

# Simulation numérique des problèmes de rayonnement acoustique par la méthode des éléments finis de frontière

A. ALIA, M. AMDI, M. SOULI

LML, USTL, Cité Scientifique Villeneuve d'Ascq 59655

## Résumé :

*La BEM est l'une des méthodes les plus utilisées dans la simulation des problèmes acoustiques. La BEM variationnelle est caractérisée par une double intégrale surfacique ce qui rend le calcul des composantes du système linéaire extrêmement coûteux.*

*Dans cet article, nous utilisons une décomposition de domaines afin d'optimiser le temps de calcul du système linéaire par une interpolation des interactions lointaines des sous-domaines suffisamment éloignés.*

## Abstract :

*BEM is one of the most used methods for the simulation of acoustic problems. The variational BEM consists of a double surface integral making the computation of the linear system components very expensive in term of CPU time. In this article, we are using a domain decomposition in order to reduce the calculation time of the linear system. For that, the weak interaction between the subdomains sufficiently far are approximated by an interpolation.*

## Mots clefs : BEM, acoustique, interpolation, décomposition de domaine

## 1 Introduction

La méthode des éléments finis de surface (Boundary Element Method BEM) est très utilisée dans la simulation numérique de plusieurs problèmes d'acoustique et de vibroacoustique. L'idée principale de la BEM est de transformer l'équation aux dérivées partielles gouvernant le problème en une équation intégrale basée sur la fonction de Green et de résoudre l'équation résultante numériquement.

Comparée à la méthode des éléments finis, la BEM consiste à discrétiser la surface du domaine acoustique. Pour les géométries complexes, la BEM s'avère plus intéressante car le maillage de la surface est souvent plus simple à obtenir que le maillage volumique. Cependant, la BEM engendre des systèmes linéaires dont les matrices sont complexes et denses. Le système linéaire est non symétrique dans le cas de la BEM en collocation et devient symétrique dans le cas de la BEM variationnelle.

Les principaux inconvénients de la BEM résident dans le calcul des composantes du système linéaire ainsi que sa résolution. L'optimisation de la BEM peut être atteinte en accélérant la phase d'intégration sans perdre trop de précision. Ceci peut être achevé en rendant le maillage plus grossier ou en simplifiant le modèle acoustique de manière à ne faire intervenir, dans les calculs, que les éléments qui contribuent effectivement au rayonnement acoustique [1]. Un autre moyen possible pour réduire le temps de calcul est de simplifier l'équation intégrale en se plaçant sous certaines hypothèses telles que l'approximation d'onde plane [2] et la méthode de Rayleigh [3].

Plusieurs techniques ont été développées afin d'optimiser la phase d'intégration en BEM se basant sur l'interpolation de matrice BEM [4], la fonction de Green [5] ou encore la solution finale [1]. En effet, Raveendra [4] a montré, pour des problèmes acoustiques internes, l'efficacité de l'interpolation quadratique de toute la matrice BEM.

Ce papier est basé sur l'interpolation de l'interaction lointaine dans la matrice BEM afin de réduire le temps de calcul de la matrice. L'interaction proche, contenant toutes les singularités, est calculée directement avec la BEM sans faire appel à une approximation. Ceci peut être obtenu par considération de la décomposition de domaine. Le présent article est organisé comme suit, dans la seconde section, les équations régissant le

problème sont brièvement rappelées. La troisième section introduit la technique d'interpolation adoptée et combinée à la décomposition du domaine. La section 4 est consacrée aux résultats numériques obtenus.

## 2 Equations du problème

L'équation intégrale de l'équation de Helmholtz

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

peut être déduite en utilisant le théorème de Green. Celle-ci permet le calcul de la pression acoustique en un point quelconque du domaine acoustique. Elle est donnée par

$$C(\vec{r})p(\vec{r}) = \int_{S_y} \left( G(\vec{r}, \vec{r}_y) \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n_y} - p(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_y)}{\partial n_y} \right) dS_y \quad (2)$$

où  $k = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde,  $c$  est la vitesse du son,  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation,  $p(\vec{r})$  est la pression en un point de vecteur " $\vec{r}$ ",  $G(\vec{r}, \vec{r}_y) = \exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}_y|) / 4\pi|\vec{r} - \vec{r}_y|$  est la fonction de Green, " $\vec{r}_y$ " est le vecteur position du point source situé sur la surface du domaine acoustique et  $C(\vec{r})$  est un terme résultant du traitement de l'intégrale singulière impliquant la fonction de Green.

Nous nous limitons, uniquement, à des problèmes du type Neumann pour lesquels la vitesse normale est imposée sur la surface du domaine acoustique. L'application de la méthode variationnelle nous permet d'écrire l'équation intégrale comme suit:

$$-i\rho\omega \int_{S_x} V_n \mu(\vec{r}_x) dS_x = \int_{S_x S_y} \frac{\partial^2 G(\vec{r}, \vec{r}_y)}{\partial n_x \partial n_y} \mu(\vec{r}_x) \mu(\vec{r}_y) dS_x dS_y \quad (3)$$

où  $\mu$  est le saut de pression de part et d'autre de la surface du domaine acoustique.

## 3 Interpolation et décomposition du domaine

Dans ce travail, nous nous intéressons à résoudre des problèmes acoustiques de taille moyenne ( $\approx 8000$  nœuds) en un temps raisonnable (quelques heures) pour des analyses multifréquentielles ( $\geq 700$  fréquences). Plusieurs méthodes ont été utilisées pour contourner le problème de mémoire souvent rencontré dans la BEM standard telle que la méthode des multi-pôles. Dans ce cas, la matrice est divisée en deux parties

$$A = A_{near} + A_{far} \quad (4)$$

où  $A_{far}$  est approximé par un développement de multi-pôles.

Le calcul de  $A_{far}$  et  $A_{near}$  est basé sur un algorithme de décomposition de domaine. Il consiste à diviser le maillage en des groupes de nœuds appelés sous-domaines. L'interaction de chaque sous-domaine avec lui-même est considérée comme proche et par conséquent elle représente le champs d'interaction proche. L'interaction entre deux sous-domaines différents est considérée comme lointaine. Ainsi, elle est plus appropriée pour être approximée.

Nous avons adopté la technique d'interpolation de la matrice afin d'approcher les interactions lointaines. Dans son article, Raveendra [4] a utilisé l'interpolation quadratique pour toutes les composantes de la matrice BEM. Dans ce travail, nous n'avons interpolé que les interactions lointaines par une interpolation quadratique afin de garantir la précision des résultats. En effet, la contribution la plus importante  $A_{near}$  est calculée sans aucune interpolation. Cette démarche nous permet de gagner en espace mémoire puisque les blocs de matrices correspondant aux interactions lointaines sont les seules à être sauvegardées en des fréquences prédéterminées. Par contre, les blocs de matrices correspondant aux interactions proches sont calculées pour chaque fréquence.

Comme la partie exponentielle de la fonction de Green peut être approximée par un polynôme dans une certaine gamme de fréquence, on peut admettre que les coefficients de la matrice BEM peuvent être, à

leur tour, approximés par le même polynôme et dans la même gamme de fréquence [4]. Ainsi, les coefficients de la matrice déjà calculés en des fréquences prédéterminées sont à utiliser pour l'estimation de la matrice en des fréquences intermédiaires.

Pour des problèmes de taille relativement petite, le stockage, dans un fichier binaire, des blocs de matrice dont l'interaction est lointaine reste, tout de même, raisonnable. Cependant, pour les problèmes de moyenne et grande taille, l'accès aux différentes composantes des matrices à partir du fichier s'avère très coûteux en terme de temps. C'est pourquoi, nous avons évité le stockage des matrices dans un fichier. Ceci impose une limitation quant à la taille des problèmes pouvant être traités par cette méthode en raison des besoins de stockage en mémoire des matrices à interpoler. D'un autre côté, l'utilisation de Gmres (Generalized Minimal RESidual) [6] comme méthode itérative de résolution du système contribue d'une manière significative à la limitation de la taille des problèmes pouvant être traités. En effet, dans cette méthode, nous avons besoin de stocker, à la fois, les vecteurs de Krylov ainsi que la matrice d'Heissenberg qui sont complexes tout comme la matrice BEM.

#### 4 Applications numériques

Dans cette application, le rayonnement d'une sphère pulsante de rayon de 0.5m est modélisé par 2400 éléments quadrilatères dans une gamme de fréquence de 10-1000 Hz. Cette sphère est animée d'une vitesse de 1 m/s. Initialement, ce problème est analysé en appliquant la BEM conventionnelle avec laquelle la solution a été calculée à chaque fréquence sans aucune considération de la décomposition du domaine. Dans une seconde étape, le problème est résolu en utilisant une interpolation quadratique et ensuite cubique d'un pas en fréquence de 50 Hz et ce pour différents nombres de sous-domaines.

Sur la figure 1, nous avons représenté la variation de la mémoire nécessaire pour l'interpolation quadratique et cubique des interactions lointaines normalisée par rapport à la mémoire de la BEM conventionnelle. Il est évident, comme le montre la figure 1, que l'interpolation quadratique utilise moins de place mémoire que l'interpolation cubique. De plus, quand le nombre de sous-domaines  $N$  augmente, la mémoire nécessaire au calcul augmente aussi. Cette croissance est rapide quand  $N$  est petit alors qu'elle devient faible pour les nombres de sous-domaines importants. Ceci peut être expliqué par le fait que pour deux petits différents nombres de sous-domaines, la différence des deux mémoires correspondantes devant être stockées est importante. Cette différence devient faible lorsque deux grands nombres de sous-domaines sont considérés.

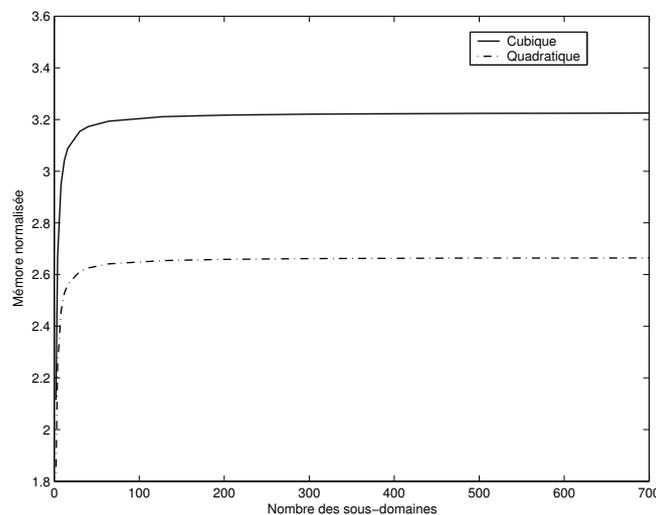


FIG. 1 – Variation de la mémoire normalisée en fonction du nombre des sous-domaines.

Sur la figure 2, nous avons représenté le temps CPU normalisé par rapport au temps BEM conventionnelle. Comme pour la mémoire, la même remarque peut être faite pour le temps CPU de l'interpolation quadratique et cubique. L'interpolation cubique nécessite plus de temps de calcul que l'interpolation quadratique. Toutes les deux restent plus efficaces que la méthode conventionnelle.

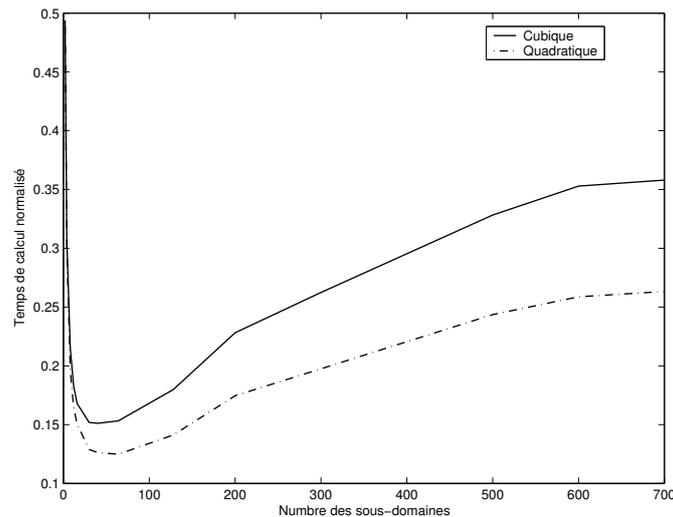


FIG. 2 – Variation du temps de calcul normalisé en fonction du nombre des sous-domaines.

Sur la figure 2, un minimum de temps de calcul est obtenu pour un nombre de sous-domaines optimum ( $N=64$ ). Ceci peut être expliqué en analysant la figure 3 dans laquelle les temps de calcul des interactions lointaines et proches sont représentées séparément. Il est clair que quand  $N$  augmente le nombre des nœuds composant les sous-domaines décroît et par conséquent le nombre des interactions proches à calculer devient de plus en plus petit. Cependant, dans ce cas, les interactions lointaines entre les différents sous-domaines augmente. Autrement dit, les interactions proches sont les plus coûteuses en terme de temps de calcul lorsque  $N$  est petit alors que les interactions lointaines demandent plus de temps de calcul pour les  $N$  grands.

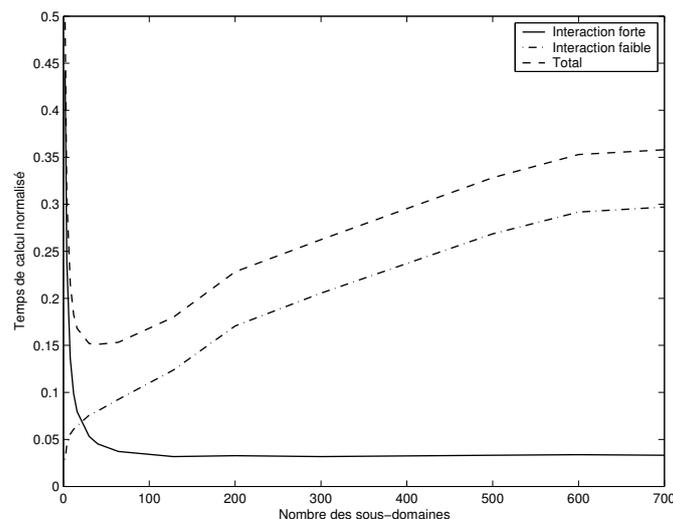


FIG. 3 – Variation du temps de calcul des interactions lointaines et proches normalisé en fonction du nombre des sous-domaines.

Dans cette seconde application, nous avons considéré une sphère pulsante de rayon 1m excitée par une vitesse de 1 m/s dans la gamme de fréquence [10-60] Hz. Ainsi, nous avons considéré un pas d'interpolation quadratique de 50Hz. La pression acoustique est calculée chaque Hz. Nous avons considéré 3 maillages différents de taille moyenne: 2402, 5402 et 7352 nœuds. Ceci nous permettrait d'étudier l'influence de la taille du maillage sur le temps de calcul.

Sur la figure 4, nous avons représenté, en fonction du nombre des domaines, la variation du temps de calcul de la matrice BEM interpolée (quadratique) normalisé par rapport au temps de calcul de la matrice BEM standard. Nous remarquons la même tendance pour les trois maillages: une diminution du temps de calcul à fur et à mesure que le nombre des sous-domaines augmente jusqu'à ce que la courbe atteigne un minimum de temps de calcul correspondant à un nombre de domaines optimum. A partir de ce nombre de sous-domaines, le temps de calcul a tendance à augmenter. D'un autre coté, dans le cas d'un nombre petit de sous-domaines, nous remarquons que lorsque le nombre de nœuds augmente le gain en temps diminue. Cette différence en

gain diminue à fur et à mesure que le nombre des sous-domaines augmente jusqu'à ce qu'elle devienne petite.

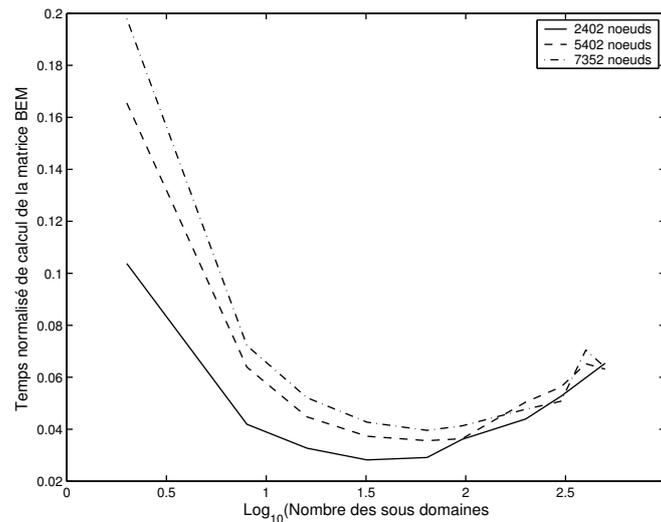


FIG. 4 – Variation du temps de calcul des interactions lointaines et proches normalisé en fonction du nombre des sous-domaines pour 3 maillages différents.

Sur la figure (5), nous avons représenté la variation de la pression acoustique en fonction de la fréquence rayonnée par la sphère pulsante en deux points: le centre de la sphère et un point extérieur à la sphère et distant de 4m de son centre. Il est à noter que pour les points extérieurs, un problème dit des fréquences irrégulières apparaît. Celui-ci se manifeste par l'apparition de pics parasites qui s'ajoutent à la réponse acoustique du problème. Le traitement de ce problème ne constitue pas l'objet de ce présent travail. Nous avons considéré un pas de temps de 40Hz et 50Hz respectivement. Nous remarquons que l'interpolation avec un pas de 40Hz et 50Hz donnent des résultats en bonne concordance l'une avec l'autre. Néanmoins, l'interpolation avec un pas de 50Hz donne lieu à des pics aux fréquences de résonance d'amplitude encore plus importante que celle de l'interpolation de 40Hz. En effet, plus le pas d'interpolation est petit et plus la précision est grande.

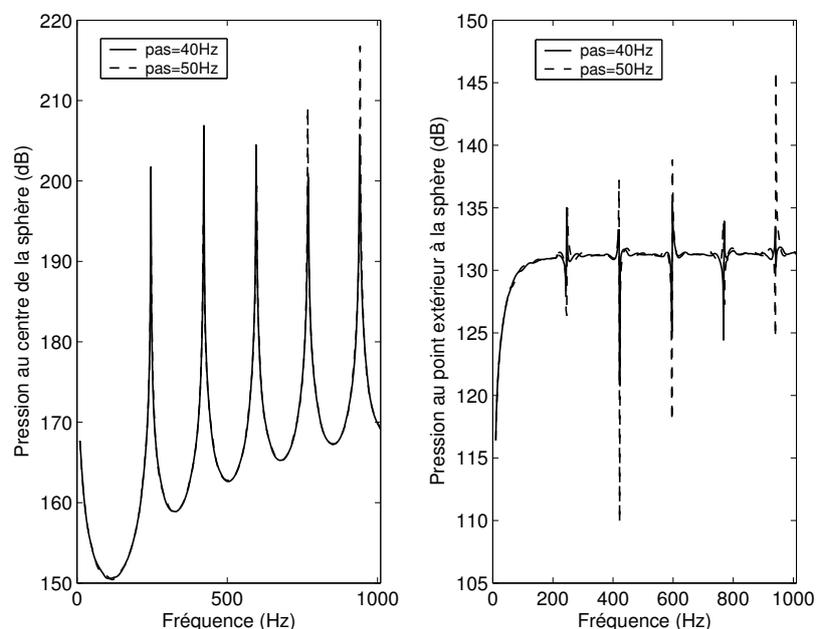


FIG. 5 – Pression acoustique en dB (Référence 20  $\mu$ Pa) aux points d'observation pour un pas d'interpolation de 40 Hz et 50 Hz .

L'augmentation du pas d'interpolation peut donner lieu à des résultats erronés tels qu'il est montré sur la figure (6). Le choix du pas d'interpolation est donc d'une grande importance pour l'obtention de bons résultats.

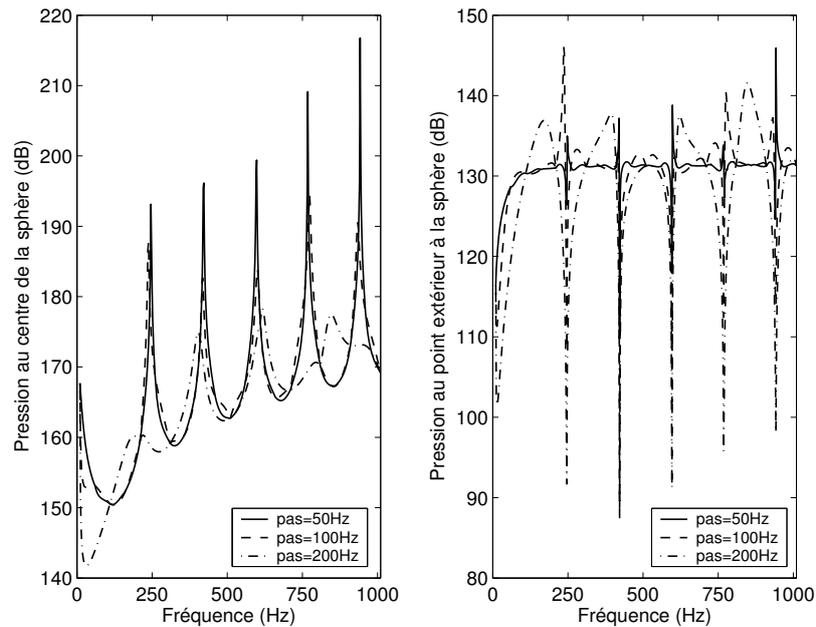


FIG. 6 – Effet du pas d'interpolation sur la pression acoustique rayonnée calculée en dB (Référence 20  $\mu$ Pa).

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons utilisé une décomposition de domaines afin d'optimiser le temps de calcul du système linéaire par une interpolation des interactions lointaines des sous-domaines suffisamment éloignés. Les interactions proches, se faisant au sein du même domaine, sont calculées par la BEM standard. Les résultats numériques obtenus montrent un gain en terme de temps de calcul au détriment de la mémoire. En effet, l'utilisation de l'interpolation quadratique ou cubique nécessite le stockage de trois ou quatre matrices respectivement. Ceci limite l'utilisation de cette méthode pour des problèmes de taille ne dépassant pas 8000 éléments. Pour ces derniers, la méthode des multi-pôles reste une méthode incontournable.

Les résultats numériques ont montré l'effet du pas d'interpolation sur le résultat numérique. Un pas d'interpolation important peut donner lieu à des résultats complètement erronés. D'où le besoin d'un choix judicieux du pas d'interpolation permettant à la fois d'optimiser le temps de calcul tout en assurant des résultats satisfaisants en terme de précision.

D'un autre côté, ils montrent que les interactions lointaines sont les plus coûteuses pour un grand nombre de sous-domaines alors que les interactions proches le sont pour un petit nombre de sous-domaines. D'où l'apparition d'un nombre de sous-domaines optimum pour lequel un minimum de temps de calcul est atteint. Ainsi pour une meilleure application de cette méthode, l'utilisation de ce nombre optimal est indispensable.

## Références

- [1] Estorff O. V., Effort to reduce computation time in numerical acoustics - An overview, *Acta acustica united with acustica*, 89, 1-13, 2003.
- [2] Herrin D. W., Martinus F, Wu .T W. and Seybert A. F., A new look at the high frequency boundary element and Rayleigh integral approximations, *SAE Noise & Vibration Conference and Exhibition*, Grand Traverse, MI, USA Inc 03NVC-114, Mai 2003.
- [3] Estorff O. V., Tylkowski B. and Scarth P., Sound radiation of two engine blocks by the BEM and Rayleigh method 2nd Worldwide Sysnoise Users Meeting, Leuven, Belgium 19-12 June, 1995.
- [4] Raveendra S. T., An efficient indirect boundary element technique for multi-frequency acoustic analysis *Int. J. Numer. Engng.*, 44, 59-76, 1999.
- [5] Vanhille C. and Lavie A., An efficient tool for multifrequency analysis in acoustic scattering by boundary element method *Acustica* 84, 884-93, 1998.
- [6] Barrett R., M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Poszo, C. Romine and H. V. D Vorst, *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods*, SIAM , Philadelphia, 19-21, 1994.