

Structures convectives dans les écoulements à surface libre

A. EL GALLAF^a, R. TOUIHRI^b, D. HENRY^a, H. BEN HADID^a

- a. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, CNRS/Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon/Université Lyon 1/INSA de Lyon, ECL, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 ECULLY CEDEX.
b. Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur (LAMSIN), Campus universitaire Le Belvédère, BP 37, 1002 TUNIS (TUNISIE).

Résumé :

Nous présentons les structures convectives obtenues dans une couche fluide confinée dans une cavité cylindrique, chauffée par le bas et avec une surface supérieure libre. Au déclenchement de la convection, les structures convectives correspondent à des modes de Fourier, et les seuils critiques dépendent du rapport de forme de la cavité, et des nombres de Biot et de Marangoni qui caractérisent la surface libre. Lorsque la convection se déclenche sous la forme d'un mode axi-symétrique $m = 0$, l'évolution non-linéaire montre la coexistence de différentes structures convectives, des structures axi-symétriques avec écoulement montant ou descendant au centre de la cavité et des structures correspondant à des combinaisons de modes qui apparaissent sur des branches sous-critiques.

Abstract :

We show the convective structures obtained in a cylindrically confined fluid layer heated from below and with an upper free surface. At onset, the convective structures correspond to Fourier modes, and the critical thresholds are found to vary with the aspect ratio of the cavity, and the Biot and Marangoni numbers which characterize the free surface. When an axi-symmetric $m = 0$ Fourier mode is obtained at onset, the non-linear evolution shows the coexistence of different convective structures, the axi-symmetric structures with up-flow or down-flow at the center and mixed-modes structures which appear on subcritical branches.

Mots clefs : Convection de Rayleigh-Bénard, géométrie cylindrique, surface libre

1 Introduction

La compréhension de la naissance et de l'évolution des structures convectives dans les systèmes fluides chauffés présente un intérêt à la fois fondamental et appliqué. L'évolution dynamique de ces écoulements chauffés est très riche, et cette situation est aussi typique de situations industrielles, croissance cristalline (semi-conducteurs, matériaux pour l'optique), dépôts chimiques en phase vapeur, ou encore pompage du sodium utilisé dans les réacteurs nucléaires. Dans le cas particulier de la croissance cristalline, le comportement oscillatoire du bain fondu est responsable de la présence de striations dans le cristal obtenu, affectant ainsi la qualité de la structure finale.

L'étude ici présentée considère une couche fluide chauffée, confinée dans une cavité cylindrique verticale. Le chauffage est imposé par le bas, si bien que la mise en mouvement du fluide ne se fera qu'au delà d'un certain seuil critique. La surface supérieure de la cavité est libre : à cette surface, nous tenons compte du transfert thermique à travers une condition aux limites faisant intervenir un nombre de Biot, ainsi que de l'équilibre des forces de tension superficielle qui fait intervenir un nombre de Marangoni. La recherche des états stationnaires en fonction du nombre de Rayleigh est assurée par une méthode de continuation et les états oscillatoires sont obtenus par intégration temporelle. Nous savons aussi déterminer les points de transition, ce qui nous permet d'obtenir l'ensemble des solutions convectives de notre système.

Les équations auxquelles obéit notre fluide sont les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. Le fluide, de nombre de Prandtl unité ($Pr = 1$), est soumis, à travers les variations de température, à des forces volumiques de flottaison en lien avec la gravité et à des forces de tension superficielle au niveau de la surface libre. La modélisation suppose que l'ensemble des mouvements générés ne déforme pas la surface libre qui reste plane. Les nombres de Rayleigh et de Marangoni sont définis à partir de la différence de température effective existant entre le bas et le haut du fluide en situation diffusive, conformément aux travaux de Dauby [1].

2 Méthodes numériques d'intégration

Le code tridimensionnel permettant de simuler les mouvements convectifs est basé sur une discrétisation spectrale multi-éléments, dite méthode des éléments spectraux [2]. Cinq éléments sont utilisés pour paver la section circulaire du cylindre et une méthode isoparamétrique permet la prise en compte de la forme courbe des éléments de bord. Le code de base est un code avec évolution temporelle qui résout les parties linéaires et non linéaires par une méthode splitting [2]. Les parties non-linéaires sont approximées explicitement par une méthode de Adams-Bashforth tandis que les termes linéaires sont résolus par un schéma implicite de Adams-Moulton à l'aide d'une formulation variationnelle. La contrainte d'incompressibilité n'étant pas naturellement assurée, une étape supplémentaire de résolution de la pression avec conditions aux limites appropriées ferme le problème. Ce schéma temporel est programmé à l'ordre 3 pour les calculs transitoires. Ce même schéma à l'ordre 1 sert également à rechercher par continuation les états stationnaires. Notre méthode de continuation est une méthode de type prédiction/correction où une prédiction obtenue par interpolation linéaire (voire quadratique) à partir de solutions précédentes est améliorée par itérations de Newton jusqu'à convergence de la solution.

La méthode de continuation que nous avons programmée utilise la matrice Jacobienne sans toutefois que celle-ci soit calculée explicitement. Le produit matrice-vecteur est connu à un préconditionnement près ; il correspond à une itération en temps du problème linéarisé [3]. La résolution des systèmes linéaires va donc se faire à l'aide de méthodes itératives du type gradient conjugué. Nous pouvons ainsi suivre les branches de solutions stationnaires, qu'elles soient stables ou instables, de manière séquentielle. En un point de rebroussement (franchissement d'un noeud-col) ou de bifurcation, la stratégie pour obtenir les nouvelles branches est de maintenir constante l'une des composantes de vitesse (celle à plus forte variation par exemple) et de résoudre le paramètre de continuation (le nombre de Rayleigh) [4]. Nous pouvons ainsi, de proche en proche, obtenir l'ensemble des branches de solutions qui émergent dans notre système.

Nous pouvons aussi déterminer de façon précise les points de bifurcation par un calcul direct, pour lequel une solution proche du point critique munie du vecteur propre critique doivent être fournis. Une procédure de Newton permet alors de converger vers le point critique par résolution de systèmes linéaires se ramenant à des appels successifs d'étapes en temps classiques ou adaptées. Enfin, pour chaque branche de solutions, le spectre des principales valeurs propres permettant de déterminer la nature stable ou instable de ces branches est obtenu par une procédure d'Arnoldi. Cette méthode qui se ramène en final à la diagonalisation d'une matrice de petite taille, la matrice de Hessenberg, nécessite de faire agir un grand nombre de fois la matrice Jacobienne sur un vecteur, ce qui consiste encore une fois à réaliser de nombreuses étapes en temps du système linéarisé. L'ensemble de ces méthodes nous permet de décrire de façon précise le comportement dynamique des écoulements auxquels nous nous intéressons lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté. Nous pouvons également suivre les principaux points de bifurcation en fonction des autres paramètres (rapport de forme, nombres de Marangoni, de Prandtl et de Biot).

3 Analyse des seuils primaires

Dans notre cavité cylindrique chauffée par le bas, un mouvement global de fluide ne peut apparaître qu'au delà d'un seuil critique, caractérisé par exemple par le nombre de Rayleigh critique. Ces seuils de déclenchement du mouvement sont en général obtenus par analyse de stabilité linéaire de la solution de base diffusive qui consiste à calculer les valeurs propres du système aux perturbations linéarisé autour de cette solution de base. Dans notre cas, nous n'écrivons pas et ne résolvons pas ce système, mais nous utiliserons la procédure de suivi des points de bifurcation, en prenant soin de ne pas calculer la solution mais de l'introduire comme étant la solution diffusive. En raison des propriétés d'axi-symétrie de notre problème et de la solution de base, les modes propres qui vont initier la convection (modes primaires) sont des modes de Fourier. Nous nous intéresserons aux trois modes principaux qui sont les modes $m = 0, 1$ et 2 (pour une variation azimutale exprimée en $\exp(im\theta)$).

Comme le montre la figure 1(a) pour $Bi = 100$ et $Ma = 0$, le rapport de forme A (=rayon/hauteur) de la géométrie d'étude agit de façon significative sur l'émergence des modes primaires. Pour $A = 0.5$, soit une cavité assez compacte (hauteur=diamètre), nous observons que le mode critique (celui dont le seuil d'apparition Ra_c est le plus bas) est un mode asymétrique à un rouleau $m = 1$. Ce mode reste critique jusqu'à des géométries de rapport de forme $A \approx 1$, puis c'est le mode axi-symétrique $m = 0$ qui s'impose jusqu'à $A \approx 2.8$, puis à nouveau le mode $m = 1$. Nous voyons que l'effet de confinement latéral (diminution de A) contrôle les structures convectives, à savoir que la structure spatiale de ces modes est contrainte (il ne peut se former qu'un nombre limité de rouleaux, et pour A faible le mode $m = 1$ à un rouleau est dominant) et les seuils d'instabilité de ces modes sont de plus en plus séparés les uns des autres. Pour des cavités plus aplaties (accroissement de A), les modes ont des seuils proches les uns des autres, car tous les modes peuvent s'adapter à ce type de géométrie en rajoutant des rouleaux vers la périphérie, et le mode critique change donc régulièrement. Cet effet du confinement est très général et se retrouve quelles que soient les valeurs des autres paramètres Bi et Ma avec seulement des décalages dans la transition entre les modes (figure 1(b)).

L'influence des nombres de Biot Bi et de Marangoni Ma (liés à la surface libre) sur les seuils primaires est présentée sur la figure 2. Quel que soit Ma , le nombre de Rayleigh critique Ra_c tend pour les fortes valeurs du nombre de Biot vers une valeur asymptotique $Ra_c \approx 1200$. Cela est dû au fait qu'à fort Bi (comme $Bi = 100$) la température à la surface libre peut être considérée comme approximativement constante ce qui empêche

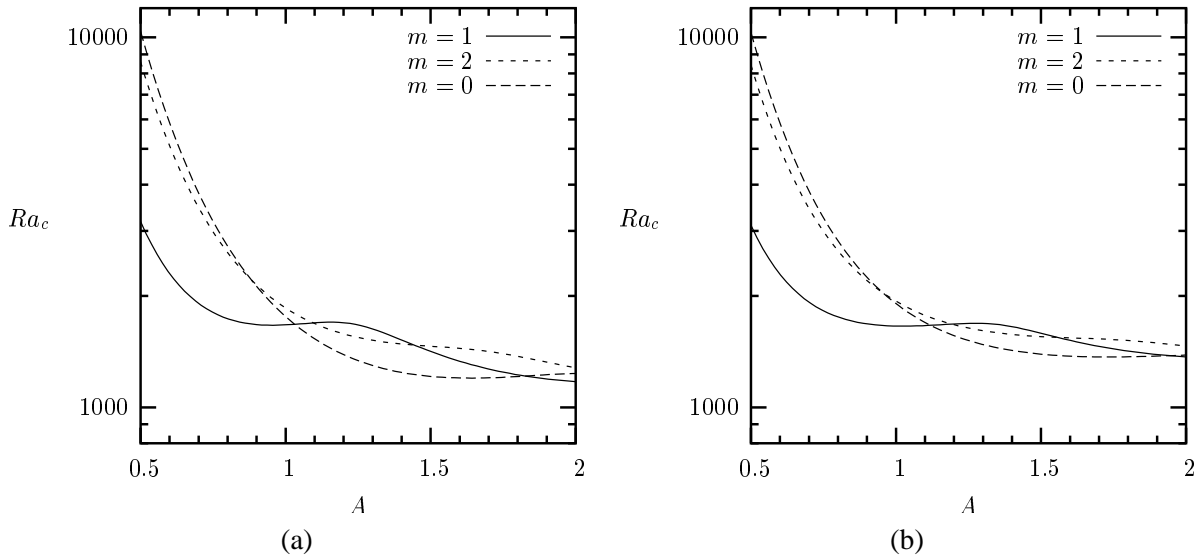


FIG. 1 – Evolution des seuils Ra_c des trois principaux modes primaires ($m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$) en fonction du rapport de forme A pour (a) un nombre de Biot $Bi = 100$ et un nombre de Marangoni $Ma = 0$ et (b) $Bi = 1$ et $Ma = 100$ ($Pr = 1$).

la création des gradients de température nécessaires au développement des forces de tension de surface. Au contraire l'influence du nombre de Marangoni Ma est la plus forte pour $Bi = 0$ où les gradients de température à la surface libre peuvent le plus facilement se développer : cette influence est stabilisante pour $Ma > 50$ et déstabilisante pour $Ma < 50$.

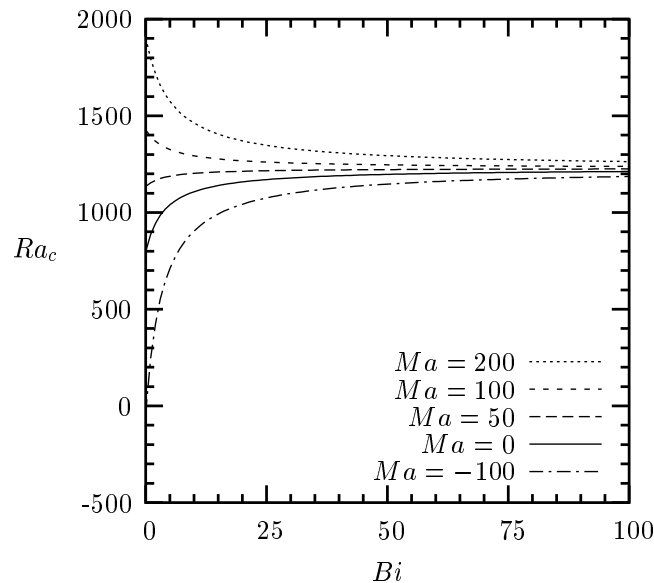


FIG. 2 – Evolution du seuil Ra_c du mode critique $m = 1$ en fonction du nombre de Biot Bi pour différentes valeurs du nombre de Marangoni Ma dans le cas d'une cavité de rapport de forme $A = 1.5$ ($Pr = 1$).

4 Dynamique non-linéaire

L'évolution des structures convectives qui se développent au delà des seuils primaires peut être représentée sous la forme d'un diagramme de bifurcation traçant par exemple la composante verticale de vitesse au centre de la cavité, w_0 , en fonction du nombre de Rayleigh. Nous présentons ainsi sur la figure 3 le diagramme de bifurcation obtenu pour une géométrie de rapport de forme $A = 1.5$, un nombre de Biot $Bi = 100$ et un nombre de Marangoni $Ma = 0$ (tensions de surface négligeables). La première bifurcation à partir de l'état de repos correspond à un mode $m = 0$: deux solutions convectives axi-symétriques sont donc obtenues, l'une où le fluide monte au centre de la cavité (vitesse w_0 positive) et l'autre où le fluide descend (vitesse w_0 négative).

Notons que, contrairement au cas de la cavité fermée (surface rigide en haut), notre système ne possède pas la symétrie haut/bas. Il n'y a donc pas de symétries brisées lors de l'apparition de la solution axi-symétrique et la bifurcation est donc transcritique. La transcriticité est néanmoins très faible et ne peut être observée sur le diagramme. Les solutions axi-symétriques sont observables sur une large gamme de valeurs de Ra , jusqu'à $Ra = 12512$ pour la branche supérieure (w_0 positive) et jusqu'à $Ra = 10112$ pour la branche inférieure. Les nouvelles branches de solutions qui apparaissent en ces points de bifurcation sont sous-critiques. Dans le quadrant supérieur, la branche est générée par un mode $m = 2$ et les solutions sont dénotées $m = 0/2$. Ces solutions sont instables jusqu'au franchissement d'un noeud-col où la branche est stabilisée. Cette branche reste ensuite stable jusqu'à l'apparition d'une bifurcation de Hopf. Dans le quadrant inférieur, la première branche bifurquant de la solution axi-symétrique est générée par un mode $m = 1$ et les solutions sont dénotées $m = 0/1$. Cette branche sous-critique rebrousse aussi chemin à un noeud-col, mais elle n'y est pas stabilisée et n'est donc pas observable. Par contre, une branche de solutions $m = 0/2$, née de la branche axi-symétrique en un point de bifurcation au-delà de $Ra = 20000$, se comporte de façon assez similaire à la branche obtenue dans le quadrant supérieur et se stabilise en un noeud-col. La branche reste stable jusqu'à un nouveau point de bifurcation stationnaire.

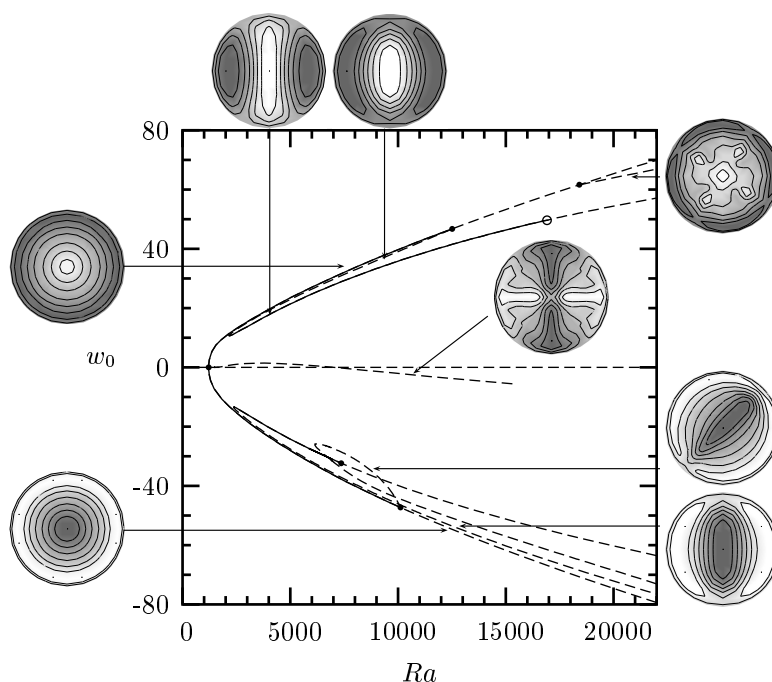


FIG. 3 – Diagramme de bifurcation donnant la vitesse au centre de la cavité w_0 en fonction de Ra pour une cavité de rapport de forme $A = 1.5$, un nombre de Biot $Bi = 100$ et un nombre de Marangoni $Ma = 0$ ($Pr = 1$). Les lignes continues représentent les états stables et les lignes discontinues les états instables. Les points de bifurcation stationnaire sont représentés par des points noirs et les points de bifurcation oscillatoire par des points blancs. Les tracés donnent les iso-lignes de la vitesse verticale dans le plan horizontal central.

5 Conclusion

Les situations convectives en cylindre chauffé par le bas avec surface supérieure libre se révèlent assez différentes de leurs homologues en cylindre fermé. Si les résultats de stabilité linéaire montrent le même type d'influence du rapport de forme sur les seuils primaires, nous voyons que les nombres de Biot et de Marangoni qui caractérisent la surface libre ont une influence importante sur ces seuils. Mais, c'est particulièrement la dynamique non-linéaire qui est modifiée. En effet, même dans un cas où le rôle de la surface libre a été largement contraint (fort nombre de Biot, nombre de Marangoni nul), nous observons une complexification du diagramme de bifurcation avec en particulier la présence de branches sous-critiques avec une très forte sous-criticité, ce qui induit l'existence de plusieurs types de solutions sur de larges gammes de paramètres. La diminution du nombre de Biot, par la modification des transferts thermiques qu'elle entraîne ainsi que la plus libre expression des effets de tension de surface, devrait encore modifier la dynamique de nos systèmes.

Remerciements

Nous tenons à remercier l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, organisme du CNRS, pour la mise à disposition d'heures de calcul sur des ordinateurs NEC-SX5 et NEC-SX8.

Références

- [1] Dauby P., Lebon G., and Bouhy E. Linear Bénard-Marangoni instability in rigid circular containers. *Phys. Rev. E*, 56(1), 520–530, 1997.
- [2] Karniadakis G., Israeli M., and Orszag S. High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, 97, 414–443, 1990.
- [3] Mamun C. and Tuckerman L. Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical couette flow. *Phys. Fluids*, 7, 80–91, 1995.
- [4] Bergeon A., Henry D., BenHadid H., and Tuckerman L. Marangoni convection in binary mixtures with Soret effect. *J. Fluid Mech.*, 375, 143–177, 1998.