

# LES SOLUTIONS MULTIPLES EN CONVECTION NATURELLE INSTATIONNAIRE DANS UNE CAVITE FERMEE : INFLUENCE DE L'ANGLE D'INCLINAISON.

S. Aklouche<sup>a</sup>, B. Zeghmati<sup>b</sup>, K. Bouhadef<sup>a</sup>.

a. Laboratoire de transfert polyphasiques et milieux poreux USTHB Algerie [mesadz@yahoo.fr](mailto:mesadz@yahoo.fr)

b. Laboratoire MPS, groupe de mécanique Perpignan. France [zeghmati@univ-perp.fr](mailto:zeghmati@univ-perp.fr)

## Résumé :

*Dans cette étude, nous étudions numériquement la convection naturelle instationnaire dans une cavité carrée fermée, dont les parois horizontales sont adiabatiques, et, les parois verticales sont chauffées à la demi-hauteur inférieure, et refroidies dans leur partie supérieure de la cavité. Nous étudions deux cavités inclinées correspondant à un angle  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 45$  degrés. L'écoulement est laminaire et bidimensionnel. Les équations de transfert adimensionnelles exprimées en terme de vorticité et de fonction de courant, ont été résolues avec la méthode implicite des directions alternées à laquelle on a associé la méthode de l'élimination de GAUSS. Nous analysons les effets du nombre de Rayleigh et de l'inclinaison sur les routes vers le chaos qu'emprunte le système.*

## Abstract :

*In this study, we numerically investigated transient natural convection in an air filled square cavities where the horizontal sides were adiabatic and the vertical walls were composed of two regions of same size maintained at different temperatures. We studied two inclined cavities for  $\alpha = 0$  and  $\alpha = 45$ . The flow was assumed to be laminar and two-dimensional. The dimensionless governing equations, expressed in terms of stream function and vorticity, have been solved using the Alternating Direction Implicit Method (ADI) and the GAUSS elimination method. We analysed the effects of the Rayleigh number and the inclination on the route to chaos borrowed by the system.*

**Mots-clefs :** Convection naturelle ; thermique ; bifurcations ; chaos ; cavités inclinées.

## I Introduction

La convection naturelle qui se développe dans des enceintes fermées, dont les parois sont soumises à différents types de conditions aux limites a fait l'objet de nombreux travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux, en raison de son importance dans de nombreux processus industriels et de phénomènes naturels. Ces études permettent d'une part d'améliorer nos connaissances sur les mécanismes qui régissent les transferts paroi fluide, afin d'optimiser les qualités fonctionnelles de cette paroi, et, d'autres parts de vérifier numériquement l'existence de certaines routes vers le chaos déterministe. L'évolution irrégulière et imprédictible des systèmes chaotiques sont dues essentiellement à la non linéarité, provoquant sous certaines conditions une grande sensibilité aux conditions initiales. Les écoulements de convection naturelle en espaces confinés constituent un effet de prédiction pour l'étude des différents processus physiques à travers lesquels un écoulement stationnaire est transformé en un écoulement chaotique. Les raisons en sont que les différentes bifurcations sur la route vers le chaos s'y produisent de manière étagées et suffisamment différenciées pour permettre l'identification, et, l'analyse des mécanismes physiques élémentaires qui leurs sont associés. Patterson et Imberger [1], furent les premiers à proposer une classification des types de régimes transitoires que l'on peut rencontrer dans une cavité, lorsque nous imposons des brusques

changements des conditions aux limites. Curry et York [2], ont confirmé à travers le modèle numérique issu de celui de Rayleigh-Benard, la route vers le chaos qui était appelée transition par périodicité. Gollub et Besson [3], ont identifié expérimentalement quatre routes vers la turbulence dans la convection de Rayleigh-Benard : Transition vers le chaos via la quasi périodicité avec deux ou trois fréquences incommensurables, dédoublement de période ou intermittence. Gollub et Swimney [4], ont mené une étude expérimentale dans une cellule de Couette. Ils ont confirmé les routes vers le chaos ce qui a permis de prédire les prévisibilités des systèmes. P. Lequere [5], a confirmé la transition inverse et a trouvé l'existence de plusieurs branches de solution caractérisées par le nombre de cellules. A. Ndam [6], a pu visualiser expérimentalement les différentes bifurcations dans une enceinte parallélépipédique remplie d'air. S. Wakitani [7], a étudié numériquement la convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité verticale remplie d'air, de rapport de forme égal à 16, différentiellement chauffée avec un gradient de température horizontale. Les parois horizontales sont adiabatiques. Il a montré la dépendance de la structure de l'écoulement sur les conditions initiales. A. Skouta [8], a pu mettre en évidence les routes vers le chaos dans une cavité carrée fermée et inclinée d'un angle de 45 degrés par rapport à l'horizontale. La première bifurcation a été obtenue pour un nombre de Rayleigh égal à  $1.12 \cdot 10^5$ , elle est spécifique à celle de Hopf. C. Janhke [9], a étudié le transfert de chaleur dans une cavité remplie d'un fluide dont le nombre de Prandtl est égal à un et dont les parois verticales sont chauffées d'une manière non uniforme, et les parois horizontales sont adiabatiques. Les calculs étaient performants pour un maillage de  $81 \times 81$ . Le tracé des isocourants et des isothermes a montré que le transfert s'effectuait mieux selon la diagonale formée par la fusion d'une cellule froide et d'une cellule chaude. L'étude de la cavité carrée fermée dont les parois horizontales sont adiabatiques, et, les parois verticales sont chauffées dans leur demi partie inférieure, et, sont refroidies dans la partie supérieure, n'a donné à notre connaissance aucun résultat concernant le chaos. C'est pour cela que nous nous sommes intéressés à cette cavité qui trouve son application dans le chauffage d'un local. Nous étudions la stabilité du système, nous représentons les attracteurs des différents états du système par des portraits de phase.

## 2 Problème physique et méthodologie numérique

L'écoulement étudié dans cet article se développe dans une cavité carrée de rapport de forme A égal à 1 suivant le schéma représenté (figure 1). Les parois horizontales sont adiabatiques et les parois verticales sont chauffées dans demi partie inférieure de la cavité et refroidies dans la demi supérieure. Le fluide (air  $Pr=0.71$ ) est considéré comme newtonien et incompressible. Dans cette cavité remplie d'air, le transfert thermique est gouverné par les équations de la convection naturelle. Nous adoptons les hypothèses suivantes: Les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes à l'exception de la variation de la masse volumique qui induit les forces de gravité, et qui obéit à l'approximation de Boussinesq. La dissipation visqueuse est négligeable dans l'expression de l'énergie. L'écoulement est laminaire et bidimensionnel. L'échange par rayonnement est négligeable. L'air est supposé idéal. Les équations adimensionnelles de la fonction de courant, de la vorticité et de l'énergie avec la formulation fonction de courant et vorticité s'écrivent comme suit :

$$\Omega = -[\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2] \quad (1)$$

$$\partial \Omega / \partial t + \partial (u\Omega) / \partial x + \partial (v\Omega) / \partial y = Pr[\partial^2 \Omega / \partial x^2 + \partial^2 \Omega / \partial y^2 + Ra.Pr \partial T / \partial x] \quad (2)$$

$$\partial T / \partial t + \partial (uT) / \partial x + \partial (vT) / \partial y = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 \quad (3)$$

Les grandeurs de références sont :

$$x = x'/H \quad y = y'/H ; \quad u = u' \cdot H/a \quad v = v' \cdot H/a \quad (4)$$

$$\Omega = \Omega' \cdot H^2/a \quad \Psi = \Psi'/a \quad (5)$$

$$t = t' \cdot a/H^2 ; T = (T' - T_{froid}) / (T_{chaud} - T_{froid}) \quad (6)$$

Les conditions aux limites initiales s'écrivent :

$$t \leq t_0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 : T=0, \Omega=0, \Psi=0, u=0, v=0 \quad (7)$$

Les conditions aux limites dynamiques et thermiques s'écrivent comme suit :

$$t \geq t_0 \quad x=0, x=1, 0 \leq y \leq 1 : u=0, v=0, \Psi=0, \Omega = -\partial^2 \Psi / \partial x^2 /_{x=0,1} \quad (8)$$

$$0 \leq x \leq 1, y=0, y=1 : u=0, v=0, \Psi=0, \Omega = -\partial^2 \Psi / \partial y^2 /_{y=0,1} \quad (9)$$

$$(\partial T / \partial y)_{y=0,1}=0 \quad (10)$$

$$x=0, x=1, 0 < y < 1/2, T = 1; x=0, x=1, 1/2 < y < 1, T = 0 \quad (11)$$

$$T(x, H/2)=0.5 \quad (12)$$

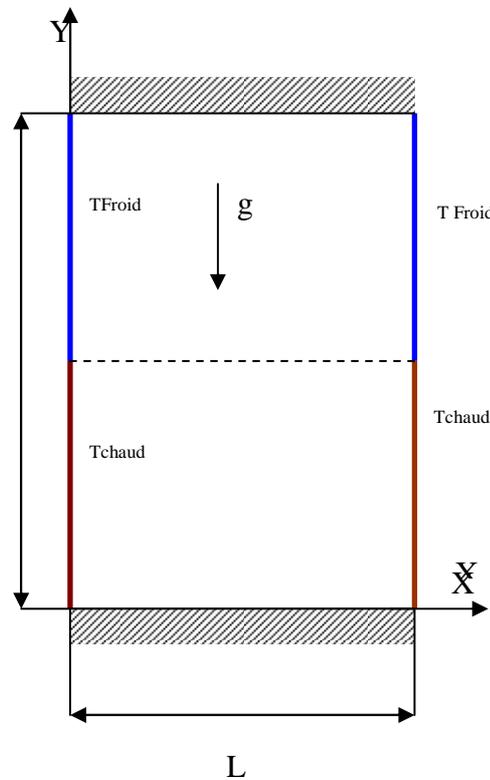


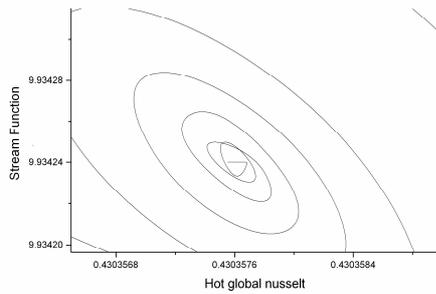
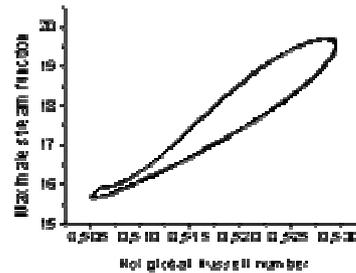
FIG. 1- Modèle Physique

### 3 Procédure numérique

Les équations de l'énergie, et de la vorticité sont résolues en utilisant la méthode implicite aux directions alternées (A.D.I) à laquelle on lui associe la méthode de l'élimination de GAUSS. Les vitesses sont calculées avec des différences centrées. Pour la méthode itérative le critère de convergence pour la fonction de courant est inférieure à  $10^{-5}$ . Cependant le critère de convergence pour la température et la vorticité est inférieure à  $10^{-6}$ .

### 4 Résultats

Afin de valider notre approche, nous avons comparé nos résultats avec ceux donnés par DeVahl Davis [10], et avec les résultats expérimentaux de Ndamé [9]. Le problème de DeVahl Davis a été performant pour les nombres de Rayleigh égaux à  $10^3$ ,  $10^5$ , et  $10^6$ . Concernant le nombre de Nusselt global chaud, la fonction de courant maximale et la vitesse maximale nous avons un bon accord entre nos résultats et ceux de DeVahl Davis. L'écart entre notre simulation et celle de Ndamé est de 0.6% pour la température. La valeur trouvée indique l'exactitude de notre code. Nous avons remarqué que les résultats deviennent sensibles aux pas d'espace et aux pas de temps quand le nombre de Rayleigh augmente. Les fréquences de la solution instationnaire sont obtenues en utilisant la transformée de Fourier rapide avec une résolution spectrale inférieure à 0.2. Cependant, les amplitudes sont moins sensibles que les fréquences. Nous étudions les routes vers le chaos pour une inclinaison égale à 0 et 45 degrés. Pour un angle égal à 0 le point limite est obtenu pour un nombre de Rayleigh égal à  $2.3977 \cdot 10^5$  (figure 2), Le cycle limite s'installe à partir d'un nombre de Rayleigh égal à  $3 \cdot 10^5$  (figure 3). Pour un angle de 45 degrés le point limite apparaît pour  $Ra = 10^5$  et persiste jusqu'à  $Ra = 2.710 \cdot 10^5$ .

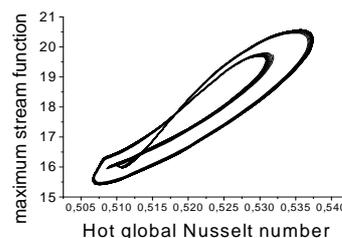
FIG. 2- Point limite  $\alpha = 0$ FIG. 3- Cycle limite  $\alpha = 0$ 

L'augmentation du nombre de Rayleigh montre l'existence d'une bifurcation harmonique caractérisée par un doublement de période. Le premier dédoublement de période pour un nombre de Rayleigh égal à  $3.4 \cdot 10^5$  et pour  $\alpha = 0$  est illustré (figure 4).

Ce doublement de période est en accord avec la théorie de Floquet (Berge *et al.* 1998) [11].

Pour  $\alpha = 0$ , le chaos apparaît dans le domaine  $(6 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5)$ , et persiste jusqu'à  $Ra = 10^6$ .

Pour  $\alpha = 0$ , les calculs ont été faits pour l'air ( $Pr = 0.71$ ) et pour un domaine du nombre de Rayleigh variant de  $2.5 \cdot 10^5$  à  $1.5 \cdot 10^7$ . La première transition correspond au passage de l'état stationnaire vers un état oscillatoire et, la seconde transition représente une bifurcation sous harmonique quand le nombre de Rayleigh augmente. La représentation du système dans un espace de phase par un attracteur montre la bifurcation d'un point fixe stable vers un cycle limite stable pour un domaine de nombre de Rayleigh compris entre  $2.5 \cdot 10^5$  and  $3 \cdot 10^5$ . Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, l'écoulement devient instable et bifurque vers une solution périodique pour un nombre de Rayleigh critique compris entre  $2.53 \cdot 10^5$  et  $2.54 \cdot 10^5$ . Le cycle limite s'installe à partir d'un nombre de Rayleigh égal à  $3 \cdot 10^5$  et persiste jusqu'à  $Ra = 5 \cdot 10^5$ . La première bifurcation est caractéristique d'une bifurcation de HOPF. Après cette bifurcation de HOPF, l'écoulement subit plusieurs bifurcations et évolue vers un écoulement chaotique.

FIG. 4 - dédoublement de période  $\alpha = 0$ 

## 5 Conclusion

Une étude numérique aux différences finies a été reportée sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air avec un rapport de forme égal à 1 et inclinée d'un angle  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 45$ . Le code de calcul élaboré a été validé avec les résultats publiés par De Vahl Davis et avec les données expérimentales de Ndamé. Une étude de stabilité a été faite. La recherche du maillage et du pas de temps pour chaque nombre de Rayleigh a conduit à la détermination du maillage optimum et du pas de temps. Cette étude a montré que l'écoulement dans la cavité subit des séquences de bifurcation de l'état stationnaire vers un état oscillatoire convectif. La bifurcation observée est sur critique. Cependant l'apparition du phénomène chaotique pour une inclinaison de 45 est retardée. Ce résultat est intéressant dans les applications d'engineering pour pouvoir contrôler le chaos et surtout dans la conception des systèmes. Nous avons remarqué que pour une inclinaison nulle, le

scenario des routes vers le chaos est en concordance avec celui de Ruelle Takens[11.12]. Par contre celui pour une inclinaison de 45, le scenario est celui de Curry et York[11] , Les deux inclinaisons nous montrent que notre système subit un chaos déterministe.

## References

- [1] Patterson J.,Imberger J.,Unsteady natural convection in a rectangular cavity, Journal Fluid Mechanics,100,65,1980.
- [2] Curry J.,Yorke J.A.,A transition from Hopf bifurcation to chaos:Computer experiments with maps in  $R^2$  the structure of attracteurs in dynamical systems,Springer notes in Mathematics,668,48,1977.
- [3] Gollub J.P.,Besson S.H.,Many routes to turbulence convection, Journal Fluid Mechanics, 100,449-470,1980.
- [4] Swimney H.L.,Gollub J.L.,Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence,topics in applied Physics,45,Springer-Verlag,Berlin Heidelberg ,1982.
- [5] Lequere P.,A note on multiple and unsteady solutions in two dimensional convection in a tall cavity, ASME Journal of Heat Transfer,112,965-974,1990.
- [6] Ndam A.,Etude expérimentale de la convection naturelle en cavité de l'état stationnaire vers le chaos, Thèse Doctorat Université de Poitiers,1992.
- [7] Wakitani S.,Numerical study of three dimensional oscillatory natural convection at low Prandtl number in rectangular enclosure, Journal of Heat Transfer,123,77-83,1993.
- [8] Skouta A., Etude numérique de la transition vers le chaos par convection naturelle stationnaire bidimensionnelle dans une cavité allongée de grand axe horizontal chauffé par les deux cotés opposés, Thèse doctorat université de Perpignan,2000.
- [9] Jahnke C.C.,Subramanyan V.,Valentine D.T.,On the convection in an enclosed container with instable side wall temperatures distribution,International Journal of Heat and Mass Transfer, 41, 2307- 2320,1998.
- [10] De Vahl Davis G.,Natural convection of air in a square cavity: A Benchmark numerical solution, International Journal of Numerical Methods Fluids,3, 249- 264,1983.
- [11] Berge P.,Pomeau Y.,L'ordre dans le chaos ,cinquième édition,Hermann 1998.
- [12] Ruelle D.,Takens F., On the nature of turbulence,Com. Math,Phys.,20,167-192.