

Déclenchement de la convection Rayleigh Bénard dans l'He³ au voisinage du point critique

O. DAUBE^a, M. BOUAFIA^a, R. BONNEFOI^b, P. CARLES^b

a) LMEE, Université d'Evry Val d'Essonne, 40 rue du Pelvoux, CE1455 Courcouronnes, 91020 Evry Cedex

b) FAST, Université Paris 6 / CNRS, Bat 502, Campus d'Orsay, 91400 Orsay

Résumé

On s'intéresse dans ce travail aux différents scénarii de transition à la convection pour un écoulement 2D de Rayleigh Bénard dans l'He³ au voisinage de son point critique. Il s'agit d'une approche théorique de stabilité linéaire portant sur les équations complètes de Navier Stokes complétée par une simulation numérique directe utilisant une approximation de type anélastique des équations de Navier-Stokes et une loi d'état paramétrique. Quatre scénarii de transition et la structuration spatiale des modes d'instabilité correspondants sont déterminés.

Abstract

In this paper the onset of convection in a Rayleigh Benard configuration for near critical He³ is studied by means of combined theoretical and numerical approaches. The numerical simulation is based upon an anelastic approximation of the Navier Stokes equations and a parametric equation of state is used. Four different scenarios and the corresponding flow patterns are evidenced in terms of the distance to the critical point and of the heat flux imposed on the lower plate.

Mots clés : Rayleigh Bénard, point critique, stabilité linéaire, simulation numérique directe

1. Introduction

L'étude de la stabilité hydrodynamique des fluides supercritiques en configuration de Rayleigh Bénard a fait l'objet d'un nombre important de travaux ces dernières années, tant expérimentaux [1-3] que théoriques ou numériques [4-11]. En particulier, un critère basé un nombre de Rayleigh modifié incluant la différence entre le gradient réel et le gradient adiabatique a été proposé par [6] puis précisé dans [7] afin de tenir compte de la stratification en densité que subissent les fluides supercritiques sous l'effet de leur propre poids.

Dans ce travail, on étudie le démarrage de la convection dans une cellule contenant du He³ à une température très légèrement supérieure à sa température critique. Le fluide initialement au repos est confiné entre deux plaques horizontales et la paroi inférieure est chauffée à flux constant q tandis que la paroi supérieure est maintenue à la température initiale. Le chauffage de la paroi inférieure induit le long de celle-ci une couche limite chaude qui en conjonction avec la très forte compressibilité du fluide provoque par effet piston [3,9] l'augmentation rapide et homogène de la température du cœur de la cavité et la formation d'une couche limite froide le long de la paroi supérieure. Ces deux couches limites peuvent devenir instables lorsque leurs épaisseurs sont telles que le critère de stabilité n'est plus respecté. Dans [10] El Khouri et Carles ont développé une approche théorique basée sur une analyse asymptotique des équations de Navier Stokes couplées à une loi d'état générale. Ils ont en déduit les équations de dispersion qui gouvernent la stabilité du

système ainsi que la forme des modes propres les plus instables. Ces calculs ont permis d'identifier quatre scénarii possibles de transition vers l'instabilité.

Dans cette communication, nous présentons les résultats d'une étude de stabilité faisant varier le flux de chaleur q et la température réduite $\varepsilon = (T-T_c)/T_c$ où T_c est la température critique. Cette étude, qui permet une première cartographie de l'instabilité en régime linéaire, est ensuite exploitée pour réaliser des simulations numériques des équations de Navier Stokes non linéaires ciblées dans des gammes paramétriques pertinentes. Ces simulations sont basées sur une approximation de type anélastique combinée à une loi d'état paramétrique reproduisant les exposants critiques réels (par opposition aux modèles de champ moyen de type van der Waals). La structuration de l'écoulement ainsi obtenue au démarrage de la convection est en bonne concordance avec les résultats issus de la théorie de stabilité linéaire [10]. Ces simulations permettent en outre de préciser le moment du démarrage de la convection.

2. Configuration

Suivant les études expérimentales de [1,2] une couche d' He^3 d'épaisseur H (1,06mm) est confinée entre deux plaques de cuivre (figure 1). Elle est initialement au repos et aux conditions suivantes proches de celles du point critique caractérisé par $(\rho_c, p_c, T_c) = (41.45\text{kg/m}^3, 1.15 \cdot 10^5\text{Pa}, 3.31\text{K})$.

- Il règne dans la cavité une température T_i homogène légèrement supérieure à la température critique T_c . La distance à T_c est caractérisée par $\varepsilon=(T_i-T_c)/T_c$
- Il existe une stratification initiale en ρ avec la masse volumique moyenne égale à la masse volumique critique ρ_c .

La paroi inférieure est chauffée à flux constant q au-delà du seuil de stabilité, tandis que la paroi supérieure est maintenue à la température initiale T_i . On considère des valeurs de q telles que $(T - T_i)/(T_i - T_c)$ reste toujours $\ll 1$ dans la cavité, ce qui permet de supposer que les différents coefficients thermophysiques (viscosité dynamique μ , conductivité thermique k , chaleurs spécifiques c_p et c_v) restent constants dans l'intervalle de température considéré et égaux à leur valeur pour $T=T_i$.

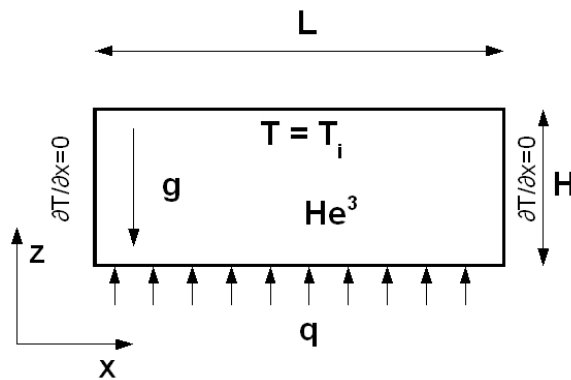


Figure 1 : He^3 supercritique en configuration de Rayleigh -Bénard

3. Equations générales

Pour les valeurs de ε considérées, les hypothèses de milieu continu s'appliquent et l'écoulement est régi par les équations de Navier Stokes compressibles adimensionnées par les grandeurs de référence suivantes, l'indice c indiquant que la grandeur est prise aux conditions du point critique:

- Longueur $L_0 = H$ épaisseur de la couche fluide ;
- Pression: $P_0 = p_c$; Densité: $\rho_0 = \rho_c$; Température: $T_0 = T_c$
- Temps $t_0 =$ temps caractéristique de l'effet piston t_{ep} , $t_{ep} = t_D/(\gamma-1)^2$ avec $t_D = \rho_0 H^2 c_p/k$
- Vitesse: $V_0 = L_0/t_0$

Cet adimensionnement fait apparaître les paramètres adimensionnels suivant :

$$Re = \frac{\rho_c V_0 L_0}{\mu} \text{ nombre de Reynolds}; \quad Eu = \frac{P_c}{\rho_c V_0^2} \text{ nombre d'Euler}; \quad G_h = \frac{P_c}{\rho_c c_p T_c} = Eu Ek$$

$$Pe = \frac{\rho_c c_p V_0 L_0}{k} \text{ nombre de Péclet}; \quad F = \frac{V_0^2}{gL_0} \text{ nombre de Froude}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{Equation de continuité} \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -Eu \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} - \frac{1}{F} \rho \vec{z} \quad \text{Equation de la quantité de mouvement} \quad (2)$$

$$\rho \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + G_h \beta T_i \frac{Dp}{Dt} \quad \text{Equation de l'énergie} \quad (3)$$

$$p = f(\rho, T) \quad \text{Equation d'état} \quad (4)$$

L'équation d'état (4) est une équation paramétrique comportant une partie régulière universelle et une partie singulière dépendant du fluide, dont les coefficients ont été calculés de façon à correspondre aux résultats expérimentaux [13]. L'avantage essentiel de cette loi est qu'elle prédit les exposants critiques corrects (à contrario du modèle de van der Waals par exemple).

4. Etude de stabilité

On ne donnera ici que les grandes lignes de l'étude théorique de la stabilité des couches limites thermiques se formant sur les parois horizontales qui a été décrite dans [10]. Pour chaque instant t on calcule d'abord un état de base de type effet piston tenant compte de la stratification initiale et du comportement des coefficients thermophysiques quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En réalisant un développement asymptotique multi-échelles sur le temps, on peut alors déterminer les fenêtres temporelles pour lesquelles les perturbations $(u_1(x,z,t), v_1(x,z,t), w_1(x,z,t), p_1(x,z,t), T_1(x,z,t))$ se développent sur un temps beaucoup plus court que le temps d'évolution de l'état de base. Elles sont alors décomposées en modes orthogonaux. Une méthode semi-analytique permet ensuite d'établir l'équation de dispersion qui dépend donc de l'instant considéré après le début du chauffage.

5. Méthodologie numérique

Afin d'éviter des critères de stabilité numérique très restrictifs dus à la très grande disparité entre la vitesse convective et la vitesse du son, on filtre les ondes acoustiques en effectuant un développement en perturbation régulière de toute grandeur f par rapport au petit paramètre $\eta=1/Eu$: $f = f^{(0)} + \eta f^{(1)} + \dots$ Dans ces conditions, le problème d'ordre (0) s'écrit : $\nabla p^{(0)} + 1/(EuF) \rho^{(0)} = 0$ avec $1/(EuF) = \rho_c g L_0 / p_c$

La quantité $1/EuF$ qui caractérise la stratification initiale est petite mais fixe car indépendante de la distance au point critique et du flux de chaleur imposé q . En suivant les hypothèses classiques des approximations de type **anelastique**, on obtient pour le problème d'ordre (0) la relation suivante :

$$p^{(0)} = \bar{P}(t) + p_s(z) \text{ où } p_s \text{ satisfait : } \frac{dp_s}{dz} + \frac{1}{EuF} \rho^{(0)}(z) = 0 \quad (5)$$

On notera $(p_{s(z)}, \rho_s(z) = \rho^{(0)}(z))$ la stratification initiale. Bien que faible, cette stratification est indispensable pour retrouver le critère de Rayleigh-Schwarzchild d'apparition de la convection (voir [11]). Le modèle utilisé qui fait intervenir une fonction π jouant le même rôle que la pression en incompressible s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \vec{V}) = 0 \quad \text{Equation de continuité} \quad (6)$$

$$\rho_s \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \pi + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} + \frac{\rho_s - \rho}{F} \vec{z} \quad \text{Equation de la quantité de mouvement} \quad (7)$$

$$\rho_s \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T + G_h \beta T_i \left(\frac{d\bar{P}}{dt} + \vec{V} \cdot \nabla p_s \right) \quad \text{Equation de l'énergie} \quad (8)$$

$$\bar{P}(t) + p_s(z) = f(\rho, T) \quad \text{Equation d'état} \quad (9)$$

On notera que ce modèle diffère légèrement de celui proposé par Acarry *et al* [11] puisqu'il est issu d'une approximation de type anélastique ce qui se traduit en particulier par l'utilisation de ρ_s au lieu de ρ à l'exception du terme $\partial \rho / \partial t$ et du terme de poussée d'Archimède.

Les équations sont discrétisées spatialement par différences finies mimétiques (voir [12]) centrées d'ordre 2 sur un maillage décalé de type MAC, uniforme dans la direction x et variable en z . Le schéma temporel est du type Euler retardé d'ordre 2. Le couplage vitesse - π est traité par une méthode dérivée des méthodes de projection en incompressible. A chaque pas de temps les nouvelles valeurs $\rho^{(n+1)}$ et $\bar{P}^{(n+1)}$ sont obtenues en résolvant par une méthode de Newton Raphston le système d'équations non linéaires constitué de la loi d'état écrite en chacun des points du maillage et en imposant la conservation de la masse totale.

6. Résultats

6.1 Analyse de stabilité

L'analyse de stabilité linéaire présentée en 4 permet de prédire que la convection au voisinage du point critique peut démarrer selon quatre scénarii. Ces quatre modes sont décrits dans [10] et rappelés dans la figure 1. Chacun de ces modes induit une morphologie d'écoulement que l'on peut reconstruire théoriquement. La figure 2 en présente un exemple de champs d'isothermes.

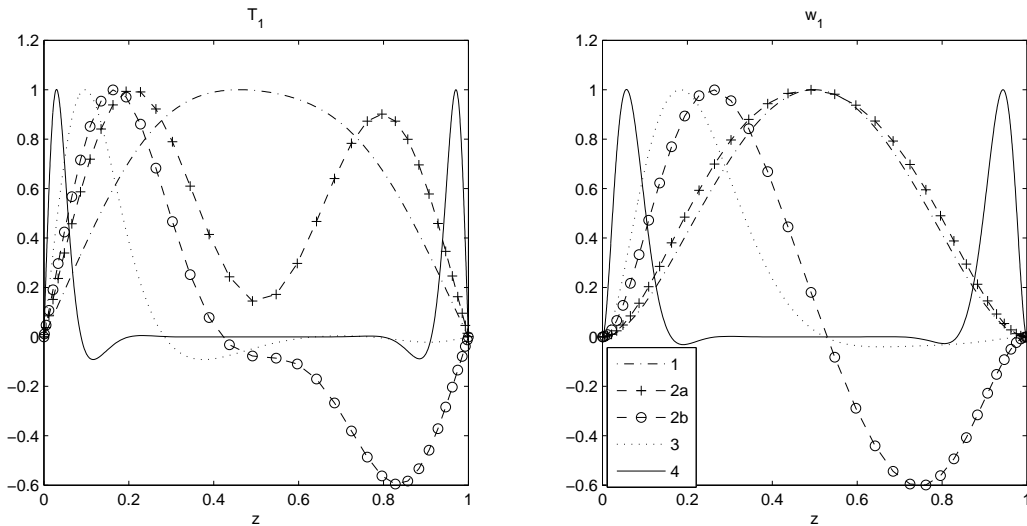


Figure 1 : Morphologie des modes propres instables en température et en vitesse.

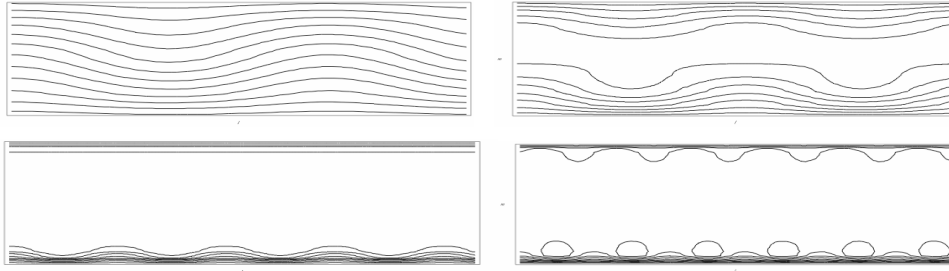


Figure 2 : Champ d'isothermes pour les 4 scenarii de démarrage de la convection. 1 : Mode global en rouleau ; 2 : Double couche limite instables en phase ou en opposition de phase (2a ou 2b) ; 3 : Couche limite basse instable seule ; 4 : Couche limite basse et couche limite haute instables toutes deux mais de façon décorrélée.

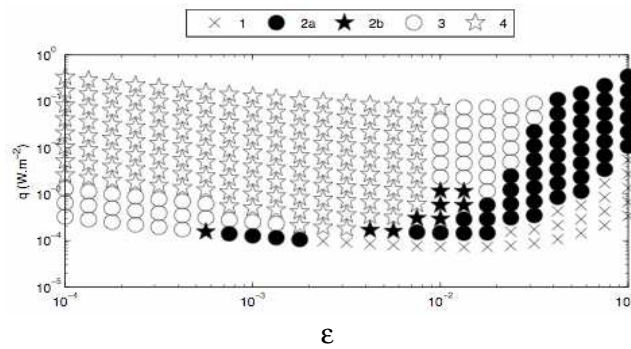


Figure 3 : domaines d'apparition des scénarii en fonction des deux paramètres de contrôle q et ϵ .

Sur la figure 3, on a caractérisé les domaines d'apparition des 4 scénarii en fonction des deux paramètres de contrôle du problème (q et ϵ), à la suite d'une étude paramétrique systématique (qui serait infiniment trop coûteuse en temps de calcul si on tentait de la conduire numériquement).

6.2 Simulations numériques

Tous les calculs présentés ici ont été réalisés dans les conditions suivantes : rapport de forme de la cavité $A=L/H = 2$, maillage de 128 points non uniforme en tangente hyperbolique dans la direction z , maillage *uniforme* de 385 points dans la direction x , conditions aux limites adiabatiques en $x=0$ et $x=A$, le pas de temps Δt vaut 1/10 ou 1/20 du temps caractéristique t_0 de l'effet piston. Les chauffages choisis correspondent à ceux des expériences rapportées dans [1] et [2] . La proximité au point critique ϵ varie de $5 \cdot 10^{-4}$ à $2 \cdot 10^{-2}$. Dans cet intervalle le temps caractéristique de l'effet piston, t_{ep} , varie de $2 \cdot 10^{-3}$ s à $1.8 \cdot 10^{-1}$ s, le nombre de Reynolds, Re , de 10146 à 152 , le nombre de Péclet, Pe , de $8 \cdot 10^6$ à $3 \cdot 10^3$, le nombre d'Euler, Eu , de 10^4 à $8 \cdot 10^7$.

Pour un couple (ϵ, q) on effectue un calcul à gravité zéro dans lequel seul l'effet piston apparaît et un autre calcul avec gravité terrestre. On calcule ensuite à différents instants au voisinage de l'apparition de la convection la différence entre les profils de température $T_{g=1}(z)$ et $T_{g=0}(z)$ au centre de la cavité. On obtient ainsi une approximation des modes déterminés par l'analyse théorique.

Sur la figure 4-f on a reporté l'évolution temporelle de la différence de température ΔT entre les plaques horizontales pour le cas à gravité nulle ($g=0$) et le cas avec la gravité terrestre ($g=1$). On remarque que les deux courbes se séparent de façon visible à partir de $t=17$ s. On a également reporté l'évolution temporelle de l'énergie cinétique globale pour ($g=0$) et pour ($g=1$). On remarque les deux courbes se séparent à environ $t=12$ s, qui correspond au déclenchement réel de la convection.

Sur les figures 4-a à 4-e, on a reporté les « *modes d'instabilités* » trouvés numériquement. On retrouve les différents scénarii mis en évidence dans l'analyse théorique : scénario 1 pour 4-a, 3 pour 4-b et 4-c, 2a pour 4-d, 4 pour 4-e.

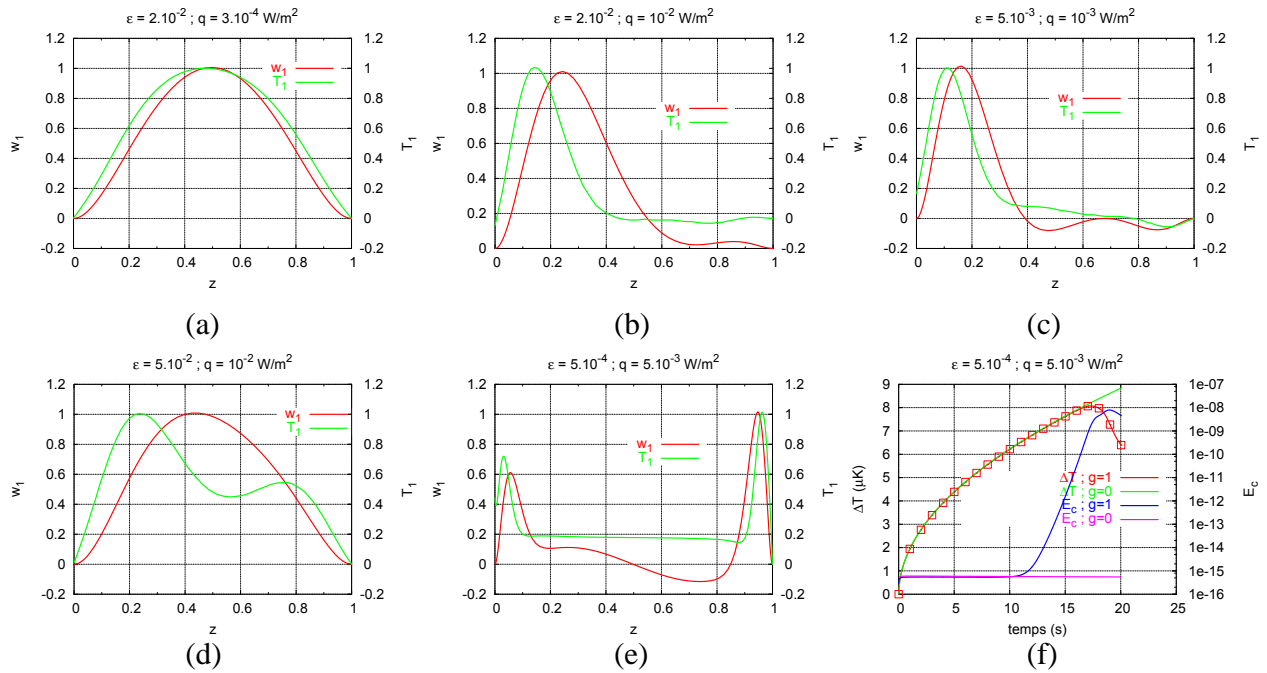


Figure 4 : (a)-(e) : Modes d'instabilité calculés numériquement ; (f) Evolution temporelle de l'énergie cinétique

7 Conclusion

La conjonction d'une approche analytique et d'une série de simulation numériques a permis de confirmer le démarrage de la convection selon 4 scénarii. L'approche analytique permet une exploration paramétrique rapide et systématique du problème de l'amorçage de la convection. Elle sert ensuite de guide pour le calcul numérique, en identifiant les jeux de paramètres physiquement pertinent qui peuvent ensuite être explorés dans le régime fortement non linéaire grâce à la simulation.

Remerciements : Les calculs numériques ont été effectués sur la NEC SX8 de l'IDRIS, grâce à une allocation sur le projet 1102.

Références:

- [1] A.Furukawa *et al*, Phys. Rev. E, **68**, 2003, 056309
- [2] H. Meyer, A. Kogan, Phys. Rev. E, 66 (2002), 056310
- [3] A. Onuki, H. Hao and R.A. Ferrel, Phys.Rev., A41, 1990, 2256-2259
- [4] S. Amiroudine, B. Zappoli, C. R. Mecanique, **332**, 2004, 345-351
- [5] V.I. Polezhaev, E.B. Soboleva, Fluid Dynamics, Vol.442, 2005, 209-220
- [6] M. Gitterman, V.A. Steinberg, High temperature, 1971, p.754
- [7] P. Carlès, B. Ugurtas, Physica D, 126, 1999, 69-82
- [8] P. Carlès, Physica D, 147, 2000, 36-58
- [9] B. Zappoli, S. Amiroudine, P. Carlès and J. Ouazzani, J.Fl.Mech., 1996, **316**, 53-72
- [10] L. El Khouri, P. Carlès, Phys. Rev.. E, 2002, vol. 66 (2), n°6, pp. 066309.1-066309.4
- [11] G. Accary, I. Raspo, Comp. & Fluids, **35**(10), 1316
- [12] J.M. Hyman, M. Shashkov, Int. J. of Computers & Maths with applic., Vol. 33 , 4, 199
- [13] J. Rudnick, M. Barmatz, F. Zhong, Physica B, 329-333, (2003), 110-11