

# Modèle réduit par couplage POD-fonction caractéristique en interaction fluide structure

ERWAN LIBERGE, AZIZ HAMDOUNI

LEPTIAB Université de la Rochelle  
Avenue Michel Crépeau 17042 La Rochelle cedex1

## Résumé :

*La réduction de modèle par système dynamique d'ordre bas permet d'obtenir des modèles numériques dont le temps de résolution est très faible par rapport à une résolution classique. L'application de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) comme outil de réduction est maintenant répandue en mécanique des fluides et en interaction fluide structure (IFS). Trois méthodes de réductions de modèles en interaction fluide structure utilisant la POD sont ici détaillées.*

## Abstract :

*The reduced order modelling (ROM) by low order dynamical system gives computational models with very low computational time compared with a classical resolution. The proper orthogonal decomposition (POD) is a very powerful ROM tool in fluid mechanics, structural mechanics and fluid structure interaction. Three ROM methods using the POD in fluid structure interaction are exposed in this article.*

**Mots clés :** Interaction fluide structure, réduction de modèle, décomposition orthogonale aux valeurs propres.

## 1 Introduction

La réduction de modèle en mécanique est un enjeu important, c'est un des outils réalistes pour réaliser le contrôle actif en structure et en fluide. La réduction de modèle grâce à la technique de décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) s'est imposée en mécanique des fluides depuis les années 90, elle a été utilisée sur de nombreuses configurations [1, 2, 3]. Une des explications de ce succès, est liée au fait que les premiers modes POD sont identifiables aux structures cohérentes qui sont d'une grande importance pour les écoulements turbulents. En dynamique des structures, les modes POD n'ont pas d'interprétation évidente. Cependant, cette technique est aussi utilisée comme méthode de réduction dans ce domaine [4]. En interaction fluide structure, différentes approches utilisant la POD ont été développées [5, 6, 7]. Même si les approches explicitées dans les deux premières références [5, 6] donnent de bons résultats, il nous semble cependant que la formulation utilisée fait l'impasse sur la difficulté liée au caractère mobile du domaine fluide.

Liberge et al [7, 8] ont proposé une approche POD-multiphasique pour les problèmes d'interaction fluide structure. Un des inconvénients de la méthode proposée est le calcul de coefficients à chaque pas temps, ce qui peut s'avérer coûteux. Nous proposons ici un dérivé de cette méthode qui s'affranchit de cette contrainte. Cette dernière formulation est également comparée à deux autres méthodes de réduction en interaction fluide structure, la première consistant en une subdivision de domaine et la seconde, analogue aux méthodes développées par [5, 6], consiste en la projection de la formulation discrétisée sur la base POD.

## 2 La décomposition orthogonale aux valeurs propres

Depuis son introduction en mécanique des fluides par Lumley [2] dans le but d'extraire les structures cohérentes d'un écoulement turbulent, la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) est devenue un outil de réduction de modèle couramment utilisé. Pour une bibliographie des exemples d'applications en mécanique des fluides, le lecteur pourra se référer à [1, 2, 3].

La méthode POD consiste à rechercher les vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale du champ de vitesse. Sirovitch [3] a ensuite montré que la recherche des vecteurs propres de l'opérateur de corrélation spatiale pouvait se ramener sous certaines conditions à la recherche des vecteurs propres d'un opérateur de corrélation temporelle de taille beaucoup plus faible. C'est cette dernière formulation que nous utiliserons par la suite.

On note  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un domaine spatial de dimension  $d = 1, 2$  ou  $3$ ,  $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$  un repère orthonormé lié à  $\Omega$ ,  $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$  un interval de temps et  $x \in \Omega$  une variable d'espace. Soit  $v(t) \in \mathcal{V}$  un champ de vitesse de l'écoulement,  $\mathcal{V}$  étant un espace de Hilbert.

On note  $M$  le nombre de clichés du champ de vitesse de l'écoulement pris sur une période  $\mathbf{T}$  et  $(\Phi_i), i = 1, \dots, n$  la base POD de  $v$ ,  $n$  étant la dimension de la base. La snapshot POD consiste à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \int_{\Omega} v(x, t_i) \cdot v(x, t_j) dx A_k^j = \lambda_k A_k^i \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (1)$$

$\int_{\Omega} dx$  étant le produit scalaire de  $\mathcal{V} = L^2(\Omega)$ , que l'on notera  $(\bullet, \bullet)$  dans la suite. La base POD  $(\Phi_i)$  est ensuite obtenue à partir des coefficients  $A_k$  et des clichés de  $v$ .

$$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^M A_k^i v(x, t_i), \text{ pour } k = 1, \dots, n \quad (2)$$

La base ainsi obtenue est orthonormée, à divergence nulle dans le cas d'un fluide incompressible, et la contribution relative de chaque mode  $k$  en énergie est représentée par la valeur propre  $\lambda_k$ . La base ainsi construite est optimale au sens énergétique, c'est à dire que pour un nombre fini  $n$  de modes, on ne peut construire une base capturant plus l'énergie de l'écoulement étudié que celle-ci.

### 3 Application de la POD à la réduction de modèle en Interaction Fluide Structure

Dans la suite on note  $\Omega_f(t)$  (respectivement  $\Omega_s(t)$ ) le domaine fluide (respectivement solide) à l'instant  $t \in \mathbf{T}$ ,  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ ,  $\Gamma_I$  l'interface entre les domaines fluide et structure, et  $\mathbf{n}$  la normale sortante au domaine solide.

#### 3.1 Projection des équations discrétisées

Plusieurs approches sont possibles en Interaction fluide structure. [5, 6] proposent une formulation discrète consistant à projeter les équations discrétisées sur la base POD, exprimée alors sous forme matricielle. La base POD est construite à partir de clichés du champ de vitesse, exprimé alors sur les noeuds, sans tenir compte de la position de ceux-ci. Le produit scalaire utilisé est alors le produit scalaire discret usuel de  $\mathbb{R}^{\text{Nombre de Noeuds}}$ . Les résultats obtenus dans le cadre d'étude de problèmes aéroélastiques donnent de bons résultats ([6]). Il nous semble cependant que cette approche fait l'impasse sur le caractère mobile des domaines et que cela peut avoir des conséquences importantes pour des déplacements plus importants du domaine structure. La problématique s'exerce aussi pour la recherche des modes POD par le problème (1), puisque celui-ci nécessite le calcul du produit scalaire du champ de vitesse à deux instants différents. Or, si ce calcul est effectué pour le champ de vitesse du domaine fluide par exemple, à deux instants différents les domaines fluides ne sont pas identiques. L'erreur induite sur la base POD ne semble pas prêter à conséquence pour les cas où l'amplitude de déplacement du solide est faible comme dans les cas étudiés par [5, 6]. Lors de tests sur l'équation de Burgers monodimensionnelle couplée avec un ressort, Liberge [9] a constaté que en imposant des déplacements plus importants du domaine solide, cette formulation ne semblait plus adaptée.

#### 3.2 Formulation multiphasique

Pour remédier à cette problématique des domaines mobiles, Liberge et al. [7, 8] et Liberge [9] ont proposé une approche multiphasique pour les problèmes d'interactions fluide structure. L'inconvénient de la méthode alors proposée est qu'elle nécessite le calcul de coefficients à chaque

pas de temps. Nous présentons ici une dérivation de cette méthode se soustrayant de cette contrainte. Même si l'approche peut être généralisée aux cas où le solide est déformable, nous nous restreignons aux cas où le solide est considéré comme étant rigide. Pour la construction de la base POD, les clichés utilisés sont issus de différents calculs d'interaction fluide structure de type ALE. La base POD est ensuite calculée à partir d'une interpolation de ces clichés sur un maillage fixe, déterminé de telle sorte qu'il puisse contenir tout les maillages des clichés. Cette méthode de calcul ne donne pas une base différente d'un calcul par POD "classique" [5, 6], celles-ci étant identiques ou combinaison linéaire les unes des autres. La différence essentielle tient dans le fait que ce ne sont pas les équations ALE qui sont projetées sur la base POD, mais les équations de Navier-Stokes multiphasiques, les domaines solides et fluides étant considérés comme un même milieu multiphasique par une méthode analogue à la méthode des domaines fictifs [10]. Le principe de cette approche, consiste à prolonger les équations de Navier-Stokes au domaine solide en introduisant une contrainte supplémentaire (équation 3) liée au caractère rigide de celui-ci.

$$\mathbf{D}(v) = 0 \quad \forall x \in \Omega_s(t) \quad (3)$$

Cette contrainte additionnelle est prise en compte dans la formulation variationnelle (équation 4) associée au problème par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et un facteur de pénalisation  $\mu_s$ .  $\forall v^* \in H(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) v^* d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \mathbf{D}(v) : \mathbf{D}(v^*) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_f} \mathbf{D}(\lambda) : \mathbf{D}(v^*) d\Omega = 0 \quad (4)$$

où

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_f \mathbb{I}_{\Omega_f} + \rho_s (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \\ \mu &= \mu_f \mathbb{I}_{\Omega_f} + \mu_s (1 - \mathbb{I}_{\Omega_f}) \end{aligned} \quad (5)$$

$\rho_f$  et  $\mu_f$  (respectivement  $\rho_s$  et  $\mu_s$ ) étant la densité et la viscosité du domaine fluide (respectivement solide) et  $\mathbb{I}_{\Omega_f}$  la fonction caractéristique du domaine fluide

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_f(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

dont l'évolution suit l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + v \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \quad (7)$$

On considère ensuite une base POD  $\Phi_i^v, i = 1, \dots, n$  pour le champ de vitesse globale  $v$  :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \Phi_i(x) \quad (8)$$

et une base POD  $\Phi_i^{fc}, i = 1, \dots, n_{fc}$  pour la fonction caractéristique :

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_{fc}} b_i(t) \Phi_i^{fc}(x) \quad (9)$$

En injectant ces décompositions dans la formulation variationnelle 4 et dans 7, projetée sur  $v^* = \Phi_i, i = 1, \dots, n$ , on obtient le système algébrique en  $a$  et  $b$  suivant :  $\forall n = 1, \dots, n$  et  $l = 1, \dots, n_1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{n_1} \frac{da_i}{dt} b_p \mathcal{A}_{ipn} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^{n_1} a_i a_j b_p \mathcal{B}_{ijpn} + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{n_1} a_i b_p \mathcal{C}_{ipn} &= \sum_{p=1}^{n_1} b_p \mathcal{F}_{pn} \\ \frac{db_l}{dt} + \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^{n_1} a_i b_p \mathcal{D}_{ipl} &= 0 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ipn} &= f_1(\Phi_i^v, \Phi_p^{fc}, \Phi_n^v) & \mathcal{B}_{ijpn} &= g(\Phi_i^v, \Phi_j^v, \Phi_p^{fc}, \Phi_n^v) \\ \mathcal{C}_{ipn} &= f_2(\Phi_i^v, \Phi_p^{fc}, \Phi_n^v) & \mathcal{F}_{pn} &= h(\Phi_p^{fc}, \Phi_n^v) \\ \mathcal{D}_{ipl} &= l(\Phi_i^v, \Phi_p^{fc}, \Phi_l^{fc}) \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_1, f_2, l, g, h$  correspondent à l'intégration sur le domaine  $\Omega$  des différentes combinaisons des modes POD  $\Phi^v$  et  $\Phi^{fc}$ . On considère pour le multiplicateur de Lagrange la même base POD que pour le champ de vitesse. Tout les coefficients peuvent donc être calculés une seule fois au début du calcul, ceux-ci ne dépendant pas du temps.

### 3.3 Décomposition de domaine

Considérons le cas d'un écoulement autour d'un solide immergé (figure 1)  $\Omega_s$ . On divise le domaine fluide en deux zones, une zone  $\Omega_f^1$  où le maillage est fixe et une autre zone  $\Omega_f^2$  où le maillage est mobile suivant le mouvement du domaine solide.

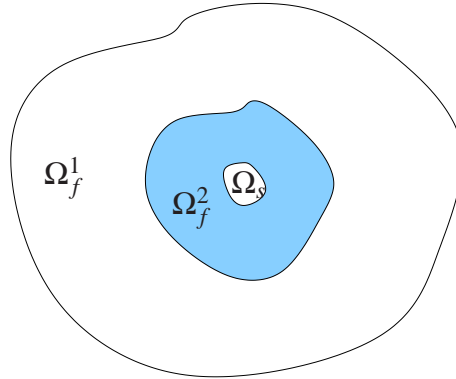


FIG. 1 – Réduction de modèle par décomposition de domaine

On choisit dans le domaine  $\Omega_f^1$  où le maillage est fixe de modéliser l'écoulement par un système dynamique réduit dont la base POD et d'utiliser dans le domaine fluide mobile  $\Omega_f^2$  la résolution du système couplé complet en ALE. En réduisant ainsi le nombre de noeuds sur lesquels s'effectue le problème couplé complet on peut réduire grandement la taille du problème à résoudre.

## 4 Application

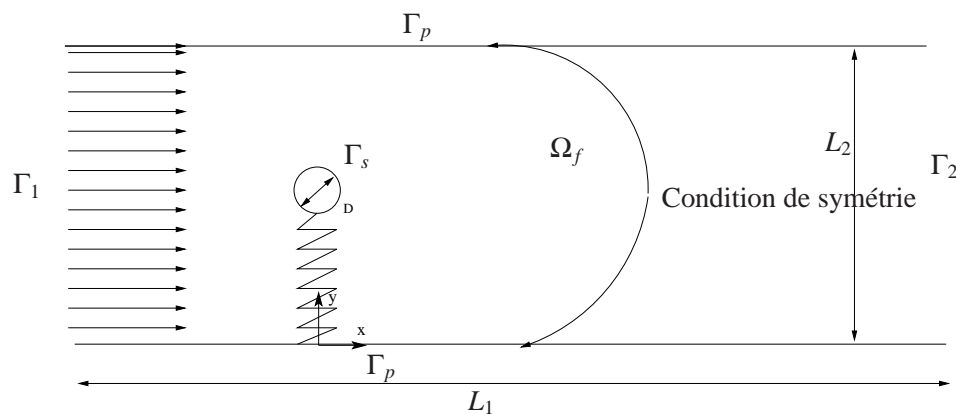


FIG. 2 – Description du domaine d'étude

Les méthodes sont testées sur l'écoulement autour d'un cylindre à Reynolds 1690. Le déplacement du cylindre est bloqué selon l'axe  $\mathbf{x}_1$  et couplé avec un ressort selon l'axe  $\mathbf{x}_2$ . Des conditions de symétrie sont imposées sur les parois supérieures et inférieures du canal. On considère un cylindre de rayon  $R = 0.025$  m relié à un ressort de raideur  $k = 0.559$  N.m<sup>-1</sup> et d'amortissement 2.782 N.s.m<sup>-1</sup>.

L'écoulement fluide est obtenu à l'aide du logiciel Saturne [11] (développé par EDF) par un modèle de turbulence de type RANS instationnaire (modèle  $k - \omega$ ). L'équation de mouvement du cylindre est résolue par un programme intégré dans le code de calcul. Les clichés ont été pris sur un peu plus d'une période d'oscillation du cylindre, soit 150 clichés sur un intervalle de temps de 1.5 secondes.

La première méthode permet d'être implémentée directement dans Saturne [11], de telle sorte que le schéma de résolution du modèle réduit soit le même que celui ayant servi à calculer les snapshots. Le modèle réduit sur le domaine fluide fixe est implémenté de la même manière pour la troisième méthode. Pour cette dernière méthode, Saturne est couplé avec lui-même, une version

résolvant le modèle réduit, l'autre le problème d'interaction fluide structure en ALE sur maillage mobile.

La deuxième méthode est résolue par un programme externe.

Pour les trois cas, le champ de vitesse est très bien reconstruit et on observe figure 3 un bon calcul de la position du centre de gravité du solide.

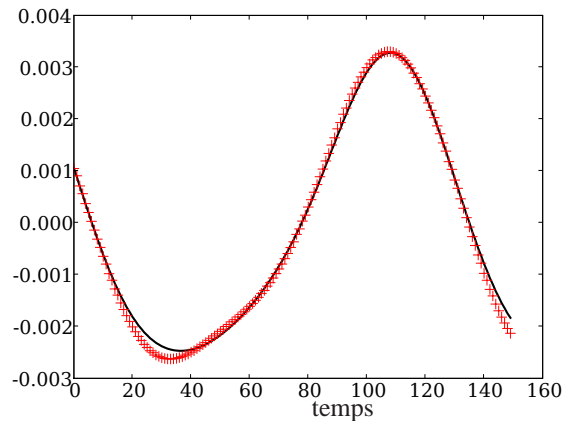


FIG. 3 – Position du centre de gravité : – solution initiale, + Solution obtenue par modèle réduit

Les champs de vitesses initiaux et ceux obtenus par la méthode multiphasique sont comparés dans les figures 4 et 5.

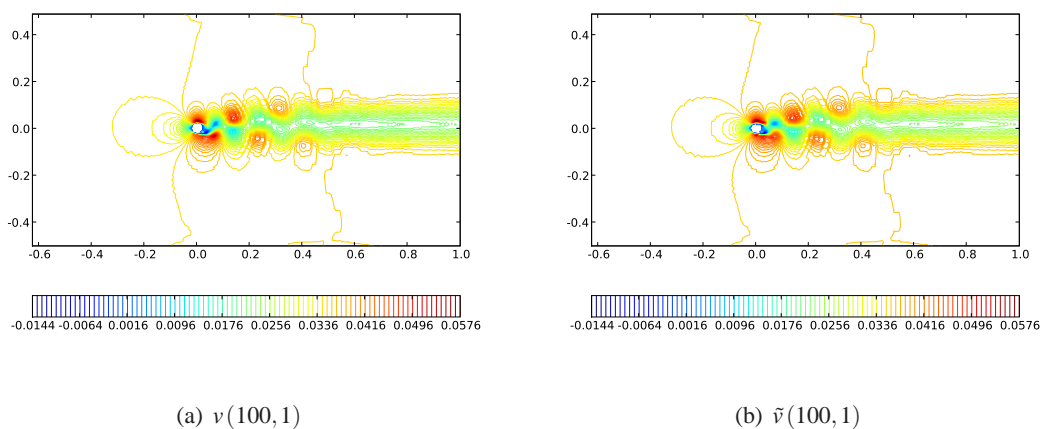


FIG. 4 – Première composante du champ de vitesse : à gauche : 100<sup>ième</sup> cliché du champ de vitesse, à droite : Champ de vitesse reconstruit à partir du système dynamique réduit multiphasique

## 5 Conclusion

Dans cet article, trois différentes manières d'aborder la réduction de modèle en interaction fluide structure sont présentées. Le point commun de ces trois méthodes est d'utiliser la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). La première projette les équations discrétisées sur la base POD, et donc peut être directement implémentée dans un code courant. L'inconvénient étant que l'on ne tient pas compte du caractère mobile du maillage, deux autres méthodes sont alors utilisées. Une consiste en une approche multiphasique du problème d'interaction fluide structure lorsque le solide peut être assimilé à un solide rigide ayant un nombre fini de degrés de liberté, l'autre en une décomposition de domaine. Pour cette dernière méthode, un modèle réduit POD classique est résolu sur une partie du domaine fixe, et la partie qui nécessite d'être remaillée est résolue en ALE. Ces trois méthodes sont testées sur le cas d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre oscillant.

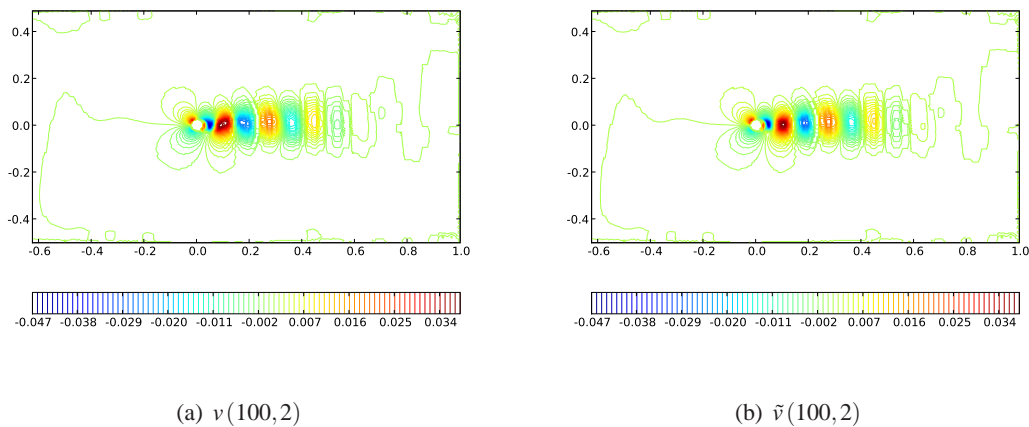


FIG. 5 – Deuxième composante du champ de vitesse : à gauche : 100<sup>ième</sup> cliché du champ de vitesse, à droite : Champ de vitesse reconstruit à partir du système dynamique réduit multiphasique

## Références

- [1] Allery C., Beghein C., and Hamdouni A. Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Commun Nonlin Sci Numer Simul*, 10(8), 907–920, December 2005.
- [2] Lumley J. L. and Poje A. Low-dimensional models for flows with density fluctuations. *Physics of Fluids*, 9, 2023–2031, July 1997.
- [3] Sirovich L., Ball K., and Keefe L. planes waves and structure in turbulent channel flow. *Physics of fluids A2*, 12, 2217–2226, 1990.
- [4] Trindade M. A., Wolter C., and Sampaio R. Karhunen-loève decomposition of coupled axial/bending vibrations of beams subject to impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 279(issues 3-5), 1015–1036, 2005.
- [5] Anttonen J. S. R., King P. I., and Beran P. S. Pod-based reduced-order models with deforming grids. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(1-2), 41–62, 2003.
- [6] Lieu T., Farhat C., and Lesoinne M. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41-43), 5730–5742, 2006.
- [7] Liberge E., Benaouicha M., and Hamdouni A. Low order dynamical system for fluid rigid body interaction problem using pod method. *Int. Jnl. of Multiphysics*, 2(1), 59–81, 2008.
- [8] Liberge E., Benaouicha M., and Hamdouni A. Application de la réduction de modèle à l'interaction fluide structure. In 18<sup>ème</sup> congrès de mécanique, Grenoble, France, 2007.
- [9] Liberge E. Réduction de modèle par POD-Galerkin pour les problèmes d'Interaction Fluide Structure (Reduced Order Modeling by POD-Galerkin method in Fluid Structure Interaction). PhD thesis, La Rochelle University, 2008.
- [10] Glowinski R., Pan T. ., Hesla T. I., Joseph D. D., and Periaux J. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4), 241–267, 2000.
- [11] Code saturne : a finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows -industrial applications. *International Journal of Finite Volumes*, 1, 2004.