

# Protubérances sur la courbe neutre sous l'effet de la périodicité de contraintes

S. CARRION, M. WADIH, P. G. CHEN , D. FOUGERE

*Laboratoire Mécanique, Modélisation et Procédés Propres (M2P2), UMR 6181 CNRS-Universités d'Aix-Marseille et Ecole Centrale Marseille, IMT La Jetée, Technopôle Château Gombert, 38 rue Frédéric Joliot-Curie , 13451 MARSEILLE Cedex 20*

## Résumé :

*En 2007, Wadih et al. montraient l'aspect intrigant de l'apparition de doigts ou grandes protubérances sur la courbe neutre lors de l'étude de la stabilité d'un écoulement purement oscillatoire. Ce phénomène a été observé de manière moindre par Blennerhassett et al (2006). Nous confirmons que ce phénomène provenant de la coalescence de deux ondes progressives et de directions opposées se produit aussi bien dans les instabilités de type Kelvin-Helmoltz que dans les instabilités de type Rayleigh-Bénard avec g-jitter.*

## Abstract :

*In 2007, Wadih et al. showed the intriguing effect of the appearance of fingers or large protrusions on the neutral curve during the stability analysis of a purely oscillatory flow. This phenomenon was observed in a lesser way by Blennerhassett et al. (2006). We confirm that this phenomenon due to the coalescence of two propagating waves in opposite directions occurs as well in the Kelvin-Helmoltz instabilities type as in Rayleigh-Bénard instabilities with g-jitter.*

**Mots clefs:** mécanique des fluides, écoulements oscillatoires, g-jitter, convection, stabilité linéaire, transition, théorie de Floquet, courbe neutre, coalescence, protubérances.

## 1 Introduction

En général, une bifurcation se fait de manière brutale en un point représentant l'évolution d'un système dynamique de manière adéquate, notamment par le choix approprié du paramètre de contrôle qui doit alors rendre compte des rapports des différentes forces antagonistes. La bifurcation correspond alors, mathématiquement à la perte d'unicité de la solution du système, physiquement au changement de son caractère. Théoriquement, on ne peut donc transiter d'un état d'équilibre à un autre qu'en traversant un seuil critique qui doit être représenté par un point. Dans ces conditions, les possibilités de contrôle expérimental de cette transition ne peuvent avoir de sens que dans le cas où des signes avant-coureurs antérieurs à ce seuil critique sont détectables.

L'objet de ce papier est de présenter des résultats montrant certains signes susceptibles dans deux cas au moins de prévenir l'avènement d'un seuil critique :

- seuil d'instabilité pour un écoulement purement oscillatoire dans un tube cylindrique
- démarrage de la convection naturelle sous l'effet des g-jitters dans un cylindre vertical chauffé par le bas.

Les courbes neutres dans le premier cas et les courbes de déstabilisation de l'état de repos dans l'autre cas présentent des caractéristiques nouvelles d'une grande importance pour la prévision des comportements dynamiques du fluide.

Jusqu'à une période récente, le comportement d'écoulements sous l'influence de contraintes périodiques était décrit et représenté par des courbes neutres, régulières et suffisamment lisses ne faisant ressortir qu'un léger effet de l'instationnarité. Ces descriptions restaient toujours au delà des seuils de transition vers des régimes moins ordonnés, observés par les études expérimentales.

Or, deux publications de Blennerhassett et al. [1] , [2] concernant la transition dans une couche de Stokes oscillante, dont la première est parue en 2002 puis la seconde en 2006 viennent justifier une nouvelle

exploration des écoulements oscillatoires dans l'objectif d'en prédire correctement les différents modes de transition. Leurs conclusions mettent à jour certaines légères saillies qui, au voisinage de certains nombres d'ondes, rendent la courbe neutre moins lisse et moins régulière que celles obtenues jusqu'à récemment.

Nous présentons dans cette étude l'exploration étendue à plusieurs pulsations de la contrainte instationnaire qui montre que ces saillies sont en fait de véritables protubérances ou doigts qui permettent légitimement de parler de deux courbes neutres : l'une intérieure qui correspond à un seuil critique assez tardif et une autre qui rend ce seuil plus faible. Nous pouvons interpréter ce mécanisme de génération de doigts sur la courbe neutre :

- d'un point de vue mathématique par un dédoublement du module des deux exposants de Floquet principaux en devenant réels
- d'un point de vue physique par la coalescence de deux ondes de perturbation progressives en opposition de phase.

Ce mécanisme est en fait générique, et produit une alternance de zones à valeurs complexes et de zones à valeurs réelles. Lorsque la transition a lieu dans une zone à valeur réelle, un doigt apparaît sur la courbe neutre diminuant le seuil critique et s'insérant dans une seconde courbe plus proche de l'axe des nombres d'ondes.

Le but est donc de dégager les premiers renseignements concernant l'altération des zones de stabilité connues dans le cas stationnaire, lorsque le mécanisme physique est soumis à une contrainte instationnaire quelconque produisant des protubérances. Dans un premier temps, le cas d'un écoulement sous l'effet d'un gradient de pression périodique dans une conduite cylindrique d'extension infinie est considéré. Nous avons déterminé les exposants de Floquet dans le cas d'une amplitude arbitraire, en particulier finie des oscillations du débit de l'écoulement afin de tracer la dépendance entre le nombre de Reynolds vibrationnel et le nombre d'onde de propagation des premiers modes d'instabilité. Dans un second temps, le cas de l'influence des g-jitters est soumis à la même analyse et présente bien un comportement qui rappelle par trop d'aspects, l'alternance de zones de stabilité et d'instabilité, connue dans le cas de l'équation de Mathieu.

## 2 Cas de l'écoulement à débit oscillatoire

On considère un écoulement dans une conduite cylindrique de longueur infinie dont le débit oscillatoire est de la forme  $Q = Q_0 \sin(\omega t)$ .

### 2.1 Formulation mathématique

L'étude mathématique présentée par Siouffi et al. [3] et Wadih et al. [4] aboutit au système différentiel du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{G} \quad (1)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{C}$  dépendent de  $\alpha$  et de  $\Omega$  et se résolvent analytiquement, tandis que la matrice  $\mathbf{B}$  dépend de  $\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $R_e$  et de l'écoulement de base  $\bar{u}$ . On trouve que  $\mathbf{A}$  est une matrice diagonale,  $\mathbf{C}$  une matrice symétrique donc inversible et  $\mathbf{B}$  peut s'écrire sous la forme de la somme de 2 matrices, ce qui donne une nouvelle écriture de ce système différentiel :

$$\frac{d\mathbf{G}}{d\tau} = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{G} \quad (2)$$

avec  $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{S} + iR_e(\mathbf{P}_1 \cos \tau + \mathbf{P}_2 \sin \tau)$

Les matrices  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  étant des matrices réelles dépendant de  $\alpha$  et de  $\Omega$ .

Pour résoudre le système (2), nous avons adopté, après différents essais, une méthode de résolution à pas adaptatif, la méthode de Runge-Kutta Fehlberg.

La bibliothèque CLAPACK utilisée ne proposant que des modules de résolutions de systèmes différentiels à valeurs réelles, nous avons transformé le système (2) à N équations complexes en un système à 2N équations réelles en introduisant la partie réelle et la partie imaginaire de  $G$ :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_r \\ \mathbf{G}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & -R_e(\mathbf{P}_1 \cos \tau + \mathbf{P}_2 \sin \tau) \\ R_e(\mathbf{P}_1 \cos \tau + \mathbf{P}_2 \sin \tau) & \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_r \\ \mathbf{G}_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

C'est donc ce système (3) que l'on résout avec la matrice identité comme conditions initiales. La matrice fondamentale est ensuite mise sous forme complexe et déterminée à  $\tau = 2\pi$ . On calcule alors les valeurs propres de cette matrice fondamentale complexe ainsi que les exposants de Floquet.

## 2.2 Résultats

Nous avons étudié la stabilité de l'écoulement oscillatoire pour différentes valeurs de  $\Omega$  comprises entre 60 et 200.

Pour  $\Omega$  de 60 à 70 on note qu'il n'y a qu'une seule valeur propre significative (la deuxième par ordre décroissant du module est à E-10 pour  $\Omega = 60$  et E-7 pour  $\Omega = 70$ ). Cette valeur propre est toujours réelle positive et strictement croissante en fonction du nombre de Reynolds. La courbe neutre obtenue est de forme classique de type parabolique avec toutefois apparition d'une légère altération de forme dans le voisinage du seuil critique lorsqu'on atteint  $\Omega = 70$ .

Pour  $\Omega = 80$  la 2<sup>ème</sup> valeur propre commence à devenir faiblement significative et elle est de l'ordre de E-2 à E-3. Elles sont toutes les deux réelles positives, mais leur croissance n'est plus monotone en fonction du nombre de Reynolds.

A partir de  $\Omega = 90$ , il y a 2 valeurs propres significatives, devenant alternativement complexes conjuguées et réelles en fonction du nombre de Reynolds et lorsqu'elles sont réelles elles sont positives. La 3<sup>ème</sup> valeur propre est réelle de l'ordre de E-7. La figure suivante montre l'évolution du module des 2 premières valeurs propres significatives :

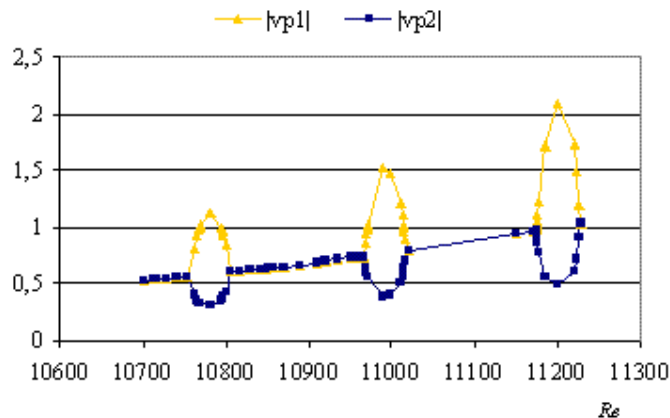


FIG. 1 – Evolution du module des 2 premières valeurs propres en fonction de  $Re$  pour  $\alpha = 1.63$  et  $\Omega = 90$ .

On constate avant la traversée du seuil critique qui correspond à un module de valeur 1, que les deux valeurs propres sont alternativement de même module (valeurs complexes conjuguées) ou de modules différents (valeurs réelles) correspondant à la coalescence de deux ondes progressives en opposition de phase.

Quand  $\Omega$  augmente, il apparaît progressivement de nouvelles valeurs propres plus faibles. Lorsque les 2 premières valeurs propres de plus fort module sont réelles, leur écart diminue et ce sur un intervalle de nombre de Reynolds de plus en plus petit, ce qui conduit à penser que les 2 modes propres les plus forts tendent vers des valeurs complexes conjuguées.

Les doigts les plus amples sont obtenus pour  $\Omega = 90$ . Cela implique qu'il y a une alternance de zones instables et stables, et la courbe neutre obtenue est de la forme :

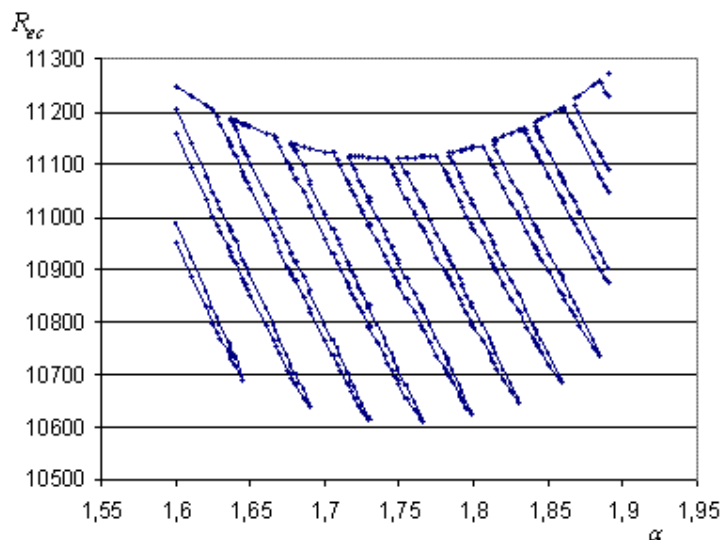


FIG. 2 – Courbe neutre nombre de Reynolds critique en fonction du nombre d’onde pour  $\Omega = 90$ .

On peut parler d’une courbe intérieure de type parabolique et d’une courbe extérieure passant par l’extrémité des protubérances également parabolique, et entre ces 2 courbes il y a une zone intermédiaire de transition. L’ensemble des courbes neutres pour différentes valeurs de  $\Omega$  est portée sur le graphe suivant :

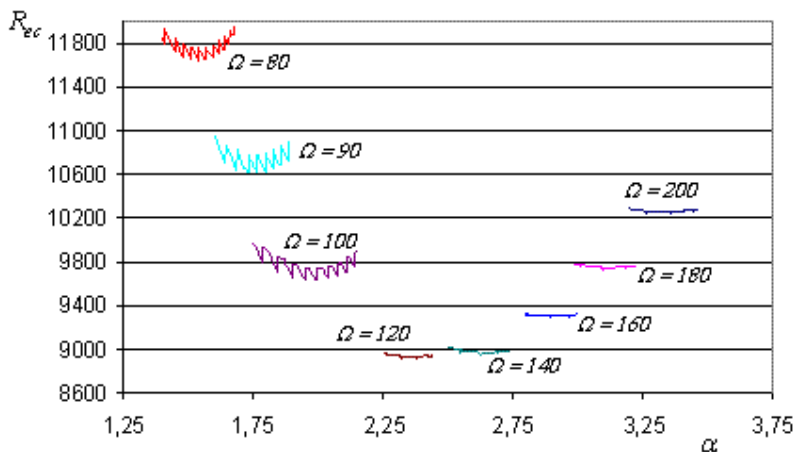


FIG. 3 – Courbes neutres selon différentes valeurs de la pulsation de l’écoulement.

### 3 Cas d’un cylindre vertical dans un milieu de g-jitter et chauffé par le bas

On considère ici un cylindre vertical de longueur infinie soumis à un gradient thermique négatif dans un milieu de micro gravité variable de la forme  $g(t) = g_0 + b^* \cos(\omega t)$ .

#### 3.1 Formulation mathématique

Les équations qui régissent le système s’écrivent [5] et [6]:

$$\begin{cases} -\frac{1}{Pr} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla^2 \mathbf{U} + R(t) \theta \bar{\mathbf{k}} - \Delta p = 0 \\ \nabla \mathbf{U} = 0 \\ -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla^2 \theta + w = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Où  $\nabla^2$  et  $\Delta$  sont définis en coordonnées cylindriques,  $\mathbf{U}$  étant le vecteur vitesse,  $\theta$  la température,  $Pr$  le

nombre de Prandtl,  $R(t)$  le nombre de Rayleigh  $R(t) = \frac{\alpha g(t) \gamma r_0^4}{\nu \kappa}$  et  $w$  la composante verticale de la vitesse.

En introduisant le nombre de Rayleigh moyen  $R_0 = \frac{\alpha g_0 \gamma r_0^4}{\nu \kappa}$ , et  $R_v = \frac{\alpha b^* \gamma r_0^4}{\nu \kappa}$ , on peut écrire  $R(t) = R_0 + R_v \cos \omega t$  et les équations (4) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{M}_0 \mathbf{X} - R_v \cos(\omega t) \mathbf{N} \mathbf{X} \quad (5)$$

$$\text{Où } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} w(r,t) \\ \theta(r,t) \end{pmatrix}, \mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \text{Pr} \cdot P_n & -\text{Pr} \cdot R_0 \\ -1 & P_n \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Pr} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_n \text{ étant l'opérateur : } P_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}$$

Dans le cas de parois parfaitement conductrices, le système (5) devient pour le problème asymétrique ( $n=1$ ):

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -\text{Pr} \xi^2 H - \text{Pr} R(t) T \\ \frac{dT}{dt} = -H - \xi^2 T \end{cases} \quad (6)$$

Où  $\xi$  est la première racine positive de la fonction de Bessel  $J_1$ .

On obtient un système de la forme  $\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{M}(t)\mathbf{G}$  où  $\mathbf{M}$  est une matrice (2x2), qu'on résout de la même manière que dans le cas de l'écoulement précédent.

### 3.2 Résultats

Pour les petites valeurs de  $R_v$ , on constate peu d'effet des g-jitters. On tend rapidement vers le cas stationnaire. Pour des valeurs plus grandes de  $R_v$ , on observe un effet plus important pour les petites pulsations (figures 4 et 5) :

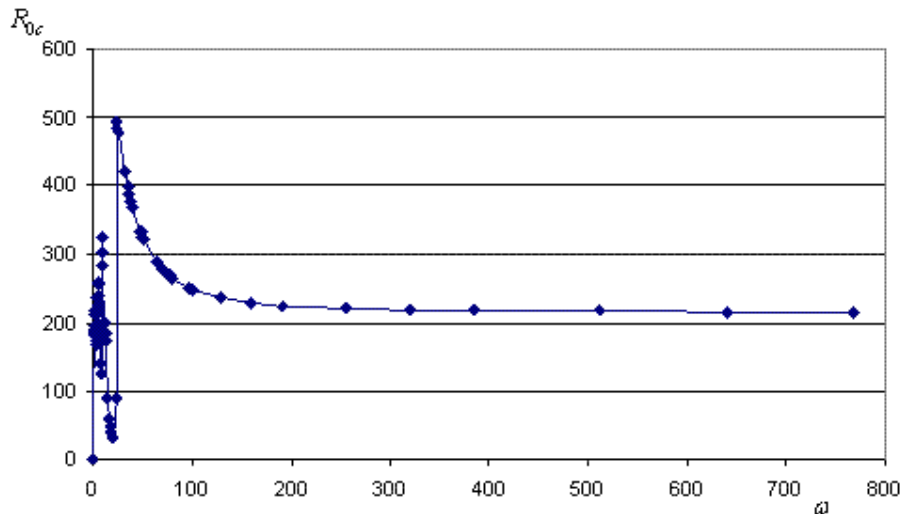


FIG. 4 – Evolution du Rayleigh moyen critique en fonction de la pulsation pour  $R_v=1000$  et  $\text{Pr}=0.7$ .

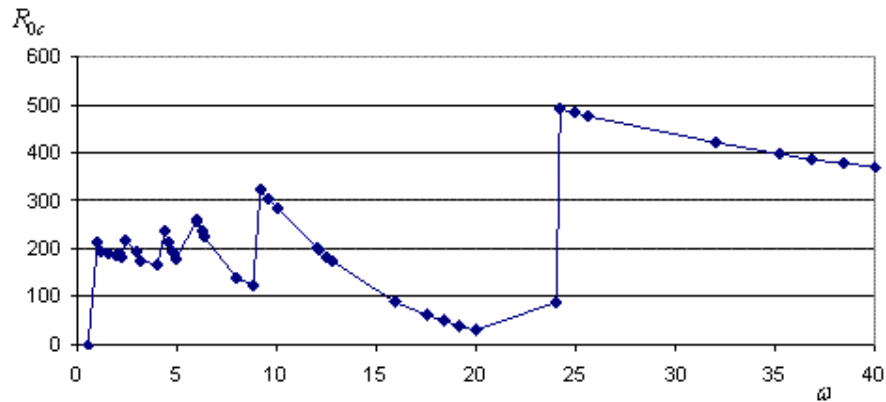


FIG. 5 –Rayleigh moyen critique pour les faibles valeurs de la pulsation pour  $R_v=1000$  et  $Pr=0.7$ .

## 4 Conclusion

On a dégagé dans cette étude l'influence des différents paramètres qui interviennent dans l'évolution dynamique d'un système soumis à une contrainte périodique.

Ainsi, c'est la fréquence qui a une influence drastique sur le comportement du système et sa transition vers le désordre dans le cas de l'écoulement oscillatoire ou vers un état de mouvement dans le cas d'un fluide chauffé en environnement de g-jitters.

Les courbes obtenues montrent bien le comportement erratique des exposants de Floquet et l'alternance de zones où ils sont complexes et de zones où ils sont réels correspondant à un dédoublement de leur module et la coalescence de deux ondes progressives juste avant la transition.

L'intérêt d'un tel phénomène réside dans la possibilité de contrecarrer le dédoublement par le contrôle à l'aide d'ondes externes de la coalescence des deux ondes de perturbation et donc de retarder le seuil de transition.

## References

- [1] Blennerhassett P. J. & Bassom A. P., The linear stability of flat Stokes layers, *J. Fluid Mech.*, 464, 393-410, 2002.
- [2] Blennerhassett P. J. & Bassom A. P., The linear stability of high-frequency oscillatory flow in a channel, *J. Fluid Mech.*, 556, 1-25, 2006.
- [3] Siouffi M., Carrion S. and Wadiah M., Présentation d'une méthode d'étude de la stabilité linéaire d'écoulements instationnaires, *C.R. Mécanique*, 330, 641-645, 2002.
- [4] Wadiah M., Carrion S., Chen P.G., Fougère D., Roux B., On the complexity of the neutral curve of oscillatory flows, *Chaos Complexity and Transport, proceedings of the CCT'07*, ed. World Scientific, 255-261, 2008.
- [5] Wadiah M. & Roux B., Natural convection in a vertical cylinder under gravity modulation: case of a long cylinder, *J. Fluid Mech.*, 193, 391-415, 1988.
- [6] Wadiah M. & Roux B., Natural convection for supercritical conditions in oscillatory microgravity environment (g-jitter), *Advances Space Res.*, 6, n°5, 45-50, 1986.