

# Dynamique d'un fluide dans un cylindre en précession

R. LAGRANGE<sup>a</sup>, P. MEUNIER<sup>a</sup>, C. ELOY<sup>a</sup>, F. NADAL<sup>b</sup>

*a. Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre (IRPHE), 49, rue Joliot Curie, 13384  
MARSEILLE*

*b. CEA/CESTA, 33114 Le Barp*

## Résumé :

*L'écoulement d'un fluide en précession est une rotation solide à laquelle se superposent des ondes appelées ondes inertielles ou encore modes de Kelvin. Ces ondes deviennent résonnantes lorsque leur fréquence propre est égale à la fréquence de précession. Cet écoulement devient instable lorsque le nombre de Reynolds augmente. On montre que cette instabilité est due à une interaction entre le mode résonnant de l'écoulement de base et de deux modes libres. Le seuil d'instabilité est alors bien prédit par une analyse de stabilité linéaire basée sur un mécanisme de résonance triadique entre modes de Kelvin. Une théorie faiblement non linéaire montre que l'instabilité de précession correspond à une bifurcation sous-critique. Si on augmente encore le nombre de Reynolds, l'écoulement transite d'un état instable stationnaire à instable intermittent puis turbulent. L'écoulement moyen est correctement prédit.*

## Abstract :

*The flow of a fluid inside a precessing cylinder is a solid body rotation with a superposition of waves called inertial waves or Kelvin modes. These waves are resonant when their own frequency equals the precessing frequency. The flow becomes unstable when the Reynolds number is increased. We show that this instability is due to an interaction between the resonant mode of the base flow and two free Kelvin modes. The threshold of the instability is well predicted by a linear stability analysis based upon a mechanism of triadic resonance between Kelvin modes. A weakly non linear theory shows that the instability of precession is a sub-critical bifurcation. Increasing the Reynolds number further leads to an intermittent and then turbulent flow whose mean velocity field is correctly predicted.*

**Mots clefs :** précession, modes de Kelvin, instabilité, résonance triadique

## 1 Introduction

L'étude de la stabilité d'un fluide dans un cylindre en précession s'applique à de nombreux domaines. Par exemple, en aéronautique, la présence d'un fluide (tel que le carburant liquide) dans un objet volant (satellite, fusée) peut avoir des conséquences dangereuses sur la stabilité de cet objet. En effet, si un léger angle de précession apparaît du fait d'une non-axisymétrie de l'objet, l'écoulement à l'intérieur de celui-ci peut exercer un couple sur sa structure et dévier sa trajectoire. Il semble donc important de connaître l'écoulement à l'intérieur de l'objet, mais aussi de connaître le couple induit. D'un point de vue géophysique, la précession de la Terre génère un forçage sur son noyau liquide. L'écoulement induit par ce forçage pourrait alors être responsable de la géodynamo, qui crée le champ magnétique terrestre. On comprend ainsi pourquoi l'étude de l'écoulement dans un objet en précession a déjà fait l'objet de nombreuses recherches.

Des expériences telles que celle menée par [1] ont clairement montré qu'un fluide en précession engendre un écoulement de rotation solide auquel se superposent des ondes, appelées ondes inertielles ou encore modes de Kelvin. Ces ondes sont forcées à la fréquence de précession. Une analyse linéaire non visqueuse suffit pour prédire précisément leurs structures et leurs amplitudes. Cependant, lorsque la fréquence de précession est égale à la fréquence libre d'une onde, son amplitude diverge par un phénomène de résonance. La prise en compte des non-linéarités et des effets visqueux est alors nécessaire pour connaître la saturation en amplitude. Dans le cas de la précession on constate que cet écoulement de base devient instable lorsque le nombre de Reynolds augmente. Cela conduit à un état très désordonné et possédant de petites structures par rapport à la taille du cylindre. L'apparition brutale de ce désordre, est appelé phénomène de "resonant collapse" par [1] ou encore "explosion" par [2] et [3]. Nous avons démontré qu'un mécanisme de résonance triadique permet d'expliquer cette instabilité qui constitue la première bifurcation d'une transition vers la turbulence.

## 2 Présentation du problème

Nous considérons un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  empli entièrement d'un fluide de viscosité cinématique  $\nu$ . Ce cylindre est en rotation autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire  $\Omega_1$ . Il est positionné sur une plateforme tournant à la vitesse angulaire  $\Omega_2$ . L'angle entre les deux axes de rotation est noté  $\theta$  comme indiqué sur la figure 1a. Cet angle de précession reste petit :  $0.25^\circ < \theta < 10^\circ$ . La dynamique du système en précession est fonction de quatre nombres sans dimension qui sont le rapport d'aspect  $h$ , le nombre de Rossby  $Ro$ , le rapport de fréquence  $\omega$  et le nombre de Reynolds  $Re$ , qui s'écrivent

$$h = \frac{H}{R}, \quad Ro = \left| \frac{\Omega_2 \sin(\theta)}{\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta)} \right|, \quad \omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta)}, \quad Re = \frac{(\Omega_1 + \Omega_2 \cos(\theta)) R^2}{\nu}.$$

Dans la limite  $\theta \ll 1$ , le nombre de Rossby est petit devant 1, ce qui justifie une théorie linéarisée.

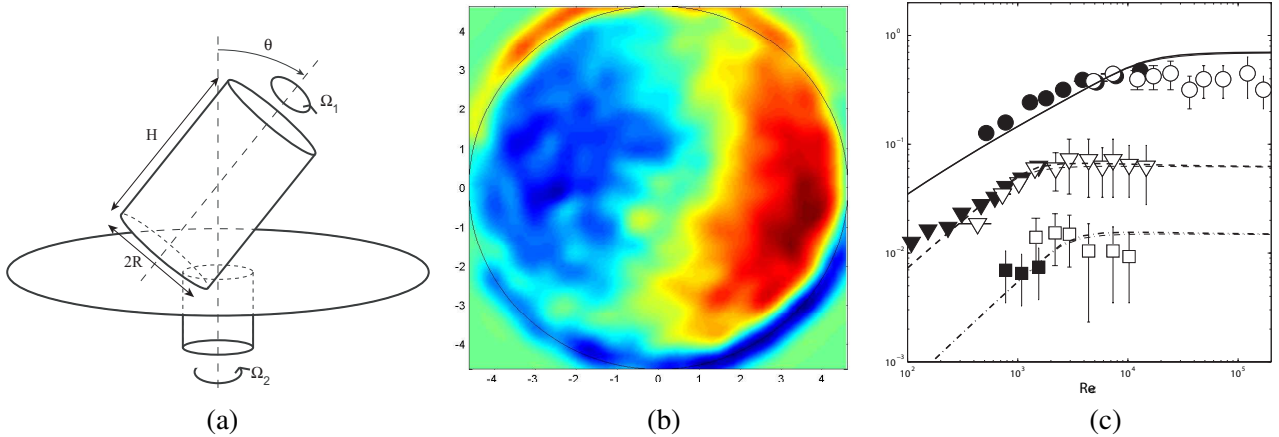


FIG. 1 – (a) Schéma de principe d'un cylindre en précession. (b) Champ de vorticité du premier mode de Kelvin mesuré par PIV à sa première résonance, en l'absence d'instabilité. ( $h = 1.62$ ,  $\omega = 1.18$ ,  $Re \approx 3500$ ,  $Ro = 0.0031$ ). (c) Amplitude du premier mode de Kelvin obtenue à la première (ligne continue), deuxième (ligne avec tirets) et troisième (ligne avec pointillés) résonance. Les symboles représentent les résultats expérimentaux ( $h = 1.8$ ,  $\theta = 2^\circ$ .)

## 3 Écoulement de base

La figure 1b représente la vorticité axiale de l'écoulement, dans le référentiel du cylindre, pour des petits nombres de Reynolds et de Rossby. Deux tourbillons contra-rotatifs sont observés. Cette structure correspond à un mode de Kelvin (premier mode de Kelvin) excité par la précession. Une théorie linéaire et non visqueuse permet de prédire son amplitude  $A$ . Quand ce mode est résonnant (i.e  $h = n\lambda/2$ , avec  $n$  un nombre impair et  $\lambda$  la longueur d'onde du mode) son amplitude diverge. Une théorie visqueuse ([4]) et faiblement non-linéaire ([5]) est alors nécessaire pour prédire la saturation en amplitude. La figure 1c représente l'amplitude de saturation  $A$  du premier mode de Kelvin en fonction de  $Re$  à ses trois premières résonances. On montre que  $A \sim RoRe^{1/2}$  pour  $Re < Ro^{-4/3}$  et  $A \sim Ro^{1/3}$  pour  $Re > Ro^{-4/3}$ . Ces résultats sont en accord avec les mesures expérimentales.

## 4 Instabilité par résonance triadique : théorie linéaire

Il est bien connu que lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds ou le nombre de Rossby ([6, 7, 3, 2]), l'écoulement devient instable puis rapidement turbulent. Cette instabilité résulte d'un mécanisme de résonance triadique entre le mode forcé par la précession et deux modes libres. Ces modes libres ont été visualisés grâce à des mesures PIV réalisées au niveau de deux sections différentes du cylindre. La figure 2a représente la vorticité axiale à mi-hauteur et révèle un de ces modes libres. Il est caractérisé par un nombre d'onde azimutal  $m_2 = 6$ . Le deuxième mode libre est quand à lui caractérisé par un nombre d'onde azimutal  $m_1 = 5$  (figure 2b). De plus amples informations sur ces résultats expérimentaux ont été publiés dans [8].

Une analyse de stabilité linéaire permet d'obtenir les équations d'évolution des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  des deux modes de Kelvin libres. Si l'écoulement de base contient un mode de Kelvin forcé d'amplitude  $A$  ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t A_1 = A^* N_1 A_2 - \frac{1}{\sqrt{Re}} S_1 A_1 - \frac{1}{Re} V_1 A_1 \\ \partial_t A_2 = A N_2 A_1 - \frac{1}{\sqrt{Re}} S_2 A_2 - \frac{1}{Re} V_2 A_2 \end{cases}$$

où les termes en  $1/Re$  représentent l'influence des effets visqueux volumiques et les termes en  $1/\sqrt{Re}$  l'influence des effets visqueux surfaciques. Les termes  $N_1$  et  $N_2$  représentent les couplages, via le terme non-linéaire de l'équation de Navier Stokes, d'un mode libre avec le mode de base. Les constantes  $S_1, S_2, V_1, V_2, N_1$  et  $N_2$  peuvent être calculées analytiquement. Ces équations permettent de prédire la structure des modes instables et d'établir un diagramme de stabilité (figure 3). On montre alors (courbe verte) que pour un nombre de Reynolds donné l'écoulement devient instable lorsque le nombre de Rossby dépasse une valeur critique  $Ro_{crit}$  qui varie comme  $Re^{-3/2}$  pour  $Re \ll 3000$  et  $Re^{-1}$  pour  $Re \gg 3000$ . Ce seuil d'instabilité est en très bon accord avec les mesures expérimentales.

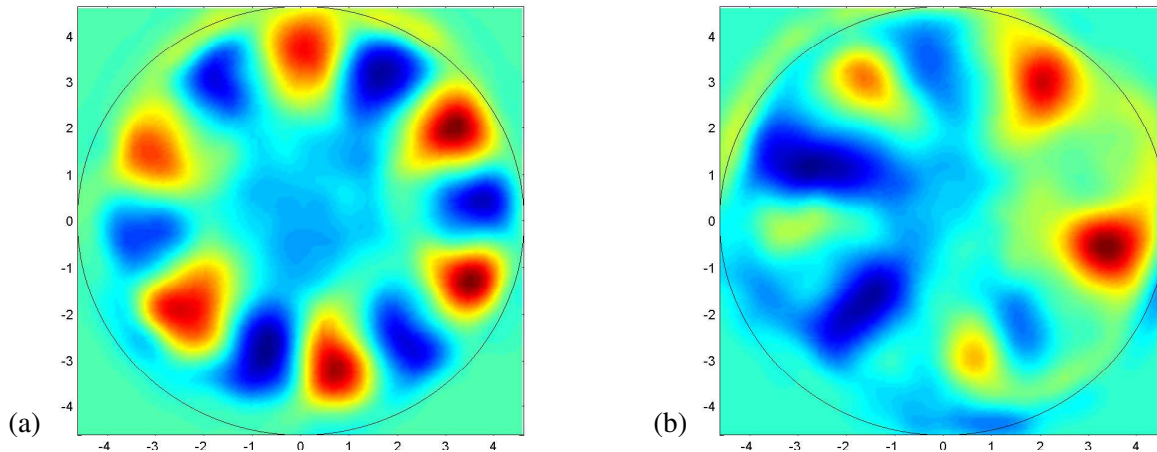


FIG. 2 – Champs de vorticité des modes libres qui constituent l'instabilité de précession dans un cylindre. (a) Champ de vorticité mesuré à mi-hauteur du cylindre. (b) Champ de vorticité mesuré au 3/4 de la hauteur montrant le mode  $m_1 = 5$  superposé avec le mode de Kelvin forcé de la figure 1b ( $h = 1.62, \omega = 1.18, Re \approx 6000, Ro = 0.0031$ ).

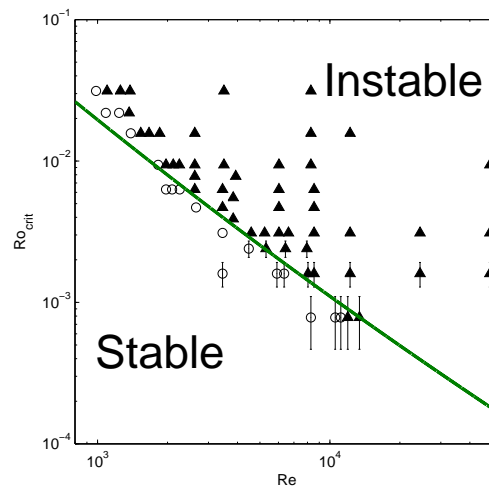


FIG. 3 – Rossby critique en fonction du nombre de Reynolds. Les cercles représentent des expériences stables et les triangles des expériences instables. La théorie est représentée en trait continu vert.  $h = 1.62, \omega = 1.18$

## 5 Étude faiblement non linéaire

Il est possible d'ajouter les couplages non-linéaires entre les différents modes. Ces couplages font ainsi apparaître un mode supplémentaire possédant une symétrie cylindrique. Ce mode est primordial car il sature le taux de croissance de l'instabilité par des effets de 'detuning'. La dynamique de l'écoulement de précession

est alors entièrement déterminée par les équations d'amplitude suivantes

$$\begin{cases} \partial_t A = 2ifRo - \frac{1}{\sqrt{Re}}SA - i\xi A_0 A \\ \partial_t A_1 = A^* N_1 A_2 - \frac{1}{\sqrt{Re}}S_1 A_1 - i\xi_1 A_0 A_1 \\ \partial_t A_2 = AN_2 A_1 - \frac{1}{\sqrt{Re}}S_2 A_2 - i\xi_2 A_0 A_2 \\ \partial_t A_0 = \frac{1}{\sqrt{Re}} \left( \frac{-2}{h} A_0 + \chi_1 |A_1|^2 + \chi_2 |A_2|^2 \right) \end{cases}$$

où  $A_0$  est l'amplitude du mode axisymétrique ;  $\xi A_0 A$ ,  $\xi_1 A_0 A_1$  et  $\xi_2 A_0 A_2$  étant les effets de 'detuning' évoqués précédemment. Les termes  $\chi_1 |A_1|^2$  et  $\chi_2 |A_2|^2$  représentent les couplages non-linéaires d'un mode libre avec lui même.

La résolution de ce système d'équations non-linéaires montre que l'instabilité est sous-critique comme le montre la figure 4. Expérimentalement nous ne pouvons pas vérifier la nature de la bifurcation car cela correspond à quelques 1/100 de degrés sur l'angle de précession. Nous montrons également que pour des nombres de Reynolds juste au dessus du seuil critique l'instabilité sature et les amplitudes des différents modes sont stationnaires. Les amplitudes deviennent intermittentes pour des nombres de Reynolds plus élevés, puis chaotiques pour de très grands nombres de Reynolds. Cette dynamique est confirmée par les expériences (figure 4).

A grand  $Re$ , la théorie montre que le point fixe des équations d'amplitude précédentes dépend uniquement de  $ReRo$  (figure 5). L'amplitude  $A_1$  (resp.  $A$ ) varie alors comme  $Ro^{1/4}$  (resp.  $Ro^{1/2}$ ) pour  $ReRo$  grand. En comparant le point fixe avec les valeurs moyennes expérimentales des amplitudes ( $\langle A \rangle$  et  $\langle A_1 \rangle$ ) nous remarquons que ces scaling sont très bien vérifiés et restent vrais même lorsque l'écoulement devient turbulent.

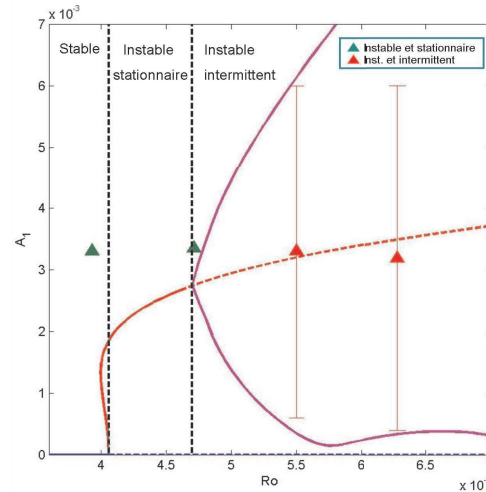


FIG. 4 – Amplitude du mode libre  $m_1 = 5$  en fonction de  $Ro$ . La bifurcation pour la transition d'un écoulement stable à instable est de type sous-critique. Celle correspondant à la transition d'un écoulement instable stationnaire à instable intermittent est super critique. Le point fixe issu de la théorie faiblement non-linéaire est représenté par la courbe rouge continue et est prolongé en trait pointillé lorsque l'écoulement devient instable intermittent. Les courbes continues violettes représentent le maximum et le minimum des oscillation de  $A_1$ . Les triangles verts (resp. rouges) représentent des expériences où l'écoulement est instable stationnaire (resp. instable intermittent).  $h = 1.62$ ,  $\omega = 1.18$ ,  $Re = 3664$ .

## 6 Conclusion

Des mesures PIV ont montré que l'écoulement d'un fluide dans un cylindre en précession devient instable pour un nombre de Reynolds critique qui dépend de l'angle de précession. Dans le cas général, l'écoulement stable est prédit par une théorie linéaire non-visqueuse et correspond à une superposition de modes de Kelvin. Dans le cas particulier où l'écoulement est résonnant, nous avons développé une théorie visqueuse et faiblement non-linéaire pour prédire la saturation en amplitude du mode de Kelvin résonnant. Cette théorie a été confirmée par les résultats expérimentaux.

Une analyse de stabilité linéaire basée sur un mécanisme de résonance triadique entre le mode de Kelvin forcé et deux modes de Kelvin libres permet de prédire la structure de l'écoulement instable et d'établir un diagramme de stabilité. Les prédictions de cette analyse sont en excellent accord avec les expériences.

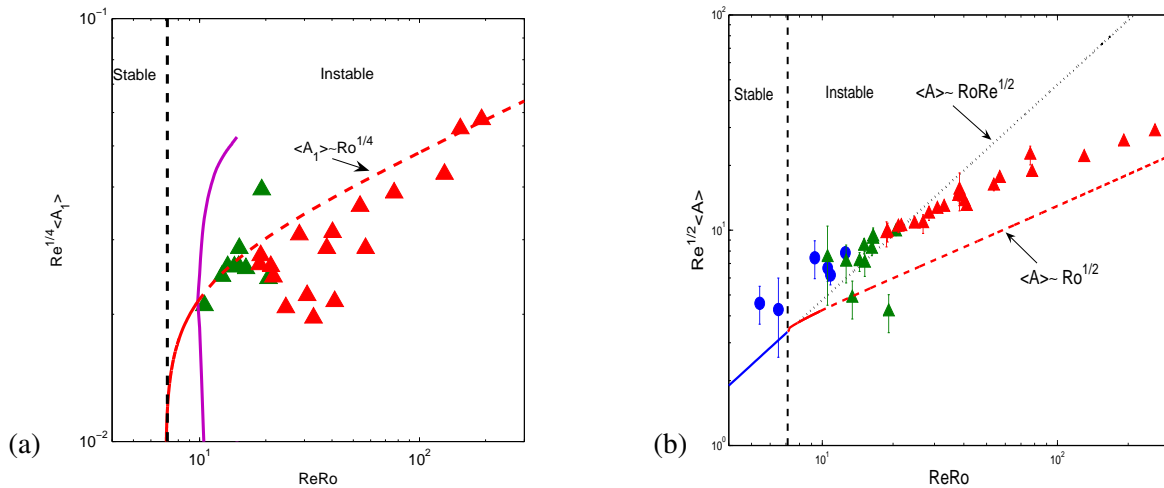


FIG. 5 – Amplitude du mode  $m_1 = 5$  (a) et du mode de base (b) en fonction de  $RoRe$  (effets visqueux volumiques négligés). Le point fixe (trait rouge continu puis discontinu) est comparé aux valeurs moyennes expérimentales  $\langle A_1 \rangle$  et  $\langle A \rangle$ . Ces valeurs sont représentées par des cercles bleus (écoulement stable), des triangles verts (écoulement instable stationnaire) ou des triangles rouges (écoulement instable intermittent).  $h = 1.62$ ,  $\omega = 1.18$ .

Une théorie faiblement non linéaire montre que l'instabilité de précession est de type sous critique et qu'au delà d'un certain seuil l'écoulement transite d'un état instable stationnaire à instable intermittent puis turbulent. La prédiction de ce deuxième seuil est en bon accord avec les expériences. De plus, cette théorie faiblement non linéaire permet de prédire correctement l'écoulement moyen, même en régime turbulent.

## Références

- [1] McEwan A. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.*, 40(3), 603–640, 1970.
- [2] Kobine J. Azimutal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder. *J. Fluid Mech.*, 319, 387–406, 1996.
- [3] Manasseh R. Nonlinear behaviour of contained inertia waves. *J. Fluid Mech.*, 315, 151–173, 1996.
- [4] Gans R. On the precession of a resonant cylinder. *J. Fluid Mech.*, 41(4), 865–872, 1970.
- [5] Meunier P., Eloy C., Lagrange R., and Nadal F. A rotating fluid cylinder subject to weak precession. *J. Fluid Mech.*, 599, 405–440, 2008.
- [6] Manasseh R. Breakdown regimes of inertia waves in a precessing cylinder. *J. Fluid Mech.*, 243, 261–296, 1992.
- [7] Manasseh R. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance. *J. Fluid Mech.*, 265, 345–370, 1994.
- [8] Lagrange R. Instability of a fluid inside a precessing cylinder. *Physics of Fluids.*, 20(8), 081701, 2008.