

Comparaison de différentes méthodes numériques pour l'étude de la collision dipôle-paroi

UMBERTO D'ORTONA^a, DMITRY KOLOMENSKIY^a, KAI SCHNEIDER^a, EMMANUEL LERICHE^b,
GEERT KEETELS^c, HERMAN CLERCX^c ET BRAHIM BEN BEYA^d

a. Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Procédés Propres, UMR 6181, Marseille, France.

b. Laboratoire de Mathématique Unifiée de Saint-Etienne, EA 3989, Saint-Etienne, France.

c. Dep. of Physics, Eindhoven University of Technology, P.O. Box 513, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands.

d. Faculté des Sciences de Tunis, Département de Physique, campus universitaire 2092 El-Manar II, Tunisie.

Résumé :

Nous présentons une comparaison entre différentes méthodes numériques pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine fini : différences finies, volumes finis, méthode spectrale Fourier, ondelettes, méthode spectrale Chebyshev et gaz de Boltzmann, pour l'étude de la collision entre un dipôle et une paroi non glissante. La précision obtenue en fonction de la résolution, l'ordre des méthodes et les temps de calculs requis sont présentés pour toutes les méthodes.

Abstract :

We present a comparison between several numerical methods to solve the incompressible Navier-Stokes equations in a bounded domain : finite differences, finite volumes, spectral methods with either Fourier or Chebyshev, wavelets, and Lattice-Boltzmann methods are used, to study the collision between a dipole and a no-slip wall. The precision depending on the grid size, the discretization order and the CPU times are compared for the different methods.

Mots clefs : Benchmark dipôle-paroi, différences finies, volumes finis, méthodes spectrales, ondelettes

1 Introduction

La simulation d'écoulements turbulents au voisinage d'une paroi reste un challenge majeur en mécanique des fluides. De nombreux schémas numériques existent, chacun ayant avantages et inconvénients. Dans ce travail nous allons présenter une comparaison entre différents schémas numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible au voisinage d'une paroi non-glissante. Les méthodes utilisées sont : les différences finies, les volumes finis, spectrale Fourier avec pénalisation en volume, méthode en base d'ondelettes avec pénalisation en volume, spectrale Chebyshev et gaz de Boltzmann sur réseau. Pour chaque méthode la précision en fonction de la taille du maillage sera étudiée, le temps de calcul en fonction de la taille du maillage et le temps de calcul nécessaire pour atteindre une précision choisie.

Le problème de mécanique des fluides étudié est la collision d'un dipôle se propageant dans un fluide de densité $\rho = 1$. Le domaine d'intégration Ω_f est un domaine carré de longueur réduite 2 (figure 1). Le champ initial de vorticité, $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est la vitesse, est composé de deux monopoles voisins contrarotatifs placés au centre du domaine. Le champ de vorticité de chaque monopole est donné par :

$$\omega_0 = \omega_e(1 - (r/r_0)^2)\exp(-(r/r_0)^2), \quad (1)$$

où r est la distance au centre du monopole, r_0 le rayon adimensionné et ω_e la vorticité maximale au centre du monopole. La position initiale des deux monopoles est (0, 0.1) et (0, -0.1), avec pour rayon $r_0 = 0.1$ et pour vorticité maximale $\omega_e = 299.528385375226$. Avec ce choix de valeurs, l'énergie cinétique initiale vaut $E(0) = 2$, l'ensrophie initiale vaut $Z(0) \simeq 800$, le Reynolds initial est $Re=1000$ et la vitesse induite par les monopoles aux parois est quasiment nulle [1, 2].

2 Les méthodes numériques

L'écoulement bidimensionnel étudié suit les équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

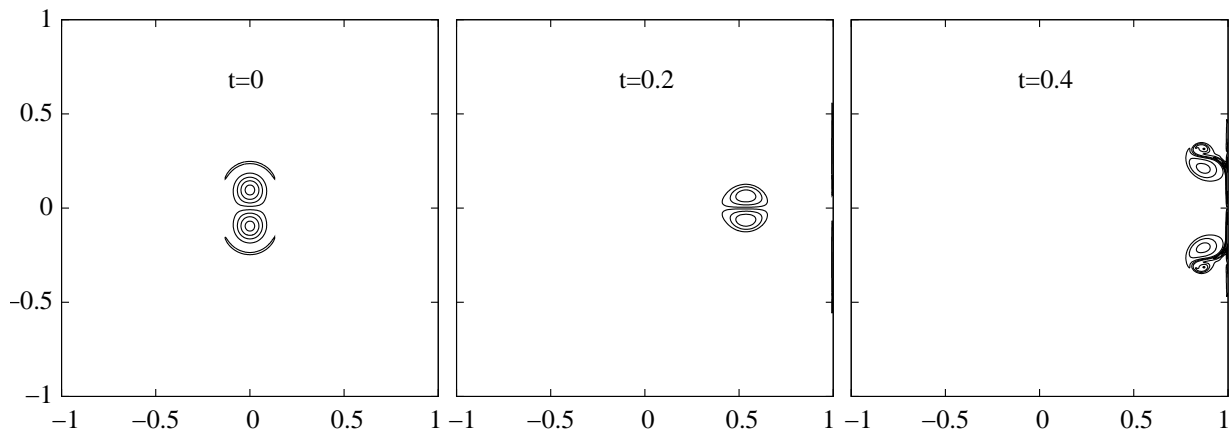


FIG. 1 – Isolignes de vorticité ($\omega = -360, -280, \dots, 360$) aux instants $t=0, 0.2$ et 0.4 .

où \mathbf{u} est la vitesse, p la pression et ν la viscosité cinématique. Les conditions de Dirichlet, c'est à dire vitesse nulle, sont appliquées aux parois.

2.1 Différences finies

Le modèle utilisé est classique, c'est l'approche MAC (Marker and Cell) développé par Harlow *et al.* à Los Alamos [3]. Elle utilise une méthode de projection proposée par Chorin sur un maillage décalé. Pour l'intégration en temps, les schémas Euler premier ordre et Runge-Kutta second ordre ont été utilisés sans différence de précision.

2.2 Volumes finis

Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur une grille décalée, et le schéma QUICK au troisième ordre est utilisé pour les termes advectifs. Pour le schéma temporel, une méthode Euler Backwards implicite au second ordre est utilisée. Une méthode de projection assure l'incompressibilité. L'équation de Poisson est résolue par une méthode multigrille. Pour plus de détails sur cette méthode, voir Cheick *et al.* [4].

2.3 Méthode spectrale Fourier avec pénalisation en volume

Dans les méthodes pénalisées, les parois sont introduites en modifiant l'équation de Navier-Stokes dans les zones où l'écoulement n'a pas lieu [5]. L'équation (2) est complétée en ajoutant un terme de Darcy :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\epsilon} H \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

où H est une fonction masque qui vaut 1 pour les mailles dans les parois et sinon 0, et ϵ est un paramètre qui contrôle la porosité des parois. Dans ce travail nous prendrons $\epsilon = 10^{-4}$. Ici le domaine de calcul fait 2.667 de côté. En pratique, quelques points dans le domaine solide sont suffisants [2].

Dans cette méthode Fourier-Galerkin, on utilise la formulation vitesse-vorticité. La vitesse et la vorticité sont développées en séries de Fourier tronquées. La règle des 2/3 est utilisée pour éviter les problèmes d'aliasing. Le schéma Adams-Bashforth au deuxième ordre est utilisé pour la discrétisation temporelle, avec l'intégration exacte du terme visqueux. Plus de détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans [6].

2.4 Méthode en base d'ondelettes avec pénalisation en volume

La méthode "Coherent Vortex Simulation" (CVS) [7, 8] est basée sur la décomposition en ondelettes des équations de Navier-Stokes. La formulation vitesse-vorticité est également utilisée et les parois sont introduites par la technique de pénalisation présentée dans la section 2.3. La résolution temporelle utilise un schéma semi-implicite au second ordre (Euler-Backwards) pour le terme diffusif et le schéma Adams-Bashforth pour les termes advectifs et de pénalisation. Pour la discrétisation spatiale, un schéma de Petrov-Galerkin est utilisé. Grâce à la décomposition en ondelettes, le maillage s'adapte dynamiquement à l'écoulement.

2.5 Méthode de Chebyshev

Dans ce modèle les variables (vitesse et pression) sont développées en polynômes de Chebyshev de degré N pour chaque dimension de l'espace. Une technique de projection-diffusion permet de découpler le calcul de la

vitesse et de la pression. Une méthode classique de collocation est appliquée aux points de Chebyshev-Gauss-Lobatto pour fixer les conditions aux bords. La résolution temporelle est faite grâce à un schéma second ordre de type "Euler Backward Differentiation". Les termes visqueux sont traités implicitement, et les termes non-linéaires sont calculés explicitement avec un schéma d'interpolation au second ordre. Pour plus de détails sur cette méthode, notée CHEB(Leriche), voir Leriche *et al.* [9, 10]. Une seconde méthode Chebyshev a été utilisée, nommée CHEB(Clercx) par la suite, elle utilise un schéma Adams-Bashforth pour les termes d'advection, Crank-Nicolson pour les termes visqueux, et utilise une procédure Lanczos tau pour imposer les conditions aux parois [11]. Dans la mesure où ce second schéma donne des résultats assez équivalents au premier, seul l'erreur en fonction du maillage sera donnée.

2.6 Gaz de Boltzmann sur réseau

Cette méthode simule l'évolution de densités de particules sur un réseau. A chaque pas de temps, les particules se déplacent et entrent en collision. Les collisions sont telles que la masse, l'énergie et l'impulsion sont conservées. Frisch *et al.* [12] ont montré que pour un réseau triangulaire bidimensionnel, ce système reproduisait les équation de Navier-Stokes incompressible. Ici, nous allons utiliser le modèle D2Q9 proposé par Qiang *et al.* [13] qui présente un certain nombre d'avantages : il est construit sur un réseau carré, il utilise des densités de particules ce qui permet une mesure de la vitesse instantanée et implémente un schéma de relaxation qui permet d'atteindre des viscosités plus faibles. L'équation d'évolution des particules est donnée par :

$$N_i(t + 1, \mathbf{x} + \mathbf{c}_i) = (1 - \omega)N_i(t, \mathbf{x}) + \omega N_{ie}(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

où N_i sont les densités de particules i de vitesses \mathbf{c}_i , N_{ie} sont les densités d'équilibre et ω le facteur de relaxation qui contrôle la viscosité.

3 Convergence des schémas

Pour chacun des schémas, nous allons présenter l'évolution de l'erreur δ_N en fonction de la taille du maillage à l'instant $t = 0.4$. L'erreur choisie sera une erreur en norme L^2 sur le champ de vorticité :

$$\delta_N = \frac{\|\omega(N) - \omega_{ref}(N_{max})\|_{L^2}}{\|\omega_{ref}(N_{max})\|_{L^\infty}} \quad (6)$$

où N est le nombre de mailles dans chaque direction. Pour le champ de vorticité de référence, nous allons utiliser conjointement le champ de vorticité maximal de la méthode (auto-comparaison) et le champ qui nous semble être le plus précis : Chebyshev CHEB(Leriche) avec un maillage $N = 721$. Pour la méthode de Chebyshev, seule l'auto-comparaison sera possible.

Pour chacune des méthodes, un ajustement sera proposé. A partir de cet ajustement, le nombre de mailles $N_{\delta_{ref}}$ nécessaire pour atteindre la précision $\delta_{ref} = 4 \cdot 10^{-4}$ sera calculé.

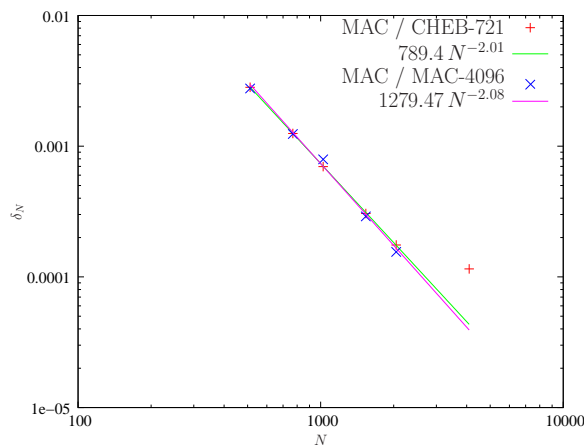


FIG. 2 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode des différences finies.

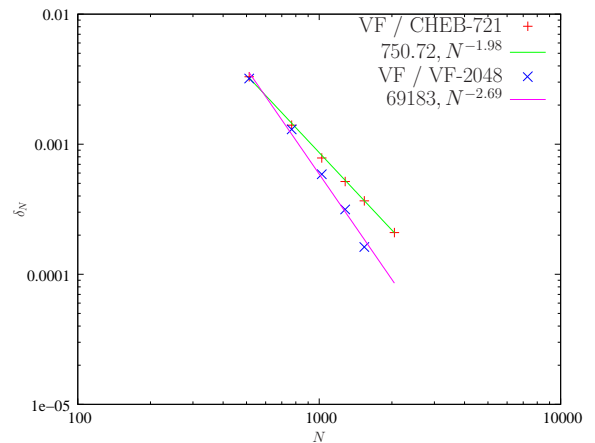


FIG. 3 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode des volumes finis.

3.1 Différences finies

La figure 2 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles en utilisant comme référence CHEB-721 ou en utilisant la résolution maximale du schéma différences finies (MAC-4096). On peut voir grâce à un ajustement par des lois de puissance qu'on obtient bien un schéma au second ordre. La résolution la plus élevée (MAC-4096) présente une erreur qui ne s'aligne pas avec les résolutions plus faibles. On peut envisager plusieurs hypothèses : une précision équivalente à la référence CHEB-721 a été atteinte, ou qu'une nouvelle erreur négligeable jusque là devient importante, comme par exemple le schéma temporel. Ce point n'est pas utilisé pour l'ajustement. Le maillage nécessaire pour atteindre la précision choisie $\delta_{ref} = 4 \cdot 10^{-4}$ est de : $N_{\delta_{ref}} = (\delta_{ref}/789.4)^{(-1/2.01)} = 1355$.

3.2 Volumes finis

La figure 3 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles en utilisant comme référence CHEB-721 ou en utilisant la résolution maximale du schéma volumes finis (VF-2048). Quand la référence est CHEB-721, on trouve bien une convergence au second ordre. Dans l'auto-comparaison, on trouve une convergence supérieure à 2 qui est surprenante. Par la suite nous utiliserons la régression avec CHEB-721 comme référence, ce qui donne $N_{\delta_{ref}} = 1474$.

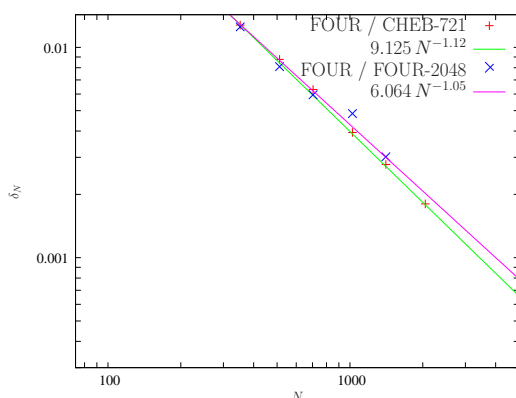


FIG. 4 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode spectrale Fourier.

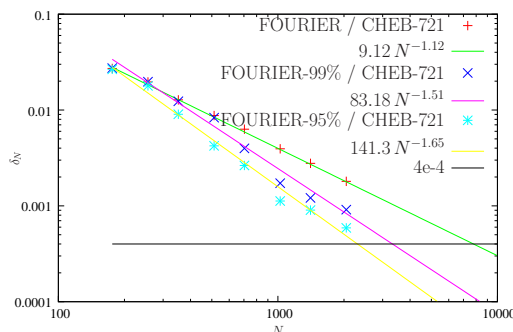


FIG. 5 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode Fourier en considérant la totalité du domaine ou en ne gardant que 99% ou 95% du domaine dans chaque direction.

3.3 Méthode spectrale Fourier avec pénalisation en volume

La figure 4 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles en utilisant comme référence CHEB-721 ou en utilisant la résolution maximale du schéma Fourier avec pénalisation (FOUR-2048). Dans les deux cas, on obtient une convergence d'ordre légèrement supérieur à 1. En utilisant CHEB-721 comme référence, on obtient $N_{\delta_{ref}} = 7784$. Le maillage nécessaire est beaucoup plus important que les schémas précédents.

Ceci vient du fait que les conditions aux limites ne sont pas satisfaites exactement, mais modélisées par la technique de pénalisation, comme expliqué dans Keetels *et al.* [2]. Si on calcule l'erreur L^2 uniquement à l'intérieur du domaine fluide en excluant les parois, le taux de convergence est amélioré, comme le montre la figure 5. Dans le cas où 95% du domaine sont gardés dans chaque direction, seulement 2304 mailles dans chaque direction sont nécessaires pour obtenir une erreur de $4 \cdot 10^{-4}$. On peut remarquer que si on exclus les parois de la même façon avec le schéma de différences finies, où les conditions aux limites sont satisfaites exactement, il n'y a aucun gain dans l'ordre de convergence. Ceci montre que l'erreur introduite par la pénalisation en volume reste localisée près de la paroi.

3.4 Méthode en base d'ondelettes avec pénalisation en volume

La figure 6 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles en utilisant comme référence CHEB-721 ou en utilisant la résolution maximale du schéma CVS avec pénalisation (CVS-1024). Dans les deux cas, l'ajustement par une loi de puissance donne un ordre autour de 1.5 ce qui est meilleur que pour la méthode précédente. En utilisant CHEB-721 comme référence on obtient $N_{\delta_{ref}} = 2579$. Si on ne garde que 95% du domaine dans chaque direction, on obtient $N_{\delta_{ref}} = 2473$.

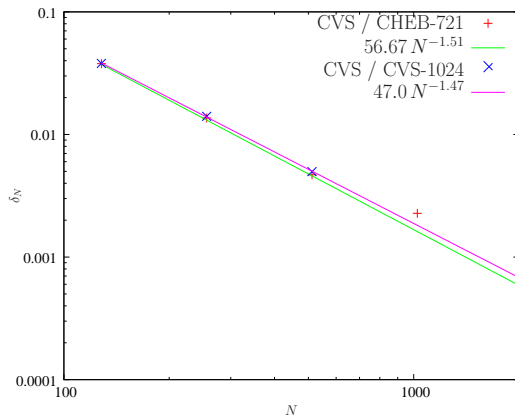


FIG. 6 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode CVS avec pénalisation.

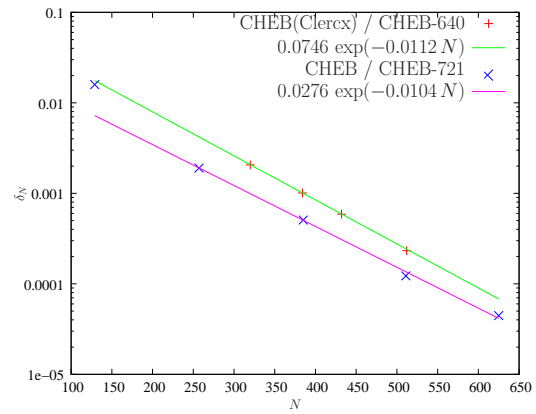


FIG. 7 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode spectrale Chebyshev.

3.5 Méthode de Chebyshev

La figure 7 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles pour les deux méthodes spectrales Chebyshev. Dans les deux cas, la résolution maximale du schéma est utilisée comme référence et une interpolation par une exponentielle décroissante est réalisée. Le cas le plus favorable donne $N_{\delta_{ref}} = 407$.

3.6 Gaz de Boltzmann sur réseau

La figure 8 présente l'évolution de l'erreur δ_N en fonction du nombre de mailles en utilisant comme référence CHEB-721 ou en utilisant la résolution maximale du schéma gaz de Boltzmann sur réseau (LBA-4096). L'ajustement par une loi de puissance donne un ordre intermédiaire entre 1.5 et 2. Quand la référence est CHEB-721, les deux résolutions les plus importantes ne s'alignent plus sur les précédentes. On suppose qu'une précision équivalente à la référence CHEB-721 a été atteinte. Ces deux points ne sont pas utilisés pour l'ajustement. Les points LBA-256, de résolution trop faible, ne sont pas utilisés également. En utilisant CHEB-721 comme référence on obtient $N_{\delta_{ref}} = 1082$.

4 Temps CPU

Nous comparons les temps CPU en fonction de la résolution pour chaque méthode. Cette comparaison n'est pas directe car les codes ont été exécutés sur des machines différentes. Nous avons essayé de corriger ceci en estimant la puissance des processeurs pour avoir le temps équivalent sur un processeur Pentium 3GHz. Par ailleurs l'optimisation des codes n'est pas la même. Certains utilisent des solveurs très performants, par exemple multigrille pour les volumes finis, d'autres moins, par exemple SOR pour MAC. Finalement certains codes adaptent le pas de temps en fonction du maillage, d'autres ont gardé un pas de temps fixe. Nous sommes donc conscient que la comparaison ne pourra être que qualitative.

La figure 9 présente les temps CPU nécessaires pour chaque méthode en fonction du maillage et des ajustements par des lois de puissance. On peut voir que toutes les méthodes ont une loi de puissance voisine de 3. A partir des ajustements des temps CPU en fonction du nombre de mailles dans chaque direction, et du nombre de mailles nécessaire pour obtenir l'erreur de référence $N_{\delta_{ref}}$, nous pouvons calculer pour toutes les méthodes le temps nécessaire pour effectuer la simulation avec la précision choisie : les différences finies 3918 minutes, les volumes finis 6638 minutes, la méthode de Chebyshev 2303 minutes et les gaz de Boltzmann 3612 minutes. Pour la méthode de Fourier et la méthode en base ondelettes, les temps ne sont pas donnés car ils sont plus importants et nécessitent une extrapolation. Il faut noter que le choix d'une autre précision de référence aurait donné des temps CPU différents car les ordres des méthodes ne sont pas les mêmes.

5 Conclusions

La comparaison des différentes méthodes montre que les méthodes volumes finis, différences finies, spectrale Chebyshev et gaz de Boltzmann sont d'efficacité comparable. La différence de temps entre ces méthodes peut tout à fait s'expliquer par le choix d'un solveur ou d'une optimisation plus ou moins poussée. Par contre les deux méthodes pénalisées ne donnent des résultats comparables que si l'on exclu les parois. Si l'on garde l'erreur au voisinage des parois, les temps CPU deviennent plus importants.

Ce problème étant particulièrement raide à la paroi, il constitue donc un défi pour la méthode pénalisation. Néanmoins, celle-ci permet de traiter des géométries quelconques qui peuvent même changer au cours du

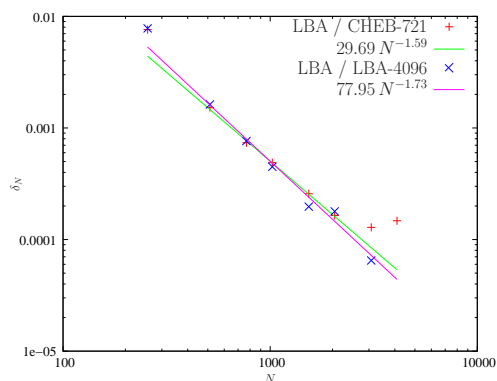


FIG. 8 – Erreur δ_N en norme L^2 en fonction du nombre de points dans chaque direction N pour la méthode gaz de Boltzmann sur réseau.

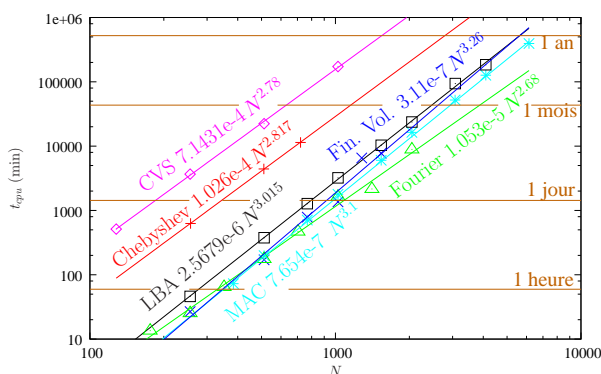


FIG. 9 – Temps CPU en fonction du nombre de mailles pour toutes les méthodes, et ajustements par des lois de puissances.

temps, tout en gardant une méthode numérique efficace sur grille Cartésienne [14]. La méthode en base d'ondelettes, en combinaison avec la méthode de pénalisation permet de raffiner automatiquement la grille, pas seulement à la géométrie du problème, mais également à la dynamique de l'écoulement. Pourtant, une optimisation du code reste indispensable. Des améliorations possibles de la méthode de pénalisation sont l'application des techniques de post-traitement, comme fait dans [2], et l'augmentation de l'ordre de convergence de la méthode de pénalisation.

Les méthodes volumes finis, différences finies et gaz de Boltzmann ont donné des temps intéressants bien qu'elles soient d'ordre 2. L'intérêt de ces méthodes est leur simplicité et la facilité de programmation.

C'est la méthode de Chebyshev qui a donné le temps d'exécution le plus rapide. La géométrie simple et la présence de parois la rend particulièrement bien adaptée à ce problème.

Références

- [1] Clercx H. J. H. and Bruneau C. H. The normal and oblique collision of a dipole with a no-slip boundary. *Comput. Fluids*, 35, 245, 2006.
- [2] Keetels G. H., D'Ortona U., Kramer W., Clercx H. J. H., Schneider K., and van Heijst G. J. F. Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier-Stokes equations with volume-penalization : convergence of a dipole-wall collision. *J. Comp. Phys.*, 227, 919, 2007.
- [3] Harlow F. H. and Welsh J. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8, 2182–2189, 1965.
- [4] Cheikh B. N., Beya B. B., and Lili T. Benchmark solution for time-dependent natural convection flows with an accelerated full-multigrid method. *Num. Heat Transfer*, 52, 131–151, 2007.
- [5] Angot P., Bruneau C.-H., and Fabrie P. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Num. Mathematik*, 81 (4), 497–520, 1999.
- [6] Schneider K. The numerical simulation of transient flow behaviour in chemical reactors using a penalization method. *Comput. Fluids*, 34, 1223, 2005.
- [7] Farge M., Schneider K., and Kevlahan N. K. R. Non-gaussianity and Coherent Vortex Simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. *Phys. Fluids*, 11, 2187, 1997.
- [8] Farge M. and Schneider K. Coherent Vortex Simulation (CVS) a semi-deterministic turbulence model using wavelets. *Flow Turbul. Combust.*, 66, 393, 2001.
- [9] Leriche E. and Labrosse G. High-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting : Numerical investigations of their comparative properties. *SIAM J. Scient. Comput.*, 22 (4), 1386, 2000.
- [10] Leriche E., Perchat E., Labrosse G., and Deville M. O. Numerical evaluation of the accuracy and stability properties of high-order direct Stokes solvers with or without temporal splitting. *J. Scient. Comput.*, 26 (1), 25–43, 2006.
- [11] Clercx H. J. H. A spectral solver for the Navier-Stokes equations in the velocity-vorticity formulation for flows with two nonperiodic directions. *J. Comp. Phys.*, 137, 186–211, 1997.
- [12] Frisch U., Hasslacher B., and Pomeau Y. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, 56, 1505, 1986.
- [13] Qian Y. H., d'Humières D., and Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhys. Lett.*, 17 (6), 479–484, 1992.
- [14] Kolomenskiy D. and Schneider K. A Fourier spectral method for the Navier-Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *J. Comp. Phys.*, accepted, 2009.