concentrons sur des mesures en un point des pentes des vagues utilisant deux

sondes capacitives espacées d'une distance de 5cm. Il s'agit donc d'étudier la variation temporelle de la pente des vagues en un point.

Dans ce travail, nous caractérisons la loi de probabilité des fluctuations observées par des lois  $\alpha$ -stable de Lévy [3]. Brièvement, nous rappelons qu'une loi de probabilité  $\alpha$ -stable est définie par quatre paramètres à savoir un indice de stabilité  $\alpha$ , un paramètre de localisation  $\mu$ , un paramètre d'asymétrie  $\beta$  et un paramètre d'échelle  $\gamma$ . Une variable aléatoire  $X$  est dite de lois  $\alpha$ -stable (noté  $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \mu)$ ) si sa fonction caractéristique satisfait :

$$\Phi_X(t) = \exp(i\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) W(\alpha, t)]) \quad (2)$$

où

$$W(\alpha, t) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{if } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |t| & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

et

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t = 0 \\ -1 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

L'index de stabilité (appelé aussi exposant caractéristique) prends des valeurs entre  $0 < \alpha \leq 2$  tandis que le paramètre d'asymétrie varie entre  $-1 \leq \beta \leq 1$ . Le paramètre de localisation  $\mu$  est défini pour le cas où l'index de stabilité est  $\alpha > 1$  ( $\mu \in \mathbf{R}$ ). Si  $\beta = 0$ , la loi est symétrique autour  $\mu$ . Le paramètre d'échelle (appelé aussi paramètre de dispersion) prend des valeurs positives  $\gamma > 0$  qui déterminent la largeur de la loi distribution des probabilités. Le paramètre de localisation  $\mu$  décrit la position du pic de la loi probabilité tandis que l'index de stabilité  $\alpha$  détermine la loi de comportement asymptotique des ailes de la distribution. Quand  $\alpha < 2$ , la variance de la variable aléatoire  $X$  est infinie et les ailes de la loi de probabilité associée présente un comportement en lois d'échelle. Plus précisément, il est possible de montrer (à l'aide du théorème central limite) que :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \Pr(X > t) = C_\alpha (1 + \beta) \gamma^\alpha \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \Pr(X < -t) = C_\alpha (1 - \beta) \gamma^\alpha \end{cases} \quad (3)$$

où  $C_\alpha = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin(\frac{\pi\alpha}{2})$ . L'expression (3) entraîne que les moments statistiques d'ordre  $p$  de la variable  $X$  ne sont définis que pour  $p < \alpha$ . En particulier les moments d'ordre deux (variance) ne sont définis que pour  $\alpha = 2$  qui donne la loi de probabilité Gaussienne.

Afin de modéliser la loi de probabilité des pentes des vagues de vent par des lois  $\alpha$ -stable nous utilisons une formulation intégrale de la fonction de densité de probabilité écrite par [4]. Les estimations à partir des données des quatre paramètres de la loi  $\alpha$ -stable sont effectuées sur la base d'une méthode de régression du logarithme de la fonction caractéristique développée par [5][6].

Trois cas illustrant les résultats obtenus sont donnés ci-après. Les valeurs des paramètres estimés des lois  $\alpha$ -stables sont fournis dans la table 1 tandis que les graphiques correspondants sont donnés à la figure Fig.1. Les trois cas traités ici correspondent à trois valeurs du fetch (longueur d'action du vent) pour trois valeurs différentes de la vitesse du vent (estimé à 10 m au dessus de la surface). Plus de détails et une étude comparative des lois  $\alpha$ -stable avec des modèles de probabilité de pentes existants dans la littérature sont donnés dans Joelson et Néel[7].

Cas	Fetch (m)	$U_{10}$ (m/s)	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\mu$
(1)	2	6	1.7219	-0.0816	0.5434	0.0056
(2)	6	6	1.8688	-1.0000	0.6384	-0.0869
(3)	13	3	1.9822	-1.0000	0.6972	-0.0117

TAB. 1 – Estimation des paramètres ( $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ ) à partir des séries temporelles de pentes.

### 3 Modèle hydrodynamique nonlinéaire

Dans cette section, nous mettons en oeuvre un modèle nonlinéaire basé sur les équations régissant les mouvements des ondes à la surface de la mer. Une telle modélisation a été utilisée pour réaliser une simulation directe du phénomène de retrodiffusion à la surface de la mer. Pour cela le présent modèle a été combiné avec un modèle de retrodiffusion d'ondes électromagnétiques par une surface rugueuse ([8]). La mise en oeuvre d'un tel modèle présente des difficultés liées à la combinaison de l'aspect naturellement nonlinéaire des vagues et de leurs caractères aléatoires. En d'autres termes, notre objectif ici est construire un champ de vagues prenant en compte des aspects nonlinéaires sous la forme d'interactions vagues-vagues mais aussi incluant le caractère stochastique apporté par la turbulence aléatoire du vent. Dans ce cadre, la solution exacte du problème devrait être donnée par la fonction de densité de probabilité de la hauteur de la surface en chaque point à chaque instant. Une telle solution, malheureusement reste inaccessible aussi bien d'un point théorique que pratique.

Ainsi, à la place de cette démarche, des méthodes moins rigoureuses mais utiles sont généralement mises en oeuvre pour simuler des champs de vagues nonlinéaires et stochastiques. En particulier dans cette communication, nous présentons une méthode stochastique de type Monte-Carlo basée un modèle hydrodynamique nonlinéaire. Une telle méthode nous permet de construire des réalisations du champ de vagues aléatoires. A partir de ces simulations de réalisations, nous pouvons ainsi déterminer les propriétés statistiques du champ de vagues considéré et analyser les effets et les conséquences des nonlinéarités introduites dans le modèle dans un cadre aléatoire. En particulier, nous allons montrer que les nonlinéarités dans le champ de vagues aléatoires peuvent produire des statistiques de pentes à ailes épaisses comparables à celles des lois  $\alpha$ -stables introduites plus haut.

La démarche générale pour aborder cette modélisation nonlinéaire nous amène à distinguer deux catégories de modèles à savoir un modèle linéaire et nonlinéaire. Un modèle linéaire est défini à partir de la solution des équations hydrodynamiques linéarisées et se présente sous la forme d'une superposition d'ondes harmoniques. Cette solution constitue la partie linéaire de notre surface de mer. La partie nonlinéaire du modèle s'obtient en développant une solution hydrodynamique d'ordre supérieur à l'aide d'une méthode de petites perturbations. D'un point de vue pratique, nous construisons en premier lieu la partie linéaire de la surface. La partie nonlinéaire constitue ensuite une sorte de correction à l'ordre supérieur de la partie linéaire. Le caractère temporel de la simulation est réalisée à l'aide de la relation de dispersion qui assure la progressivité des ondes de surface (dans cette étude, nous négligeons la contribution des ondes de capillarités).

La forme discrète de la surface linéaire s'écrit :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = Re \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4)$$

avec  $A(\mathbf{k}, t) = \gamma(k) \sqrt{2P(\mathbf{k}) \delta \mathbf{k}_x \delta \mathbf{k}_y} e^{-i\omega t}$ , la pulsation  $\omega$  est déduite de la relation de dispersion des ondes de gravité  $\omega^2 = gk$  et  $\gamma$  est un processus aléatoire Gaussien complexe.  $P(\mathbf{k})$  constitue le spectre bi-dimensionnel en nombre d'ondes du champ de vagues,

$$P(\mathbf{k}) = \begin{cases} \Psi_{PM}(k) & \text{if } k < k_c \\ bk^{-p} & \text{if } k > k_c \end{cases} \quad (5)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'ondes spatial en coordonnées polaires  $(k, \theta)$ . Les valeurs des coefficients  $k_c$  and  $p$  ont été déterminées numériquement avec  $b = k_c^p \Psi_{PM}(k_c)$  pour assurer la continuité du spectre en  $k = k_c$ . Ici,  $\Psi_{PM}$  représente un spectre directionnel Pierson-Moskowitz,

$$\Psi_{PM}(k) \phi(\theta) = \frac{a}{k^4} \exp \left( -\frac{5}{4} \left( \frac{k}{k_p} \right)^2 \right) \mathcal{N} \left| \cos^5 \left( \frac{\theta - \theta_v}{2} \right) \right| \quad (6)$$

dependant des deux paramètres  $a = 4.0510^{-3}$  et  $k_p$  définissant le nombre d'ondes du pic spectral qui est fonction de la vitesse du vent. Dans l'équation (6),  $\theta_v$  représente l'angle avec la direction du vent,  $\mathcal{N}$  constitue un facteur de normalisation. On note ici qu'une formule modifiée du spectre (noté "undressed spectrum", spectre déshabillé) a été utilisé dans nos récents travaux ([9] et [10]) à la place du spectre semi-empirique Pierson-Moskowitz. Cette modification avait pour but de résoudre un problème de biais énergétique dans les échelles sous-métriques des longueurs d'ondes. Ce point est discuté dans Soriano et al [9] en particulier vis à vis de la modélisation de la retrodiffusion radar Doppler en bande L. L'utilisation du spectre déshabillé a permis de faire une comparaison quantitative de nos résultats de simulation avec des expériences sur site ([10]). Dans le cas présent, l'utilisation directe du spectre déshabillé à la place du spectre Pierson-Moskowitz n'est pas nécessaire.

Le calcul de la surface linéaire  $\eta(\mathbf{x}, t)$  est effectué à l'aide d'une transformée de Fourier rapide inverse (FFT). La construction de la partie nonlinéaire fait appel à la formulation Hamiltonienne de la hauteur des vagues dans le cadre du formalisme de la théorie des interactions faibles de Zakharov ([11]). Plus précisément, nous utilisons de cette étude, la formulation Hamiltonienne donnée par Creamer et al[12]. La formulation de Creamer s'écrit comme une transformation nonlinéaire de la transformée de Hilbert de la surface linéaire. A un temps  $t$  fixé, la transformée de Hilbert de (4), s'écrit

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = Re \sum_{\mathbf{k}} \left( -i \frac{\mathbf{k}}{k} \right) A(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (7)$$

et se calcule par FFT (avec un nombre  $N \log(N)$  d'opérations). A partir de l'équation (7), la transformation nonlinéaire de Creamer est donnée par

$$C(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}, t))}{k} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (8)$$

où  $N$  représente le nombre de points d'échantillons pour la simulation. En développant (8) au second ordre, nous définissons la partie nonlinéaire de la surface en effectuant un calcul simple de FFT.

Des simulations de surface de mer sont ainsi effectuées par une méthode de Monte-Carlo avec  $N \times N$  points ( $N=512$ ). Dans la simulation présentée ici, les valeurs suivantes des paramètres sont utilisées : la vitesse du vent a été fixée à 3m/s,  $k_p = 0.73$  rad/m,  $k_c = 8$  rad/m and  $p = 4.85$ . Pour illustrer la simulation, des échantillons de surfaces simulées à un temps fixé  $t$  sont montrées à la figure Fig.2. Les deux échantillons de surface sont construits avec la même réalisation aléatoire pour mettre en avant les effets des nonlinearités. Les résultats de la figure Fig.2 montrent que les effets se traduisent par l'augmentation de taux de rugosité de la surface. Nous avons ensuite calculé numériquement les pentes des réalisations aléatoires. La fonction de densité de probabilité (PDF) des pentes a été estimée pour chaque surface simulée. Les résultats ont été ensuite moyennés sur l'ensemble des réalisations effectuées et présentées sur la figure Fig.3. Une loi de probabilité à ailes épaisses est obtenue pour la surface nonlinéaire. Cette fonction de densité de probabilité obtenue avec les surfaces de mer simulées numériquement a été ensuite modélisée par une loi  $\alpha$ -stable de Lévy avec valeurs suivantes des paramètres :  $\alpha = 1.7$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sigma = 0.657$  and  $\mu = 0$ . La loi  $\alpha$ -stable de Lévy modélise de façon satisfaisante la fonction de densité de probabilité de la surface nonlinéaire. Cependant, quelque différence apparaît aux valeurs extrêmes des ailes. La loi  $\alpha$ -stable de Lévy surestime les occurrences des événements extrêmes par rapport à la loi de probabilité issue du modèle hydrodynamique. Cette différence pourrait s'expliquer par la non-prise en compte des vagues capillaires dans le modèle hydrodynamique.

## 4 Conclusions

Le travail que nous présentons dans cette communication a pour objectif de décrire la loi de probabilité des pentes de vagues de vent à l'aide d'une loi de probabilité  $\alpha$ -stable de Lévy [3]. D'une part, en utilisant des données issues d'expériences en laboratoire, nous avons montré que les lois  $\alpha$ -stable peuvent modéliser correctement les distributions de probabilité des pentes de vagues de vents. D'autres part, en partant d'une simulation numérique réaliste basée sur un modèle hydrodynamique nonlinéaire, nous avons mis en évidence que les caractères à ailes épaisses (heavy tails probability) des lois de probabilité des pentes sont associés aux effets nonlinéaires dans les champs de vagues. Dans nos récents travaux ([9][10]) nous avons mis en avant que ces effets nonlinéaires peuvent jouer un rôle important dans les processus de retrodiffusion des ondes électromagnétiques par la surface de la mer. Pour mieux situer la potentialité du modèle que nous proposons ici, une analyse comparative entre les lois  $\alpha$ -stable de Lévy et les modèles de probabilité de pentes de type Gram-Charlier et le modèle de Liu [13] ont été menées dans [7]. En particulier, la principale différence avec les développements de type Gram-Charlier réside dans le fait que les lois de probabilité  $\alpha$ -stable de Lévy ne sont pas issues de développement asymptotique sous l'hypothèse de phénomène quasi-gaussien. Les lois  $\alpha$ -stable de Lévy reposent sur une propriété mathématique généralisant le théorème central limite.

## Références

- [1] Valenzuela G. R. Theories for the interaction of electromagnetic and ocean wave-a review. *Bound.-Layer Meteor.*, 13, 61–85, 1978.
- [2] Coantic M. and Favre A. Activities and preliminary results of air-sea interaction research at i.m.s.t. *Advances in Geophysics*, 10, 391, 1974.
- [3] Lévy P. *Calcul des probabilités*. Gauthier Villars, 1925.
- [4] Zolotarev M. V. One dimensional stable distributions. *Amer. Math. Soc.*, 65, 1986. Transl. of the original 1983 Russian.
- [5] Koutrouvelis I. A. Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of The American Statistical Association*, 75, 918–928, 1980.
- [6] Kogon S. M. and Williams D. B. Characteristic function based estimation of stable parameters in "A Practical Guide to Heavy Tails". *Eds Adler R., Feldman R. and Taqqu M.* Birkhauser Boston, 1998.
- [7] Joelson M. and Néel M. C. On alpha stable distribution of wind driven water surface wave slope. *Chaos*, 18(3), 2008 DOI :10.1063/1.2955742.
- [8] Soriano G. and Saillard M. Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional rough surfaces with impedance approximation. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 18, 124–133, 2001.
- [9] Soriano G., Joelson M., and Saillard M. Doppler spectrum from two-dimensional ocean surface at microwave frequency. *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, 44, 2430–2437, 2006.
- [10] Saillard M., Forget P., Soriano G., Joelson M., Broche P., and Currier P. Sea surface probing with l-band doppler radar : experiment and theory. *CRAS Physique*, 6, 675–682, 2005.
- [11] Zakharov E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (USSR)*, 51, 269–306, 1968.
- [12] Creamer D. B., Henyey F., Schult R., and Wright J. Improved linear representation of ocean surface waves. *J. Fluid Mech.*, 205, 135–161, 1989.
- [13] Liu Y., Yan X., Liu W., and Hwang P. A. Probability density function of ocean surface slopes and its effects on radar backscatter. *Journal of Physical Oceanography*, 27, 782–797, 1997.

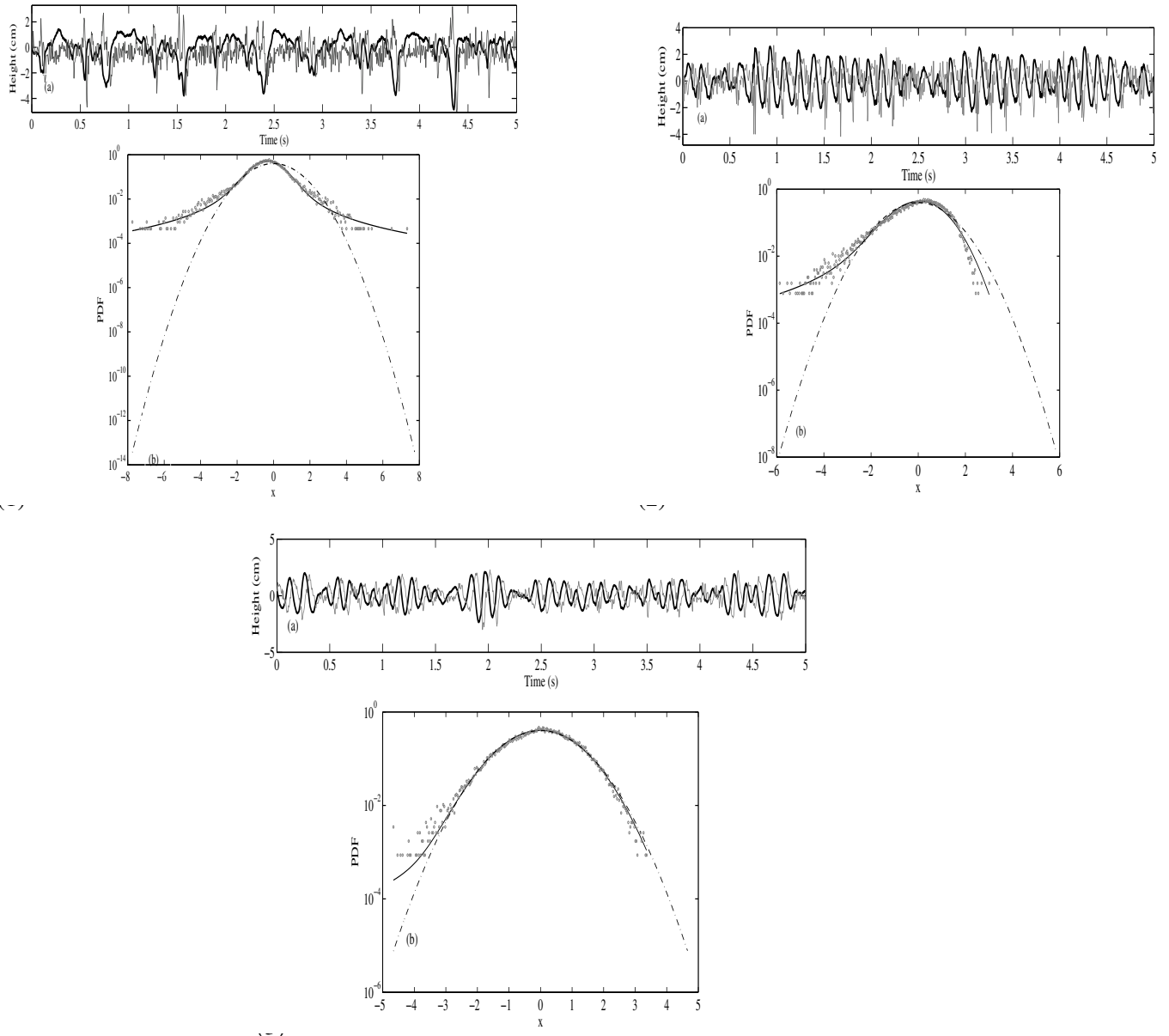


FIG. 1 – De gauche à droite : figures correspondant aux cas (1), (2) et (3) la table 1. Pour chaque figure : Partie(a) : Séries temporelles de la hauteur des vagues et des pentes normalisées. Partie(b) : 'o' : Probabilité des données expérimentales de pente. Ligne solide : Loi  $\alpha$  stable. Ligne en pointillés : Loi Gaussienne

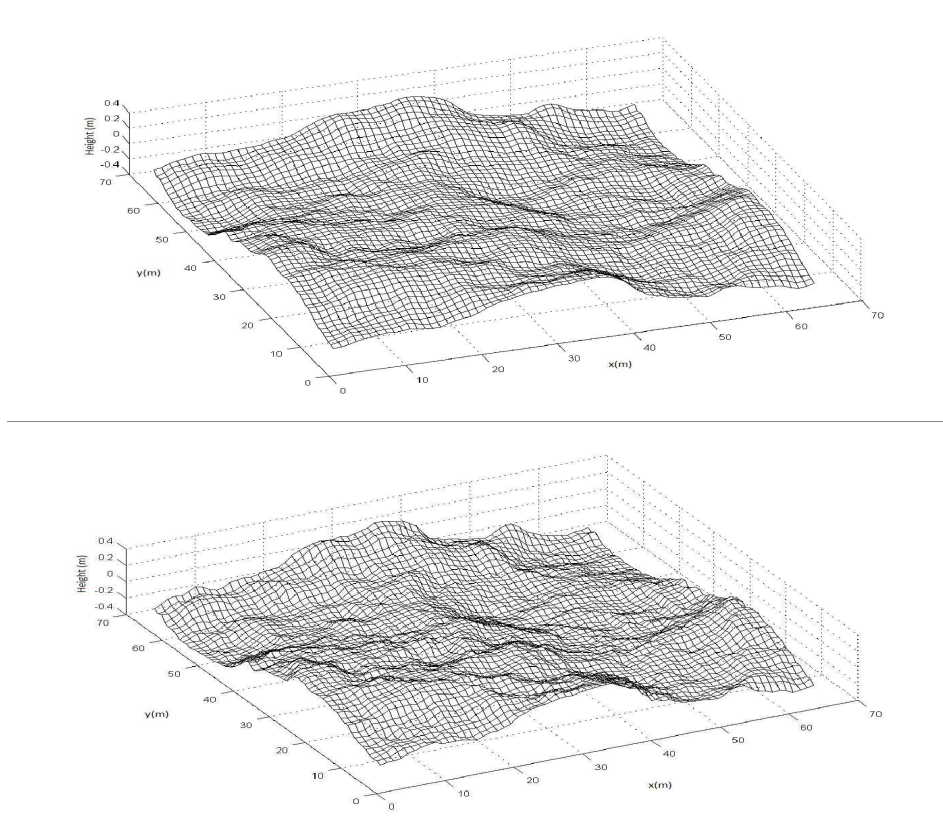


FIG. 2 – Echantillons de surface linéaire et nonlinéaire : Les effets de la non linéarité se traduisent par une augmentation de la rugosité aux petites échelles

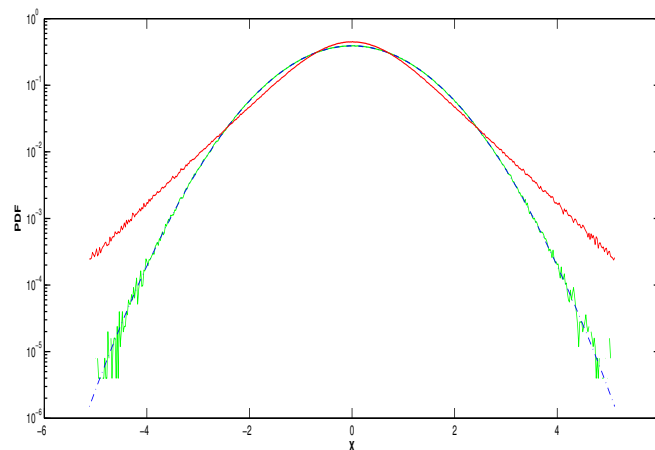


FIG. 3 – Fonction de densité de probabilité des pentes des surfaces simulées à partir du modèle hydrodynamique. Ligne bleue pointillée : Loi Gaussienne. En vert : loi de probabilité des surfaces linéaires. En rouge : Loi de probabilité des surfaces nonlinéaires