

Instabilités rayonnantes tri-dimensionnelles d'un jet plan stratifié

J. CANDELIER^{1,2}, C. MILLET¹ ET S. LE DIZÈS²

¹ CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France

² IRPHÉ, CNRS, BP 146, F-13384 Marseille cedex 13, France

E-mail : julien.candelier@cea.fr

Résumé :

La stabilité tri-dimensionnelle d'un jet plan de Bickley est étudiée sous l'hypothèse de Boussinesq en faisant varier l'angle formé par le plan de cisaillement et la stratification. Nous analysons dans quelle mesure le mode de Kelvin-Helmholtz peut avoir une structure rayonnante et plus généralement comment des ondes internes (ou ondes de gravité) associées à des modes rayonnants instables, peuvent être générées spontanément.

Abstract :

The three-dimensional stability of a two-dimensional plane Bickley jet is studied under the Boussinesq approximation when the angle between the basic flow and the vertical direction of stratification is varied. We analyse under which conditions the Kelvin-Helmholtz mode exhibits an oscillating structure and more generally, how internal gravity waves can be spontaneously generated by the jet.

Mots clefs : Ondes de Gravité, Jet de Bickley, Instabilités

1 Introduction

Les sources d'ondes internes peuvent être multiples (voir Fritts *et al.* (1)) et l'instabilité de cisaillement (ou de Kelvin-Helmholtz) en fait partie. Les études de stabilité d'une couche cisailée dans un fluide stratifié stable se sont souvent limitées aux cas où l'écoulement moyen est uniforme dans un plan horizontal mais varie avec l'altitude (voir Miles (2) et Howard (3)). Deloncle *et al.* (4) ont récemment étudié la stabilité 3D d'un jet de Bickley dont le plan de cisaillement est horizontal mais ils ne se sont intéressés qu'au mode de Kelvin-Helmholtz.

Un lien entre les deux types d'étude va être obtenu en considérant un jet plan de Bickley dont le plan de cisaillement possède une orientation arbitraire par rapport à la direction de stratification. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux propriétés de stabilité des modes rayonnants, c'est à dire à ceux possédant une structure transverse oscillante à l'infini. De tels modes ont déjà été mentionnés par Satomura (5) dans un modèle en eau peu profonde. Ils sont également semblables aux « modes acoustiques » décrits par Tam and Hu (6; 7) que l'on trouve dans les jets supersoniques.

2 Formulation du problème

En l'absence de perturbation, le fluide est stratifié avec une fréquence de Brunt-Väisälä $N = \sqrt{-g/\rho_0 \cdot d\bar{\rho}/dz^*}$ constante, avec z^* vertical ascendant, ρ_0 une densité de référence constante et $\bar{\rho}$ la densité moyenne, et possède une vitesse \mathbf{U} . On considère comme écoulement un jet de Bickley plan

$$\mathbf{U} = U(z)\mathbf{e}_x = \frac{1}{\cosh^2(z)}\mathbf{e}_x, \quad (1)$$

tel que le plan de cisaillement x - z forme un angle θ avec la verticale (voir figure 1(a)). Toutes les variables sont adimensionnées en utilisant la vitesse maximale, la largeur du jet et la densité de référence. Le nombre de Froude est ainsi défini par $Fr = 1/N$. Les propriétés de stabilité sont obtenues en considérant les perturbations linéaires de vitesse $\mathbf{u} = (u, v, w)$, de pression p et de densité ρ , de la forme :

$$\tilde{f}(x, y, z, t) = f(z) \exp(i\omega t - ik_x x - ik_y y). \quad (2)$$

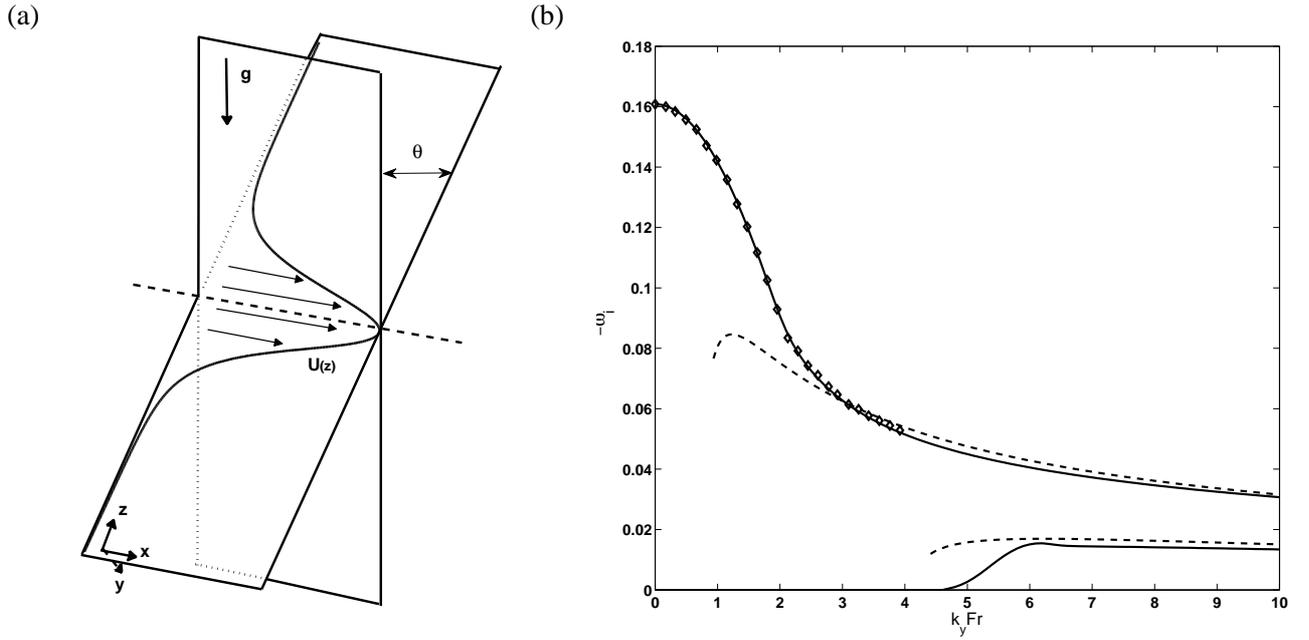


FIG. 1: (a) Écoulement de base : définition de l'angle θ (b) Taux de croissance temporel du mode de Kelvin-Helmholtz et du premier mode rayonnant pour $k_x = 0.9021$ et $\theta = \pi/2$. — : résultats numériques ; - - - : analyse WKB pour $k_y Fr \gg 1$; \diamond : résultats de Deloncle *et al.* (4).

Dans le cadre des hypothèses non-visqueuse et de Boussinesq, les équations linéarisées pour la perturbation deviennent :

$$(\omega - k_x U)u - i \frac{dU}{dz} w = k_x p, \quad (3a)$$

$$(\omega - k_x U)v + i \sin(\theta) N^2 \rho = k_y p, \quad (3b)$$

$$(\omega - k_x U)w - i \cos(\theta) N^2 \rho = i \frac{dp}{dz}, \quad (3c)$$

$$(\omega - k_x U)\rho - i \sin(\theta)v + i \cos(\theta)w = 0, \quad (3d)$$

$$ik_x u + ik_y v - \frac{dw}{dz} = 0. \quad (3e)$$

Les équations (3) sont mises sous la forme $\mathbf{A}f = \omega \mathbf{B}f$ où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont les opérateurs discrétisés. Le problème aux valeurs propres généralisé en ω est alors résolu par une méthode de collocation spectrale ; la partie imaginaire de ω , notée ω_i , représentant l'opposé du taux de croissance temporel. Un contour d'intégration dans le plan complexe est utilisé afin d'appliquer correctement la condition de rayonnement à l'infini (voir Riedinger *et al.* (8)). Des conditions de parité sont également appliquées au centre du jet afin de sélectionner les modes sinueux (impair en pression) et variqueux (pair en pression). Dans la suite, seuls les modes sinueux seront considérés.

3 Résultats

3.1 Cisaillement vertical

Pour le cisaillement vertical, *i.e.* quand $\theta = 0$, Miles (2) et Howard (3) ont trouvé une condition suffisante d'instabilité en terme de nombre de Richardson $Ri = \frac{N^2}{(dU/dz)^2}$: si $Ri < 1/4$ alors l'écoulement est instable. Dans le cas du jet de Bickley, le nombre de Richardson est minimal au point d'inflexion z_i où on a $\frac{dU}{dz}|_{z_i} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$. Ainsi, la condition d'instabilité s'écrit donc : $Fr > \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Comme on peut le voir sur la figure 3, cette condition est vérifiée, mais elle n'a de sens que pour $\theta = 0$. En effet, dès que l'angle θ est différent de zéro, l'écoulement est instable quel que soit le nombre de Richardson.

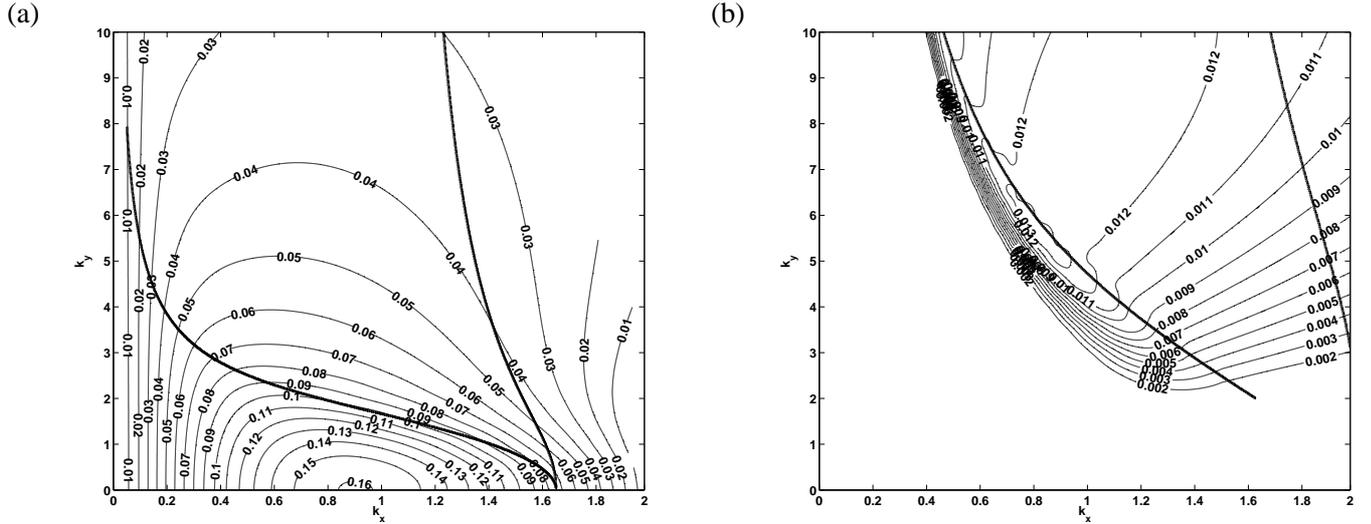


FIG. 2: Taux de croissance temporel (a) du mode de Kelvin-Helmholtz ($n = 0$) et (b) du premier mode rayonnant ($n = 1$) pour $\theta = \pi/2$ et $Fr = 1$ dans le plan k_x - k_y . Le mode présente une structure rayonnante entre les lignes épaisses définies par les inégalités (5).

3.2 Cisaillement horizontal

Le cas où le cisaillement est orthogonal à la stratification correspond à l'angle $\theta = \pi/2$ et a été traité par Deloncle *et al.* (4). Le taux de croissance temporel maximal du mode de Kelvin-Helmholtz correspond à une perturbation bi-dimensionnelle pour $k_x = 0.9021$; il est tracé en fonction du nombre d'onde normalisé $k_y Fr$ sur la figure 1(b). Les résultats sont en accord avec ceux de Deloncle et al. mais d'autres modes amplifiés, appelés par la suite modes rayonnants, peuvent être obtenus grâce à l'intégration dans le plan complexe.

Dans le contexte des tourbillons stratifiés, Le Dizès & Billant (9) ont montré qu'une bonne description des modes amplifiés pouvait être obtenue en effectuant une analyse WKBJ (voir Bender & Orszag (10)) dans la limite $k_y Fr \gg 1$. Une telle analyse conduit ici à la relation de dispersion suivante pour les modes sinues :

$$k_y Fr \int_0^{z_c} \sqrt{\frac{(\omega - k_x U)^2}{1 - Fr^2 (\omega - k_x U)^2}} dz = n\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{i}{4} \ln 2, \quad (4)$$

où n est un entier et $z_c = \text{arcosh}(\sqrt{k_x/\omega})$. Le taux de croissance obtenu à partir de cette relation a été tracé sur la figure 1(b) pour $n = 0$ and $n = 1$. Le bon accord avec les résultats numériques pour $k_y Fr > 5$ montre que l'analyse capture l'essentiel du mécanisme physique de l'instabilité. Ce résultat montre également que le mode de Kelvin-Helmholtz, qui correspond au mode $n = 0$ dans (4), est en réalité pour des grands k_y le premier mode d'une famille infinie de modes instables. Néanmoins, il se distingue des autres modes par son comportement instable pour des petits k_y .

Le comportement rayonnant des modes s'obtient en analysant les solutions des équations des perturbations (3) au voisinage de l'infini. On trouve que les modes rayonnent dans la direction z dès que la partie réelle de leur fréquence vérifie

$$\frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} < \omega_r Fr < 1. \quad (5)$$

Notez en particulier que la deuxième inégalité correspond à la valeur limite d'existence des ondes internes dans un milieu au repos $\omega < N$ (1). Ces conditions ont été appliquées aux deux premiers modes sur la figure 2. On peut ainsi remarquer que les deux types de modes rayonnent pour une large gamme de paramètres. En particulier, le mode $n = 1$ est quasiment toujours rayonnant. Dans les deux cas, on peut également souligner en comparant les figures 1(b) et 2 que le désaccord entre le numérique et l'analyse WKBJ est important uniquement lorsque le mode n'est plus rayonnant.

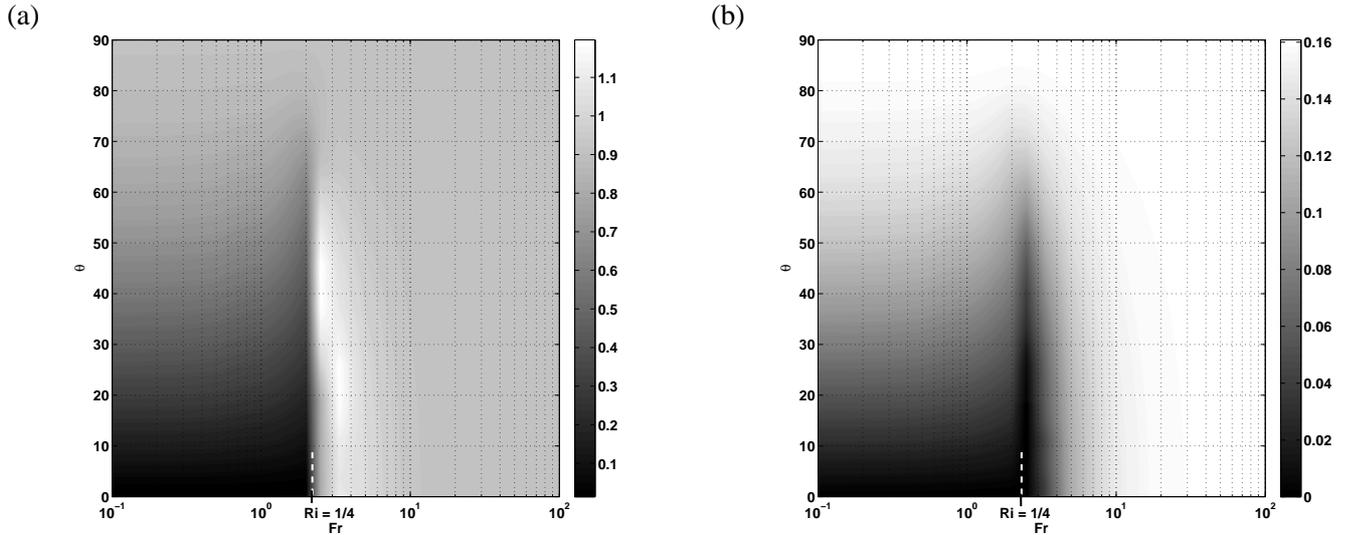


FIG. 3: Évolution du mode 2D ($k_y = 0$) le plus amplifié ((a) k_x et (b) $-w_i$) en fonction des paramètres θ et Fr .

3.3 Angle θ quelconque

Faire varier l'angle θ permet de voir comment sont reliées les situations précédemment décrites. Sur les figures 3, nous avons tracé le taux d'amplification maximal et la fréquence associée d'une perturbation 2D ($k_y = 0$) en fonction de l'angle et du nombre de Froude. Comme on l'a souligné précédemment, la valeur $1/4$ du nombre de Richardson est clairement visible, mais elle correspond à une limite de stabilité uniquement lorsque $\theta = 0$.

Sur la figure 4, nous avons tracé, dans le cas fortement stratifié ($Fr \ll 1$), les caractéristiques du mode de Kelvin-Helmholtz et du premier mode rayonnant en fonction du nombre d'onde normalisé $k_y Fr$ lorsque l'angle θ varie et pour la valeur de k_x correspondant au taux d'amplification maximal à $\theta = \pi/2$. On remarque que les modes sont moins instables et que leur fréquence augmente lorsque l'angle diminue. Le premier effet peut être relié à un effet stabilisant de la composante de stratification projetée dans le plan de cisaillement. L'autre effet visible est la disparition du caractère bi-dimensionnel du mode de Kelvin-Helmholtz (dès que $\theta \simeq \pi/8$, voir figure 4(b)). De plus, pour de petits angles, il est intéressant de remarquer que le taux d'amplification du mode de Kelvin-Helmholtz devient du même ordre de grandeur que celui du premier mode rayonnant.

4 Conclusion

Nous avons montré comment les propriétés de stabilité d'un jet plan de Bicklet variaient lorsque l'angle de la stratification vis-à-vis du plan de cisaillement était modifié. Ainsi, on a pu faire le lien entre les résultats obtenus dans les deux cas limites d'un cisaillement parallèle et d'un cisaillement perpendiculaire. Parmi les résultats intéressants, nous avons montré que le critère d'instabilité basé sur le nombre de Richardson ($Ri < 1/4$) n'était utile que pour le cas d'un cisaillement parfaitement parallèle à la stratification. Dès que cisaillement et stratification ne sont plus parallèles, nous avons démontré que le mode de Kelvin-Helmholtz était instable quel que soit le nombre de Richardson.

En utilisant une astuce numérique, nous avons également pu mettre en évidence la présence d'autres modes que celui de Kelvin-Helmholtz. Ces modes sont de type rayonnant car ils possèdent une structure transverse oscillante loin du jet. Ils ont un taux de croissance comparable à celui du mode de Kelvin-Helmholtz dans le cas fortement stratifié ($Fr \ll 1$) et lorsque cisaillement et stratification sont presque parallèles (faible θ). Nous avons aussi montré qu'ils pouvaient être décrits par une analyse WKBJ dans la limite des grands nombre d'onde transversaux.

Références

- [1] Fritts D. and Alexander M. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of Geophysics*, 41, 1, 2003.
- [2] Miles J. On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, 10, 496–508, 1961.
- [3] Howard L. Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.*, 10, 509–512, 1961.
- [4] Deloncle A., Chomaz J., and Billant P. Three-dimensional stability of a horizontally sheared flow in a stably stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 570, 297–305, 2007.

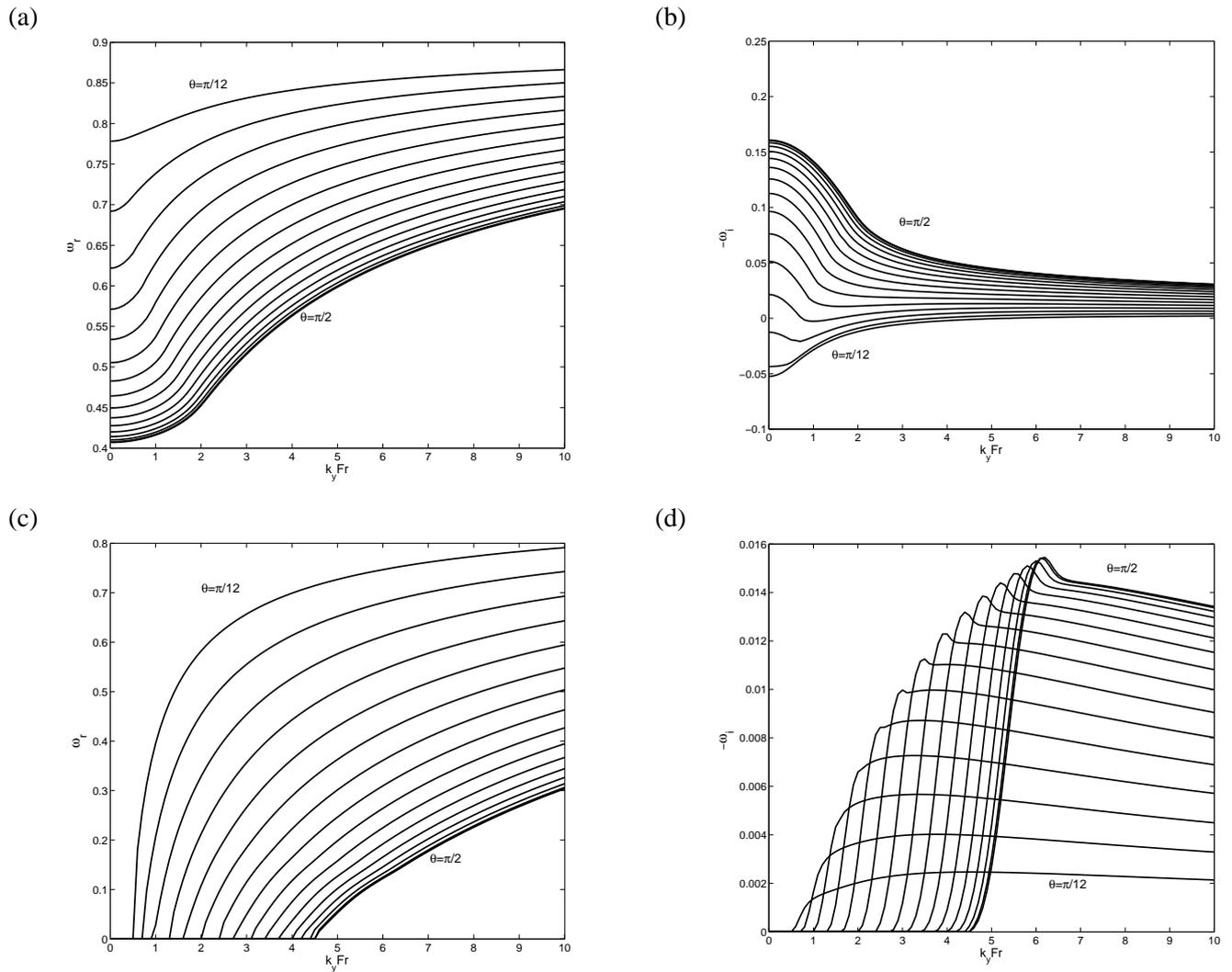


FIG. 4: Comportement du mode de Kelvin-Helmholtz ((a) et (b)) et du premier mode rayonnant ((c) et (d)) pour $k_x = 0.9021$, $Fr = 10^{-4}$ et θ de $\pi/2$ à $\pi/12$ par palier de $\pi/36$.

- [5] Satomura T. An investigation of shear instability in a shallow water. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 59, 1, 1980.
- [6] Tam C. and Hu F. On the three families of instability waves of high-speed jets. *J. Fluid Mech.*, 201, 447–483, 1989.
- [7] Tam C. and Hu F. The instability and acoustic wave modes of supersonic mixing layers inside a rectangular channel. *J. Fluid Mech.*, 203, 51–76, 1989.
- [8] Riedinger X., Le Dizès S., and Meunier P. Viscous stability properties of a lamb-oseen vortex in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* (submitted).
- [9] Le Dizès S. and Billant P. Radiative instability in stratified vortices. *Phys. Fluids*. (submitted).
- [10] Bender C. and Orszag S. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, 1978.