Interaction vorticité/déformation des monopôles et des dipôles

I. DELBENDE[a], **M. ROSSI**[b]

a. UPMC, LIMSI–CNRS, UPR 3251, BP133, 91403 Orsay Cedex
b. CNRS, IJLRDA–UPMC, UMR 7192, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 5

Résumé :

Par des approches théoriques et numériques, nous généralisons aux vortex non uniformes la relation établie par Moore & Saffman entre l'ellipticité d'une tache de vorticité et le champ de déformation extérieure qu'il subit. Nous en montrons les implications dans le cadre des monopôles et celui des dipôles.

Abstract :

Using both theoretical and numerical approaches, we generalize the Moore–Saffman relation between the ellipticity of a vortex patch and the external strain field, to vortices with nonuniform vorticity. Applications to monopoles and dipoles are given.

Mots clefs : **tourbillon, champ de déformation, elliptisation**

1 Introduction

Un champ turbulent 2D en déclin, à nombre de Reynolds suffisamment élevé, est composé de structures bien séparées les unes des autres, les vortex, qui se déplacent dans un fond diffus de vorticité qui joue un rôle quasi-passif. L'évolution peut alors être interprétée comme une dynamique de vortex. Chacun de ces vortex, soumis au champ de déformation induit par les vortex distants, est dans un état proche de l'équilibre [1]. Cette évolution quasi-statique ("adiabatic steadiness") se poursuit sous l'effet de l'induction mutuelle des vortex jusqu'à ce que le quasi-équilibre stable cesse d'exister. Il se produit alors une dynamique instationnaire rapide (filamentation, fusion) qui réorganise la ou les structures et conduit à une nouvelle phase d'évolution quasi-statique. Durant ces phases quasi-statiques, deux types de structures gardent leur identité lors de leur évolution : les monopôles dont la vorticité a un signe donné, et les dipôles. Dans les deux cas, les vortex sont en général elliptiques, comme conséquence de la présence d'un champ de déformation engendré par l'environnement externe dans le cas des monopôles, ou par le vortex compagnon dans le cas des dipôles. De plus, la distribution de vorticité dans les tourbillons est non uniforme, or la seule relation exploitable pour prédire l'ellipticité et l'inclinaison des vortex concerne des taches de vorticité (uniforme), relation présentée en §2.1. Nous proposons une méthode heuristique mais quantitative et très utile pour l'étendre au cas des vortex non uniformes en §2.2. Des applications sont finalement présentées dans le cas des monopôles soumis à un champ de déformation en §3.1 et des dipôles en évolution libre en §3.2.

2 Monopôle dans un champ de déformation plan

2.1 Solution 2D stationnaire de Moore–Saffman

On considère un vortex 2D dans le plan (y, z), de circulation Γ_p, soumis à un champ de déformation de la forme $(-\gamma y, \gamma z)$. On peut trouver des solutions pour lesquelles la vorticité uniforme ω_p est localisée sous forme d'une tache de vorticité (dite "patch") elliptique, de petit axe OY et de grand axe OZ, inclinés d'un angle θ par rapport aux axes Oy et Oz, de demi-petit axe r_Y et de demi-grand axe r_Z (voir figure 1). En effet, ces grandeurs vérifient les équations dynamiques [2, 3]

$$-\frac{\dot{r}_Y}{r_Y} = \frac{\dot{r}_Z}{r_Z} = \gamma \cos(2\theta)\,, \tag{1}$$

et

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_p r_Y r_Z}{(r_Y + r_Z)^2} + \gamma \frac{r_Y^2 + r_Z^2}{r_Y^2 - r_Z^2} \sin 2\theta\,, \tag{2}$$

où le point surmontant une variable désigne la dérivation temporelle. Ces deux équations montrent qu'une solution stationnaire peut être obtenue sous la forme d'un patch elliptique incliné de $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$. Pour

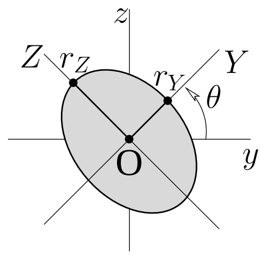

FIG. 1 – Définitions pour le patch elliptique.

$\theta = \pi/4$, l'équation (2) implique

$$\frac{\gamma}{\omega_p} = \frac{r_Y r_Z(r_Z - r_Y)}{(r_Y + r_Z)(r_Y^2 + r_Z^2)} = \frac{E(E-1)}{(E+1)(E^2+1)}$$

où a été introduite l'ellipticité $E = r_Z/r_Y > 1$. L'expression du membre de droite étant positive, cette solution est valable si γ et ω_p sont de même signe, sinon il faut considérer le cas $\theta = 3\pi/4$. On peut regrouper les cas $\theta = \pi/4$ et $3\pi/4$ en écrivant

$$\left|\frac{\gamma}{\omega_p}\right| = \frac{E(E-1)}{(E+1)(E^2+1)} \tag{3}$$

et en introduisant la règle suivante : l'inclinaison du grand axe de l'ellipse est décalée par rapport à la direction principale d'*étirement* d'un angle $\pi/4$ compté dans le sens de la rotation du vortex.
La relation (3) limite l'existence de solutions stationnaires à des taux de déformation γ tels que $\gamma/\omega_p < 0.15$, valeur au-dessus de laquelle elle n'a plus de solution. À une valeur fixée de $\gamma/\omega_p < 0.15$ correspond une ellipse stable d'ellipticité $E < 2.9$ (et une telle que $E > 2.9$ mais qui est instable [4]).

2.2 Solutions approchées de vorticité non uniforme – Patch équivalent

En présence de viscosité, la vorticité cesse d'être uniforme sous l'effet de la diffusion visqueuse ; on ne peut strictement parlant trouver de solution stationnaire qu'en présence d'étirement axial, qui concentre la vorticité et, de ce fait, contrecarre l'étalement visqueux comme dans le vortex de Burgers. De telles solutions ont été déterminées analytiquement sous la forme de développements à haut Reynolds [5]. Toutefois, en l'absence d'étirement axial, un vortex non uniforme soumis à déformation plane $(-\gamma y, \gamma z)$ a, sur des temps courts par rapport à l'évolution visqueuse, un comportement analogue à celui du patch inviscide pour ce qui concerne l'inclinaison et l'ellipticité. Nous proposons ici une interprétation de cette propriété en faisant correspondre à un vortex non uniforme un patch équivalent dont le comportement analytique est connu.
Le vortex elliptique non uniforme est caractérisé par sa circulation

$$\Gamma = \int \omega(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

la position de son centroïde (y_c, z_c)

$$y_c = \frac{1}{\Gamma}\int y\omega(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ , \quad z_c = \frac{1}{\Gamma}\int z\omega(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ ,$$

et son rayon de dispersion a tel que

$$a^2 = \frac{1}{\Gamma}\int [(y-y_c)^2 + (z-z_c)^2]\omega(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Dans la suite, on suppose par simplicité que $y_c = z_c = 0$. Ce tourbillon, soumis à un champ de déformation plan d'intensité γ imposé de l'extérieur, s'elliptise selon des axes (Y, Z) et on peut définir son ellipticité par $E = a_Z/a_Y$ où

$$a_Y^2 = \frac{1}{\Gamma}\int Y^2\omega(Y,Z)\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z\ , \quad a_Z^2 = \frac{1}{\Gamma}\int Z^2\omega(Y,Z)\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z.$$

Notons que $a_Y^2 + a_Z^2 = a^2$, et que, pour un vortex circulaire, $a_Y = a_Z = a/\sqrt{2}$.

Pour sa part, le patch supposé placé à l'origine, elliptique d'axes (Y, Z), de demi-axes r_Y et r_Z possède une circulation

$$\Gamma_p = \omega_p \pi r_Y r_Z$$

et une ellipticité $E = r_Z/r_Y$. Pour un tel patch, on a un accès analytique direct à des propriétés comme la vitesse induite, le champ de déformation induit, l'ellipticité sous l'effet d'une déformation extérieure donnée par la relation (3). En particulier, la vitesse induite le long du petit axe à une distance L du centre est donnée par

$$v^{\mathrm{ind}}(L) = \frac{\Gamma_p}{\pi \left(L + \sqrt{L^2 + r_z^2 - r_y^2}\right)}\,, \tag{4}$$

et le champ de déformation aux directions principales inclinées de $\pi/4$ est d'intensité

$$\epsilon^{\mathrm{ind}}(L) = \frac{\Gamma_p}{\pi \left(L + \sqrt{L^2 + r_z^2 - r_y^2}\right)\sqrt{L^2 + r_z^2 - r_y^2}}\,. \tag{5}$$

Afin de pouvoir utiliser ces propriétés également dans le cas d'un vortex non uniforme, on introduit la notion de patch équivalent, qui repose sur l'identification de trois caractéristiques essentielles : l'intensité des vortex (circulation), leur étendue (surface) et leur forme (ellipticité et orientation). Pour la circulation et l'orientation, la correspondance entre patch et vortex non uniforme est immédiate. Pour ce qui est de leur étendue, la correspondance est moins triviale. On choisit la règle suivante : pour la vitesse induite à l'extérieur du tourbillon, les corrections elliptiques au cas axisymétrique sont égales (au premier ordre) pour le patch et pour le vortex non uniforme. Ceci mène aux relations de correspondance

$$r_Y = 2a_Y\,, \quad r_Z = 2a_Z\,. \tag{6}$$

La figure 2 donne la comparaison entre la vitesse induite par un vortex non uniforme et son patch équivalent le long du petit axe de l'ellipse. L'accord est excellent dès que $r/a > 2$. De ce point de vue, les deux vortex auront un comportement identique vis-à-vis de l'extérieur.

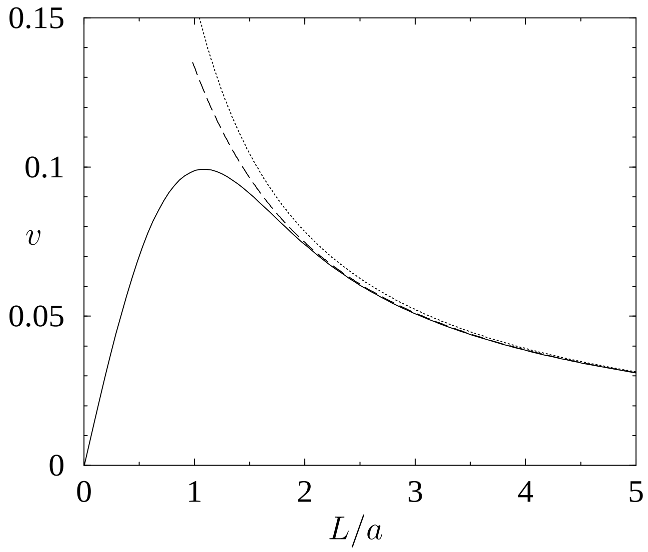

FIG. 2 – Comparaison entre la vitesse induite à une distance L le long de son petit axe par un vortex elliptique non uniforme (DNS, traits pleins), par le patch elliptique équivalent (formule 4, traits discontinus) et par un vortex axisymétrique de même circulation ($\Gamma/2\pi L$, pointillés).

3 Applications

3.1 Monopôle soumis à un champ de déformation plan

On réalise alors l'expérience numérique suivante [6] : on place un vortex gaussien dans un champ de déformation plan d'intensité γ que l'on augmente lentement à partir de zéro, de manière quasi-statique. Pendant ce processus, on relève l'ellipticité E, de même que les demi-axes de l'ellipse a_Y, a_Z et la circulation Γ, cette dernière n'étant pas constante à cause de la diffusion visqueuse. Utilisant la correspondance (6), on peut tracer la fonction $E = g(\gamma/\omega_p)$ où la vorticité du patch équivalent est donnée par

$$\omega_p = \frac{\Gamma}{4\pi a_Y a_Z} \,.$$

La figure 3a montre que la courbe obtenue (traits pleins) est très proche de la loi de Moore & Saffman valable pour le patch (traits discontinus). De plus, on perd la solution (quasi-)stationnaire peu avant le seuil inviscide $\gamma/\omega_p = 0.15$, ce qui indique que la filamentation[1] du vortex non uniforme se produit quand le patch stationnaire équivalent cesse d'exister.
Mariotti, Legras & Dritschel [7] donnent un critère analogue, basé sur le rapport entre γ et $\omega_{\max}$. Leur étude est basée sur une simulation de vortex soumis à un cisaillement augmenté adiabatiquement, une situation très proche de la nôtre, avec un fond de vorticité supplémentaire. Leur conclusion diffère légèrement : ils montrent que le mécanisme de destruction du vortex par filamentation est certes inviscide, mais leur seuil est très inférieur à celui de Moore et Saffman. L'utilisation de ω_p en lieu et place de $\omega_{\max}$ devrait permettre de résorber cet écart.

On peut aussi montrer que les états elliptiques ainsi obtenus sont attracteurs pour l'évolution des vortex soumis à un champ de déformation imposé de l'extérieur. Comme l'illustre la figure 3b, des conditions initiales quelconques évoluent, après quelques oscillations vers la courbe de quasi-équilibre. Ce comportement est d'ailleurs propre aux vortex non uniformes, car dans la théorie des fluides parfaits, des patches de vorticité oscilleraient indéfiniment [2, 8].

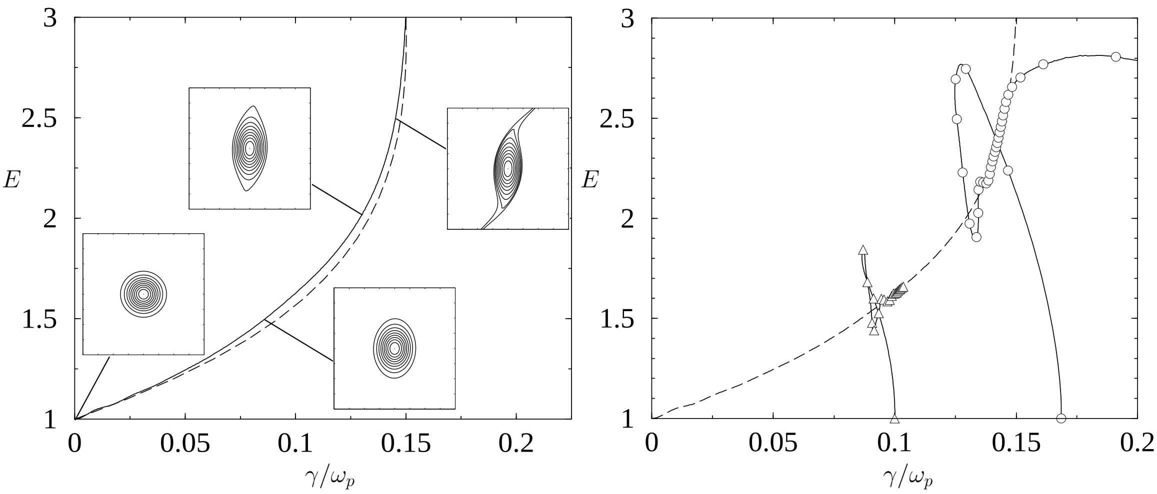

FIG. 3 – (a) Ellipticité du monopôle en fonction de γ/ω_p déterminée par DNS (trait plein) ou par le patch elliptique équivalent (trait discontinu). (b) Trajectoire dans ce même plan de paramètres pour deux évolutions temporelles issues de conditions initiales axisymétriques ($\omega_p = 1$ à $t = 0$), correspondant à deux valeurs différentes de γ imposées constantes ($\triangle$: $\gamma = 0.1$; $\circ$: $\gamma = 0.17$). On observe que les trajectoires qui partent de l'état axisymétrique $E = 1$ rejoignent la courbe de quasi-équilibre (traits discontinus), et qu'elles la suivent jusqu'à filamentation (à droite sur le graphe).

3.2 Application à la dynamique du dipôle 2D

Le patch équivalent s'applique très bien au cas du dipôle en évolution libre. On sait d'une part que la vitesse maximale d'un dipôle constitué de deux vortex de circulation $\pm\Gamma$ dont les centroïdes sont espacés d'une distance b est obtenue pour des vortex ponctuels, $v = \Gamma/(2\pi b)$. Cette solution des équations d'Euler est une translation rectiligne uniforme du dipôle. En présence de viscosité, les cœurs des vortex croissent en taille, en même temps qu'ils s'elliptisent sous l'effet des champs de déformation mutuels (qu'ils induisent l'un sur l'autre). Cette elliptisation est le premier facteur qui diminue la vitesse du dipôle, avant que les vortex ne viennent en contact et que la circulation des vortex ne commence à décliner significativement. De manière concommitante, une queue de vorticité commence à se former à l'aval du dipôle. Elle n'a a priori aucun rôle dynamique, mais elle complique la détermination des propriétés géométriques des vortex du dipôle. Il convient alors en pratique de supprimer la vorticité située à l'extérieur d'une bande pour ne conserver que la tête du

[1] On ne parle pas ici de la filamentation due à l'érosion du vortex par la viscosité, *a priori* plus faible.

dipôle.

On peut tester la procédure en utilisant les relations (4) et (5). On y injecte numériquement $L = b(t)$ l'espacement entre les vortex, $\Gamma_p = \Gamma(t)$ leur circulation, ainsi que $r_y = 2a_y(t)$ et $r_z = 2a_z(t)$ leur taille, toutes ces variables étant obtenues par la simulation numérique directe (DNS). On peut alors vérifier sur la figure 4 que cette méthode permet de retrouver, de manière semi-analytique, la vitesse du dipôle et le taux de déformation mutuel des deux vortex, en incluant l'effet de leur elliptisation.

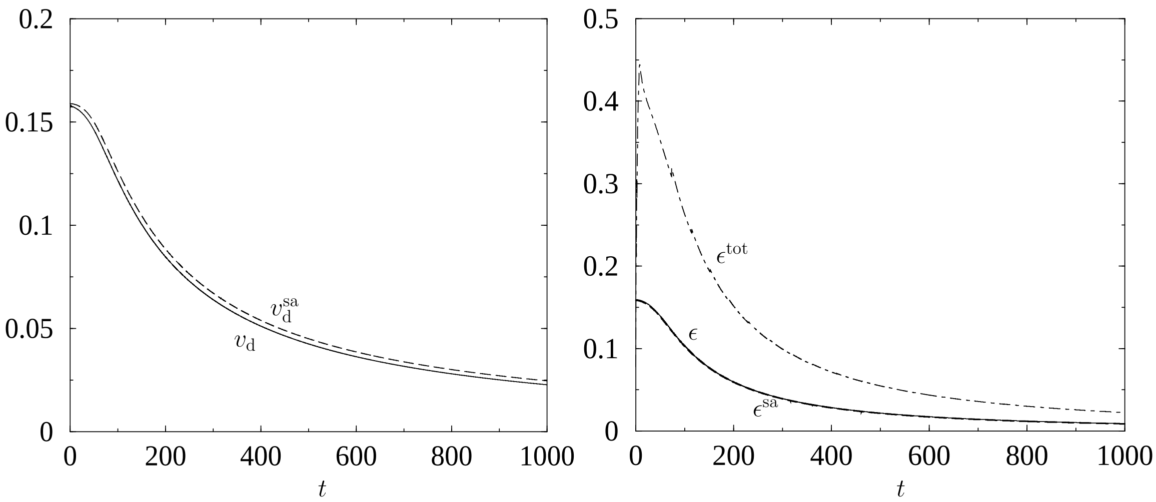

FIG. 4 – (a) Comparaison entre vitesse v_d du dipôle visqueux déterminée par DNS (traits pleins) et vitesse semi-analytique v_d^sa (traits discontinus) obtenue à partir de (4) avec $L = b(t)$ espacement entre les vortex et $\Gamma_p = \Gamma(t)$ circulation, deux grandeurs obtenues par la DNS. (b) : idem pour le taux de déformation ϵ induit sur le vortex compagnon (les deux courbes sont quasiment indiscernables). Est également représenté le taux de déformation total ε^tot (induit + autoinduit), nettement supérieur.

Sortant maintenant du cadre semi-analytique, il est possible de dériver, pour le dipôle, une relation entre E et a/b. En effet, l'ellipticité de chacun des vortex est due au champ de déformation mutuel, imposé par l'autre vortex. On suppose que ce champ est uniforme, d'intensité $\gamma = \epsilon^\mathrm{ind}(L = b(t))$ donnée par (5). D'autre part, on utilise la correspondance :

$$\omega_p = \frac{\Gamma}{4\pi a_y a_z} \, .$$

La loi de Moore & Saffman (3) pour le patch équivalent, si l'on utilise les relations

$$a_y = \frac{a}{\sqrt{1+E^2}} \, , \quad a_z = \frac{aE}{\sqrt{1+E^2}} \, ,$$

s'écrit

$$\frac{E-1}{E+1} = \frac{4\pi a^2 \gamma}{\Gamma} \, .$$

Spécifiant maintenant γ en introduisant (5) dans cette dernière équation, avec $\gamma = \varepsilon^\mathrm{ind}(b)$, on obtient une relation théorique approchée entre E et a/b :

$$\frac{E-1}{E+1}\left(1+\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}\frac{E^2-1}{E^2+1}}\right)\sqrt{1+\frac{4a^2}{b^2}\frac{E^2-1}{E^2+1}} = \frac{4a^2}{b^2} \, , \tag{7}$$

qui est une sorte d'équation d'état que vérifie le dipôle tout au long de son évolution. L'existence d'une relation de cette nature avait déjà été postulée [9], nous en donnons ici une forme analytique. La figure 5 montre que l'évolution lors d'une DNS suit de manière assez proche cette loi théorique (en traits discontinus).

4 Conclusion

Moore et Saffman ont démontré une relation entre l'ellipticité d'un vortex et le champ extérieur de déformation plan valable pour une distribution de vorticité uniforme. On montre ici par des approches théoriques et numériques directes comment cette loi peut être également utilisée, quoique de manière approchée, dans le cas de

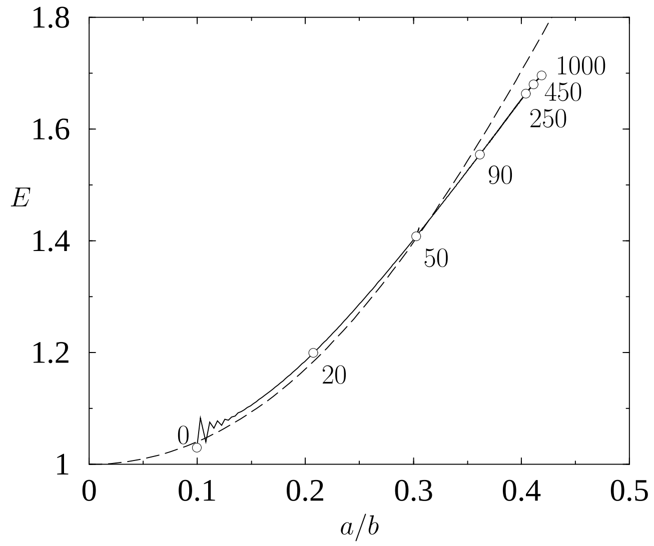

FIG. 5 – L'évolution de E en fonction de a/b pour un dipôle visqueux par DNS (traits pleins, dates indiquées le long de la courbe) suit approximativement la loi théorique (equation (7), traits discontinus).

vortex non uniformes : dans le cas des monopôles, nous trouvons que ces états de quasi-équilibre entre vorticité et déformation sont attractifs pour la dynamique d'un vortex dans un champ extérieur imposé ; dans le cas des dipôles, cette approche permet de dériver une formule semi-empirique pour la vitesse de translation, ainsi qu'une "loi d'état" liant l'ellipticité des deux vortex et le rapport taille du coeur/séparation, valable pour tout dipôle.

Les simulations numériques directes de cette étude ont été pour la plupart effectuées sur un supercalculateur NEC-SX8 à l'IDRIS–CNRS, dans le cadre du projet CP2–0137. Ce travail a été en partie financé par le projet ANR no. 06-BLAN-0363-01 "HiSpeedPIV".

Références

[1] Dritschel D. A general theory for two-dimensional vortex interactions. J. Fluid Mech., 293, 269–303, 1995.

[2] Kida S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow. Journal of the Physical Society of Japan, 50(10), 3517–3520, 1981.

[3] Neu J. The dynamics of a columnar vortex in an imposed strain. Phys. Fluids, 27(10), 2397–2402, 1984.

[4] Saffman P. Vortex Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] Moffatt H., Kida S., and Okhitani K. Stretched vortices — the sinews of turbulence ; large-reynolds-number asymptotics. J. Fluid Mech., 259, 241–264, 1994.

[6] Delbende I. and Rossi M. The evolution of a viscous vortex dipole. submitted to Phys. Fluids, 2009.

[7] Mariotti A., Legras B., and Dritschel D. Vortex stripping and the erosion of coherent structures in two-dimensional flows. Phys. Fluids, 6(12), 3954–3962, 1994.

[8] Le Dizès A. and Verga A. Viscous interactions of two co-rotating vortices before merging. J. Fluid Mech., 467, 389–410, 2002.

[9] Sipp D., Jacquin L., and Cossu C. Self-adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles. Phys. Fluids, 12(2), 245–248, 2000.