

Seuils de stabilité pour un écoulement engendré dans une cavité cylindrique avec surface libre et fond tournant

L KAHOUDJI^{a,b}, L MARTIN WITKOWSKI^{a,b}, P LE QUÉRÉ^a

a. Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI-CNRS), BP 133
91403 ORSAY Cedex

b. Université Pierre et Marie Curie (UPMC), 4 place Jussieu 75005 PARIS

Résumé :

Par une étude de stabilité linéaire nous nous proposons d'analyser un écoulement dans une cavité cylindrique fixe remplie de fluide, dont le fond tourne. Le rayon de la cavité est grand devant la hauteur de fluide. Ce travail s'inspire d'une étude expérimentale récente, réalisée à Marseille, (S. Poncet, M.P. Chauve, *J. Flow Visual Image Process.* vol 14 pp 85-105, 2007)[8] qui a mis en évidence une instabilité aux motifs particulièrement intéressants. La rotation et la présence d'une surface libre rendent difficile la simulation numérique car la déformation de cette dernière impose d'utiliser des codes de calculs permettant de prendre en compte des géométries complexes. Dans une première approche, nous avons utilisé une modélisation de la surface libre plane (conditions de symétrie) afin de comparer les résultats expérimentaux et notre étude de stabilité linéaire. Nous discuterons de la pertinence de cette modélisation c'est à dire de la nécessité de prendre en compte la déformation de la surface.

Abstract :

We perform a linear stability analysis of flow inside a cylinder tank in which the bottom rotates. The aspect ratio is such that the radius of the disk is larger than the fluid height. We were inspired by a recent experiment of (S. Poncet, M.P. Chauve, *J. Flow Visual Image Process.* vol 14 pp 85-105, 2007) in which they have shown an interesting instability patterns in rotating flow system. As the fluid rotates, the free surface is deformed which increases the computational difficulty. As a first approach, we consider a non deformable free surface (symmetry condition). We discuss the validity of this hypothesis by comparing our results to the experiments. Finally, we discuss the necessity to take into account the free surface deformation.

Mots clés : Écoulement tournant, Instabilité linéaire

1 Introduction

Les instabilités dans les écoulements tournants peuvent donner d'intrigants motifs. Pour les écoulements interdisques à très petit rapport de forme, les applications se trouvent dans l'informatique (disques durs), l'océanographie[2], les turbo-machines etc. Vu le large domaine d'applications, la littérature est bien fournie pour différentes configurations (Rotor-Stator, Contra-Rotation, ECDP¹ etc). Dans le cas des écoulements de type Contra-Rotation, L. Martin Witkowski *et al.* [5] ont trouvé, par une étude numérique et par un développement asymptotique, que les instabilités axi-symétriques sont d'origine centrifuge. Des travaux comme ceux de C. Nore *et al.* [7] ont montré numériquement et expérimentalement, dans la même configuration et pour différents rapports de forme, qu'il y a une compétition entre les instabilités du mode axi-symétrique et des instabilités de type 3D. Des motifs polygonaux ont été observés pour différents paramètres (géométrie des cavités, vitesses angulaires des disques, ...). Ces motifs sont formés d'un nombre fini m de vortex. Niino *et Misawa* [6] ont mis en évidence que m décroît quand le nombre de Reynolds augmente. Chomaz *et al.* [1] ont montré expérimentalement et numériquement que m dépend non seulement du nombre de Reynolds mais aussi du rapport de forme. Le mécanisme de cette instabilité est attribué à un cisaillement de type Kelvin Helmholtz. Notre étude est purement numérique et s'appuie sur des travaux expérimentaux de S. Poncet *et M.P. Chauve* [8] (voir le dispositif dans la figure 1a). Nous discuterons de la pertinence d'une modélisation où la surface libre reste plane. La première partie traite la formulation du problème en posant toutes les équations et les conditions aux limites de l'écoulement de base et de perturbation. Nous discuterons ensuite des résultats numériques tout en les comparant avec les expériences de S. Poncet *et M.P. Chauve* [8]. A la fin, nous concluons par la critique de nos hypothèses et des perspectives à envisager.

¹Enclosed Corotating Disk Pair

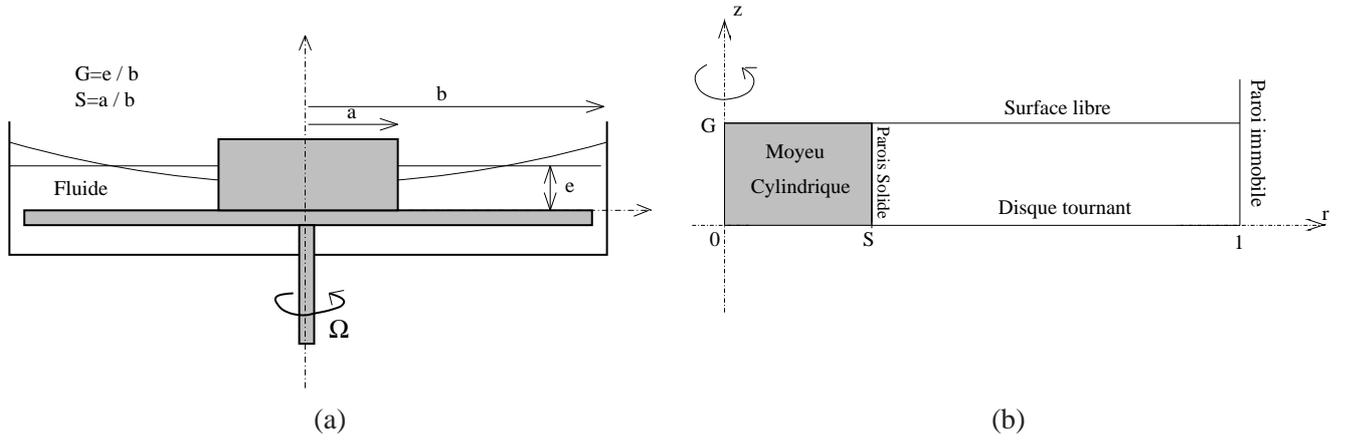


FIG. 1 – (a) : Dispositif expérimental réalisé par *S. Poncet et M.P. Chauve* [8], (b) : Domaine numérique utilisé

1.1 Mise en équation

La figure 1-(a) décrit le dispositif expérimental [8]. Un disque de rayon extérieur b auquel est éventuellement fixé un moyeu de rayon a tourne à la vitesse angulaire Ω dans un container fixe de rayon intérieur b . Cette cuve ainsi constituée contient un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité cinématique ν . La hauteur du liquide au-dessus du disque tournant est e . On note $G = e/b$ le rapport de forme vertical de l'espace occupé par le liquide et $S = a/b$ le rapport des rayons. Si la vitesse angulaire Ω reste faible, on peut négliger la variation de la hauteur de liquide et on considérera en première approximation que l'écoulement se produit dans le domaine représenté sur la figure 1-(b).

Les équations du mouvement sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant b comme longueur de référence et $1/\Omega$ comme temps de référence. La vitesse de référence est alors Ωb et on prend $\rho(\Omega b)^2$ comme pression de référence.

1.1.1 Écoulement de base

L'écoulement de base, avant la première bifurcation, est stationnaire et axisymétrique ce qui permet d'introduire trois fonctions scalaires, la vorticité ω , la fonction de courant ψ et le moment angulaire Γ pour exprimer les composantes (U_r, U_θ, U_z) du champ de vitesse à l'aide des relations :

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, U_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \omega = \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \text{ et } \Gamma = r U_\theta. \quad (1)$$

Le choix de cette formulation permet d'éliminer la pression dans les équations de Navier-Stokes et par conséquent nous économisons une équation à résoudre. Le système d'équations gouvernant l'écoulement de base se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r\omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(U_r \omega) + \frac{\partial}{\partial z}(U_z \omega) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma^2}{r^3} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(U_r \Gamma) + \frac{U_r \Gamma}{r} + \frac{\partial}{\partial z}(U_z \Gamma) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

où $Re = \Omega^* b^2 / \nu$ est le nombre de *Reynolds* défini par la rotation du disque. Les conditions aux limites² sont :

$$\text{Condition Ouest : si } r = S = 0, \psi = \omega = \Gamma = 0, \text{ sinon pour } r = S \neq 0, \psi = 0, \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \text{ et } \Gamma = S^2 \quad (5)$$

²Il est noté que le cas $S = 0$ n'a pas les mêmes conditions que le cas $S \neq 0$

$$\text{Condition Est (la paroi fixe) : } r = 1 : \psi = 0, \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \text{ et } \Gamma = 0 \quad (6)$$

$$\text{Condition Nord (la surface libre) : } z = G : \psi = \omega = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Condition Sud (le disque tournant) : } z = 0 : \psi = 0, \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \text{ et } \Gamma = r^2 \quad (8)$$

1.1.2 Perturbation

Le champ de vitesse est décomposé de la manière suivante :

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = \mathbf{U}(r, z) + \epsilon \text{Real}[(v_r(r, z), iv_\theta(r, z), v_z(r, z)) \exp(\lambda t + im\theta)] \quad (9)$$

où ϵ est un petit paramètre, m est le nombre d'onde azimutal et $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ définit le taux de croissance λ_r et la fréquence λ_i . Les variables v_r, v_θ, v_z sont complexes. Une formulation similaire est utilisée pour la perturbation de pression p . En introduisant la décomposition (9), les équations de Navier-Stokes à l'ordre ϵ sont identiques aux équations exprimées dans *L. Kahouadji et al* [4]³. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{Pour } r = 1 \text{ ou } z = 0 : v_r = v_\theta = v_z = 0 \text{ (Condition d'adhérence à la paroi)} \quad (10)$$

$$\text{Pour } z = G : v_z = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \text{ (Condition de symétrie à la surface libre)} \quad (11)$$

$$\text{Pour } r = S = 0 : \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = v_z = 0, \text{ pour } m = 1, v_r = v_\theta = v_z = 0 \text{ pour } m > 1$$

$$\text{et } v_r = v_\theta = \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \text{ pour } m = 0 \text{ (Condition sur l'axe)} \quad (12)$$

$$\text{pour } r = S \neq 0 : v_r = v_\theta = v_z = 0 \text{ (Condition d'adhérence au moyeu)} \quad (13)$$

1.1.3 Discrétisation et résolution numérique

La discrétisation numérique est effectuée sur un maillage de $NR * NZ$ points uniformément répartis dans chaque direction r et z . Nous avons utilisé un schéma aux différences finies d'ordre 2 pour discrétiser les équations de l'écoulement de base et de perturbation.

La recherche des seuils critiques Re_c en fonction du rapport de forme G se fait à l'aide des étapes suivantes :

- Pour Re et G fixés, l'écoulement de base est résolu par une méthode de *Newton* (Le système linéaire est résolu par *LAPACK*⁴ pour chaque itération de *Newton*).
- Les valeurs propres λ sont trouvées à l'aide de la librairie *ARPACK*⁵.
- Avec une sécante sur λ_r , Re_c est trouvé quand $\lambda_r \approx 0$.

2 Résultats

2.1 Structure de l'écoulement de base

Pour différentes valeurs de $G \ll 1$ et pour $Re \sim Re_c$, l'allure de l'écoulement de base est semblable à celle représentée sur la figure 2 qui montre respectivement le champ de vitesse azimutale U_θ (2a₁) et la fonction de courant ψ (2b₁). Ces figures montrent que dans une région proche de l'axe, le fluide est en rotation solide. Cela se remarque bien sur la figure 2 a₁, où les iso-contours de U_θ sont des droites verticales régulièrement espacées dans la direction radiale, sur la figure 2 b₁, où la fonction de courant ψ est nulle, signifiant l'absence de recirculation et de cisaillement. Ceci est observé expérimentalement par *S. Poncet et M.P. Chauve* [8] et numériquement pour le ECDP par *J.Herrero et al.* [3] et *A. Randriamampianina et al.* [9].

³La décomposition est similaire à celle utilisée dans cet article, les équations de Navier-Stokes demeurent inchangées sans prendre en compte l'équation de la thermique (8 à 11)

⁴Linear Algebra Package

⁵Arnoldi Package

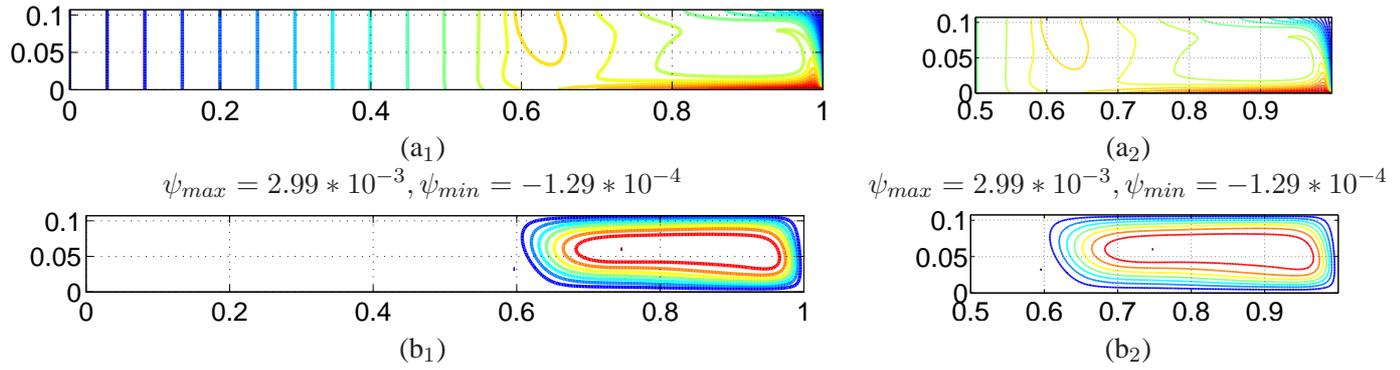


FIG. 2 – Pour $G = 0.107$ et $Re = 10017$ (a_1 et a_2) : Champ de vitesse U_θ , (b_1 et b_2) : iso-contour de ψ , (La colonne de gauche $S = 0$ et la colonne de droite $S = 0.5$)

NR*NZ (S=0)	$G = e/b$	m	$Re_c(S = 0)$	$Re_c(S = 0.5)$	$Re_c(\text{exp}) (S=0)$	erreur en %
1214*51	0.6/14~ 0.043	6	—	39081	20525	90.5
1020*51	0.7/14~ 0.05	6	—	30035	18473	68.4
894*51	0.8/14~ 0.057	6-6-5	24112	24128	16420	46.8
796*51	0.9/14~ 0.064	5	19966	20050	16420	21.5
718*51	1.0/14~ 0.071	5	16976	17042	16420	3.3
653*51	1.1/14~ 0.079	5	14778	14825	15394	4.0
600*51	1.2/14~ 0.086	5	13163	13172	12315	6.8
554*51	1.3/14~ 0.093	4	11831	12040	12315	3.9
501*51	1.4/14~ 0.1	4	10957	10961	11289	2.9
476*51	1.5/14~ 0.107	4	10017	10169	10263	2.3

TAB. 1 – Valeurs numériques Re_c avec et sans moyeu, et expérimentales $Re_c(\text{exp})$ pour les modes les plus instables en fonction de G (hauteur du fluide / rayon du disque en cm). La dernière colonne représente les écarts par rapport aux résultats expérimentaux. Les valeurs de $Re_c(\text{exp})$ nous ont été communiquées par S. Poncet.

La présence d'un moyeu n'affecte pas l'écoulement de base tant que $S \leq 0.5$. La structuration de l'écoulement obtenu pour $S = 0.5$ est représentée sur les figures 2 a_2, b_2 . On constate un excellent accord qualitatif, et des comparaisons quantitatives montrent que les valeurs maximales de ω et ψ ne diffèrent que de 0.002%. De plus, comme cela est discuté dans la section suivante, la présence du moyeu ne modifie pas les instabilités dans la zone cisailée.

2.2 Analyse de stabilité linéaire

2.2.1 Calculs sans moyeu

La figure 3 représente l'évolution de Re_c en fonction de G . Les symboles “—” désignent les valeurs expérimentales de S. Poncet et M.P. Chauve, les symboles “◀” reliés par la ligne continue les résultats numériques. Les valeurs sont inscrites dans le tableau 1. Nous remarquons que Re_c croît lorsque G décroît. Les modes azimutaux m obtenus numériquement coïncident avec les expériences sur toute la plage des G étudiés sauf pour $G \approx 0.057$. Le mode le plus instable est alors $m = 6$. Cependant, en effectuant le calcul avec $m = 5$, Re_c est égal à 24114, les valeurs critiques de ces deux modes sont donc très proches. Les erreurs par rapport aux expériences sont comprises entre 2.3% et 6.8% quand $G \geq 0.071$. En dessous de cette valeur, les erreurs sont supérieures à 20% et atteignent même 90% lorsque $G \leq 0.042$.

2.2.2 Calculs avec moyeu

Les calculs ont également été effectués en présence d'un moyeu ($S=0.5$). Le pas d'espace est le même que celui utilisé dans tout le domaine ce qui est obtenu en divisant par deux le nombre de points dans la direction radiale. Les valeurs de Re_c pour les modes les plus instables sont proches de celles trouvées dans tout le domaine à 1.7% près. Pour $G \sim 0.057$, le mode azimutal diffère de celui trouvé expérimentalement. Il faut

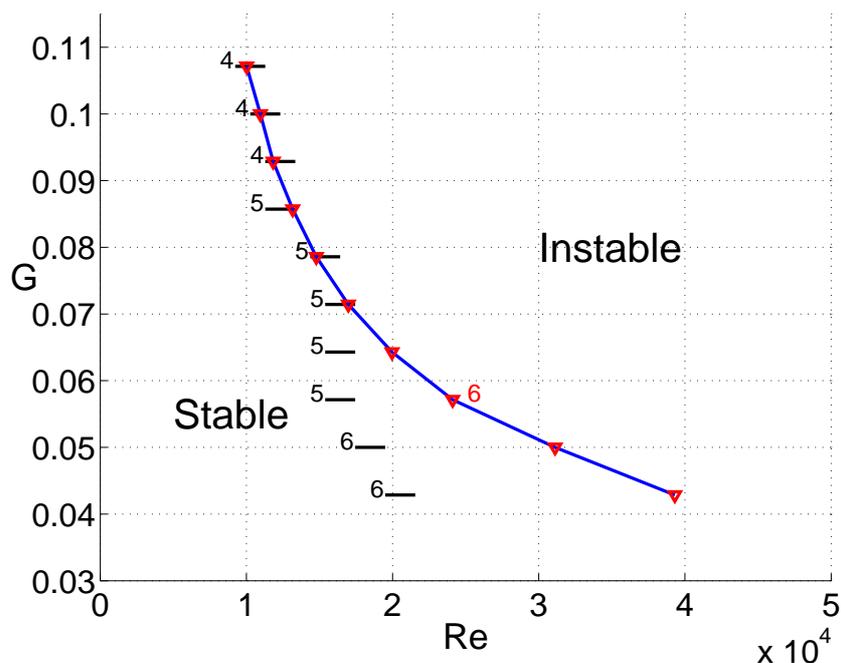


FIG. 3 – Courbe de stabilité : Les symboles “—” désignent les valeurs expérimentales de S. Poncet et M.P. Chauve ; la courbe continue marquée par “◀” représente les résultats numériques (pour $S = 0$) ; les modes azimutaux m sont indiqués pour les valeurs expérimentales (et pour les valeurs numériques en cas de divergence).

cependant noter que $Re_c = 24240$ pour $m = 5$. Cela montre encore une fois que la transition entre un mode 5 et un mode 6 a probablement lieu pour un rapport de forme très proche de 0.057.

3 Discussions, conclusions et perspectives

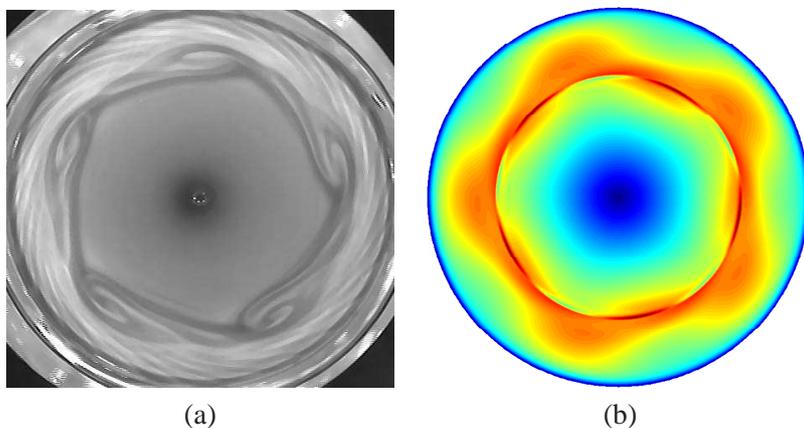


FIG. 4 – $Re = 24630$, $G = 0.0714$ et $m = 5$ (a) : Visualisation de S. Poncet et M.P. Chauve, (b) : Champ de vitesse azimutale couplé avec les perturbations normalisées à la surface libre ($U_\theta + \epsilon \text{Real}[iv_\theta / \max(|v_\theta|)] \exp(i5\theta)$), avec ϵ est arbitrairement choisi à 0.15).

Nous nous sommes inspirés des travaux expérimentaux en prenant diverses hypothèses. L'une d'entre elles est le choix d'une surface libre plane que l'on peut discuter.

Les modes azimutaux sont prédits correctement sur toute la gamme de G . La figure 4 montre que l'étude de stabilité linéaire semble capter le lieu des instabilités. Le fort gradient qu'on observe se situe, pour toutes les valeurs de G , dans une région proche de la frontière entre la recirculation méridienne et la rotation solide.

Les valeurs de Re_c sont en bon accord avec les expériences pour tout $0.071 \leq G \leq 0.107$. Les erreurs trouvées pour $G \leq 0.064$ sont importantes et de l'ordre de 20% à 90% par rapport aux expériences.

La présence d'un moyeu n'affecte pas les instabilités lorsque son rayon est plus petit que le rayon où le fluide est en rotation solide. En revanche, lorsque le moyeu est plus grand que la zone de rotation solide, les instabilités semblent d'une autre nature. Ceci est observé expérimentalement. S. Poncet et M.P. Chauve l'ont indiqué dans leur article [8] et figure 16. En fixant $G = 0.0429$ et $Re = 36945$ avec trois valeurs du rapport des rayons $S = 0.286, 0.536$ et $S = 0.75$, ils ont montré que pour $S = 0.75$, les structures des instabilités sont profondément modifiées. Bien que la valeur de Re_c soit très différente, nous avons pu reproduire les structures de l'instabilité (obtenu à $S = 0.286$ et $S = 0.536$) en fixant $S = 0.5$. En revanche, à $S = 0.75$, nous n'avons pas reproduit les nouvelles structures observées expérimentalement.

Dans toutes ces configurations où il y a désaccord, il est possible de remettre en cause la validité de l'hypothèse d'une surface libre plane. Nous nous proposons prochainement d'écrire un code en coordonnées curvilignes prenant en compte la déformation de la surface libre.

Remerciements : Nous avons eu des discussions fructueuses avec O. Daube et S. Poncet. Nous les remercions chaleureusement.

Références

- [1] J.M. Chomaz, M. Rabaud, C. Basdevant, and Y. Couder. Experimental and numerical investigation of a forced circular shear layer. *J. Fluid Mech.*, 187 :115–140, 1988.
- [2] V.W. Ekman. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Mat. Astr. Fys*, 2 :1–52, 1905.
- [3] J. Herrero, F Giralt, and J.A.C. Humphrey. Influence of the geometry on the structure of the flow between a pair of corotating disks. *Phys. Fluids*, 11 :88–96, 1999.
- [4] L. Kahouadji, L. Martin Witkowski, and J.S. Walker. Effet de la rotation sur les instabilités thermocapillaires dans un pont liquide chauffé latéralement. *18^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- [5] L. Martin Witkowski, I. Delbende, P. Le Quéré, and J. S. Walker. Axisymmetric stability of the flow between two exactly counter-rotating disks with large aspect ratio. *J. Fluid Mech.*, 546 :193–202, 2006.
- [6] H. Niino and N. Misawa. An experimental and theoretical study of barotropic instability. *J. Atmos. Sci*, 41 :1992–2011, 1984.
- [7] C. Nore, L. Martin Witkowski, E. Foucault, J. Pécheux, O. Daube, and P. Le Quéré. Competition between axisymmetric and three-dimensional patterns between exactly counter-rotating disks. *Phys. Fluids*, 18 :054102, 2006.
- [8] S. Poncet and M.P. Chauve. Shear-layer instability in rotating system. *J. Flow Visual Image Process*, 14 :85–105, 2007.
- [9] A. Randriamampianina, R. Schiestel, and M. Wilson. Spatio-temporal behaviour in an enclosed corotating disk pair. *J. Fluid Mech.*, 434 :39–64, 2001.