

# Propagation guidée d'ondes de cisaillement horizontales dans des plaques solides rugueuses

T. VALIER-BRASIER, C. POTEL, M. BRUNEAU

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM), UMR-CNRS 6613, Université du Maine, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9, France

## Résumé

*La propagation d'ondes de cisaillement à polarisation horizontale (ondes SH) dans des guides d'ondes isotropes à surfaces rugueuses fait apparaître des mécanismes de couplage de modes guidés. La nouvelle modélisation de ces mécanismes proposée ici repose sur la formulation intégrale du problème aux limites posé, et les solutions sont construites à partir de développements sur les modes du guide à géométrie compatible, extérieur au guide réel. Les résultats obtenus pour des rugosités périodiques sont en accord avec des résultats extraits de la littérature.*

## Abstract

*Shear horizontal waves (SH-waves) propagating in isotropic rough waveguide involve mechanisms of modes coupling. The new modelling of these mechanisms presented here relies on the integral formulation in the frame of a modal approach, using the set of the eigenfunctions of a plate with regularly shaped surfaces that bound outwardly the perturbed surfaces of the rough waveguide. The results obtained for periodic roughness are in agreement with results available in the literature.*

**Mots clefs :** acoustique, rugosité, guide

## 1 Introduction

Depuis plus d'une décennie, l'étude des effets de la rugosité de paroi sur la propagation acoustique dans les guides d'ondes fait l'objet d'un regain d'intérêt, notamment dans le cadre du contrôle non destructif en vue de vérifier la qualité de collages dans les structures assemblées ou de caractériser l'état de surface de certaines pièces [1-5]. La présente étude fait suite à des études analytiques effectuées en milieux fluides [6, 7] et a pour objet d'ouvrir la voie à l'étude de la propagation des ondes de Lamb dans des guides solides rugueux. Elle porte sur la propagation d'ondes de cisaillement à polarisation horizontale, parallèle aux stries de surface de guides solides isotropes. Plus précisément, l'objet de l'étude est d'exprimer l'évolution de l'amplitude de modes propagatifs ( $\hat{A}_m(x)$ ) au cours de leur propagation dans la partie du guide dont les parois sont rugueuses.

La méthode utilisée ici présente la particularité de faire usage de la formulation intégrale du problème aux limites posé, les solutions étant construites à partir de développements sur les fonctions propres du guide à géométrie compatible, extérieur au guide réel. La rugosité de paroi est introduite dans le modèle par des conditions de contraintes nulles aux frontières qui font intervenir la pente locale de la rugosité.

## 2 Le problème

Le guide d'onde considéré, caractérisé par sa masse volumique  $\rho$  et son second coefficient de Lamé  $\mu$ , est une plaque limitée par deux plans parallèles rugueux de longueur et de largeur infinies (figure 1). Le plan de propagation correspondant (par choix) au plan  $(x, z)$  et le guide étant infini suivant la dimension "y", le domaine  $D$  d'étude de frontière  $\partial D$  (problème 2D) est défini par  $x$  positif et par  $z$  appartenant à l'intervalle  $(z_1(x), z_2(x))$ , où les coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  définissent les cotes des frontières du guide donc celles de la corrugation pour  $x$  compris dans l'intervalle  $(0, \ell)$ . Un guide fictif aux parois situées en  $z=0$  et  $z=L$ , immédiatement extérieur au guide réel (confondu avec le guide réel en dehors de la corrugation), définit le

domaine d'étude retenu pour la formulation intégrale utilisée. Les vecteurs  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont les vecteurs unitaires normaux respectivement aux surfaces  $z_1(x)$  et  $z_2(x)$  en tout point des rugosités et orientés vers l'extérieur du guide. Le guide fictif extérieur d'épaisseur  $L$  définit le domaine  $D_0$ .

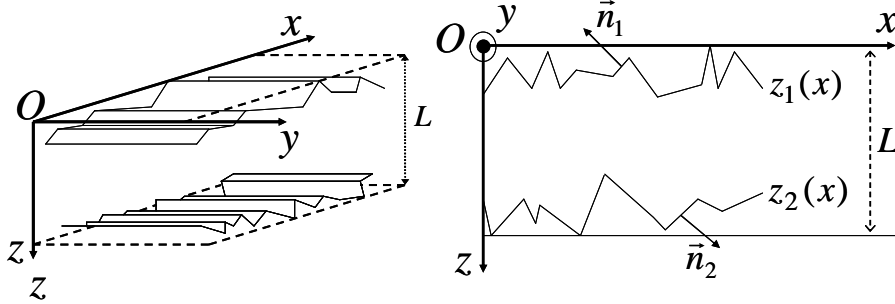


FIG. 1 – Le guide d'onde à parois rugueuses et le guide fictif extérieur.

Le champ de déplacement, supposé harmonique de pulsation  $\omega$ , est exprimée en fonction du temps par la fonction  $\exp(i\omega t)$ . Ainsi, dans le cadre des hypothèses de l'acoustique linéaire et étant donné les symétries du système étudié, l'amplitude complexe du champ de déplacement (suivant  $y$ )  $\hat{U}(x, z)$  ne dépend que des deux variables  $x$  et  $z$ , et est solution du système d'équations suivant, comportant l'équation de Helmholtz et des conditions de contraintes nulles aux frontières,

$$\begin{cases} (\partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2) \hat{U}(x, z) = 0, & \forall (x, z) \in D, & (1-a) \\ \bar{T}(x, z) \cdot \vec{n}_1 = \vec{0}, & \forall x \in [-\infty, +\infty[, \text{ en } z = z_1(x), & (1-b) \\ \bar{T}(x, z) \cdot \vec{n}_2 = \vec{0}, & \forall x \in [-\infty, +\infty[, \text{ en } z = z_2(x), & (1-c) \\ \hat{U}(0, z) = \hat{U}_0(z) \delta(x), & x = 0, & (1-d) \end{cases}$$

où le nombre d'onde  $k_T$  est défini par  $k_T = \omega / c_T$ ,  $c_T = \sqrt{\mu / \rho}$  représentant la célérité d'une onde transverse dans un solide isotrope, où la fonction  $\hat{U}_0(z)$  représente l'amplitude (harmonique) du champ incident à l'entrée du domaine  $x > 0$  et où  $\bar{T}(x, z)$  désigne le tenseur des contraintes, la notation  $\partial_{uu}^2$  représentant la dérivée partielle seconde par rapport à  $u$ .

### 3 Conditions aux frontières

Etant donnée l'expression du vecteur normal aux frontières rugueuses

$$\vec{n}_q = N_q^{-1} \left[ \vec{e}_x (\partial_x h_q) + (-1)^q \vec{e}_z \right] \quad (2)$$

avec

$$N_q = \sqrt{1 + (\partial_x h_q)^2}, \quad (3)$$

et compte-tenu de la loi de Hooke et de la nature SH de l'onde, les conditions (1-b) et (1-c) de contraintes nulles sur les surfaces rugueuses du guide peuvent être exprimées de la façon suivante

$$\bar{T}(x, z_q) \cdot \vec{n}_q = N_q^{-1} \left[ T_{xy}(x, z_q) (\partial_x h_q) + (-1)^q T_{zy}(x, z_q) \right] \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \forall x, \quad q = 1, 2, \quad (4-a)$$

$$\text{soit} \quad \mu \left[ (\partial_x h_q) \partial_x + (-1)^q \partial_{z_q} \right] \hat{U}(x, z_q) = 0, \quad \forall x, \quad q = 1, 2, \quad (4-b)$$

$$\text{ou encore} \quad \partial_{n_q} \hat{U}(x, z_q) = 0, \quad \forall x, \quad q = 1, 2, \quad (5)$$

où l'opérateur  $\partial_{n_q} = \vec{n}_q \cdot \vec{\nabla}$  représente la dérivée suivant la normale  $\vec{n}_q$  à la surface.

## 4 Expression modale du champ

Le champ de déplacement est exprimé par un développement sur les fonctions propres  $\psi_m(z)$ ,

$$\hat{U}(x, z) = \sum_m \hat{A}_m(x) \psi_m(z) \quad (6)$$

où le nombre  $m$  prend les valeurs entières de 0 à l'infini. Ces fonctions propres sont solutions du problème aux valeurs propres de Neumann transverse pour le guide à géométrie compatible (extérieur au guide réel),

$$\begin{cases} \left( \partial_{zz}^2 + k_m^2 \right) \psi_m(z) = 0, & z \in [0, L], \\ \partial_z \psi_m(z) = 0, & \text{en } z = 0 \text{ et } z = L, \end{cases} \quad (7-a)$$

$$(7-b)$$

et ont pour expression

$$\psi_m(z) = \sqrt{(2 - \delta_{m0})/L} \cos(k_m z), \quad (8)$$

avec

$$k_m = m\pi/L \quad (9)$$

et où  $\delta_{m0}$  représente le symbole de Kronecker.

## 5 Formulation intégrale du problème

Le champ de déplacement dans le domaine  $D$  du guide étudié peut être exprimé, par application de la formule de Green, compte tenu des équations (1-a) pour le champ de déplacement  $\hat{U}$  et du choix de fonction de Green satisfaisant à des conditions de Neumann (équations (11.a) et (11.b) ci-dessous), de la façon suivante [10] :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (x, z) \in (D), \\ (x, z) \in (D_0 - D), \end{array} \right\} \hat{U}(x, z) &= \int_0^{+\infty} \int_{z_1}^{z_2} G(x, z; x', z') \hat{U}(x', z') dz' dx' \\ &+ \sum_{q=1,2} \int_0^{+\infty} \left[ G(x, z; x', z_q) \partial_{n_q} \hat{U}(x', z_q) - \hat{U}(x', z_q) \partial_{n_q} G(x, z; x', z_q) \right] dx', \end{aligned} \quad (10)$$

où l'intégrale double représente l'effet des sources ( $\hat{U}$ ), et où l'intégrale simple (intégrale de surface fermée à l'infini) traduit les effets des frontières du domaine.

La fonction de Green  $G(x, z; x', z')$  choisie est définie dans le domaine  $D_0$  du guide à géométrie compatible (guide extérieur) et satisfait à des conditions de Neumann aux frontières :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \partial_{xx}^2 + \partial_{zz}^2 + k_T^2 \right) G(x, z; x', z') = -\delta(x - x') \delta(z - z'), \quad \forall (x, z, x', z') \in D_0, \\ \partial_z G(x, z; x', z') = 0, \quad \forall (x, x', z') \in D_0, \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L. \end{array} \right. \quad (11-a)$$

$$(11-b)$$

Cette fonction de Green peut être développée (sommation simple) sur la base des fonctions propres orthogonales (8) du guide extérieur à parois lisses et rectilignes, comme suit [8] :

$$G(x, z; x', z') = \sum_m g_m(x; x') \psi_m(z') \psi_m(z), \quad (12)$$

avec

$$g_m(x; x') = \exp(-i\kappa_m |x - x'|) / (2i\kappa_m), \quad (13)$$

et

$$\kappa_m^2 = k_T^2 - k_m^2. \quad (14)$$

Compte tenu de la condition en frontière (5), le facteur  $G \partial_{n_q} \hat{U}$  de l'équation (10) est nul, et le facteur  $\hat{U} \partial_{n_q} G$  de l'équation (10), peut être mis sous la forme

$$\sum_{q=1}^2 \hat{U}(x, z) \partial_{n_q} G(x, z; x', z') = \sum_m \sum_n \sum_{q=1}^2 \left\{ \hat{A}_m(x') \psi_m(z'_q) O(x', z'_q) [\psi_n(z'_q) g_n(x; x')] \right\} \psi_n(z) \quad (15)$$

L'équation (10) prend alors la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} (x, z) \in D, \\ (x, z) \in (D_0 - D), \end{array} \right\} \sum_n \hat{A}_n(x) \psi_n(z) \left. \begin{array}{l} \\ 0 \end{array} \right\} = \sum_n \left[ \hat{F}_n(x) + \sum_m \hat{H}_{mn}(\hat{A}_m(x)) \right] \psi_n(z), \quad (16)$$

$$\text{où} \quad \hat{F}_n(x) = \iint_D g_n(x; x') \psi_n(z') \hat{U}_0(z') \delta(x') dx' dz', \quad (17)$$

$$\hat{H}_{mn}(\hat{A}_m(x)) = - \sum_{q=1}^{+\infty} \int_0^2 \hat{A}_m(x') \psi_m(z'_q) O(x', z'_q) \psi_n(z'_q) g_n(x; x') dx' \quad (18)$$

$$\text{avec} \quad O(x', z'_q) = N_q^{-1} \left[ (\partial_{x'} h_q) \partial_{x'} + (-1)^q \partial_{z'_q} \right], \quad \forall x', q = 1, 2. \quad (19)$$

La projection de l'équation (16) sur la fonction propre  $\psi_m(z)$  permet d'obtenir une équation pour l'amplitude  $\hat{A}_m$  de chaque mode  $m$ ,

$$\hat{A}_m = \hat{F}_m + \sum_n \left[ \hat{H}_{nm}(\hat{A}_n) + B_{nm} \hat{A}_n \right] \quad (20)$$

$$\text{avec} \quad B_{nm} = \left( \int_0^{z_1} + \int_{z_2}^L \right) \psi_n(z) \psi_m(z) dz. \quad (21)$$

L'équation (20) fait apparaître deux mécanismes de couplage, l'un traduit par l'opérateur de volume  $B_{nm}$  et l'autre par l'opérateur de surface  $\hat{H}_{nm}$ , qui représentent respectivement le couplage de modes dû à la profondeur de rugosité sur chaque section du guide rugueux et le couplage en surface du guide dû à la pente. Le comportement du champ de déplacement est donc déterminé par ces deux mécanismes de couplage (couplage de volume et de surface [9]) au cours de la propagation le long de l'axe du guide.

## 6 Résolution par approximations successives

En supposant que les facteurs de couplage du membre de droite de l'équation (20) (opérateurs  $\hat{H}_{nm}$  et  $B_{nm}$  liés respectivement à la profondeur et la pente locales de la rugosité) sont des petites perturbations par rapport à l'opérateur de source  $\hat{F}_n$ , l'amplitude de chaque mode considéré, notée  $\hat{A}_m^{[N]}$  à l'ordre  $N$ , est recherchée par approximations successives [8],

$$\hat{A}_m^{[N]} = \hat{A}_m^{(0)} + \hat{A}_m^{(1)} + \hat{A}_m^{(2)} + \dots + \hat{A}_m^{(N-1)} + \hat{A}_m^{(N)} \quad (22)$$

où  $N$  est le nombre d'itérations,  $\hat{A}_m^{(0)}$  représentant la solution à l'ordre  $N=0$  en l'absence de rugosité ( $z_1=0$  et  $z_2=L$ , approximation de Born), donnée par

$$\hat{A}_m^{(0)}(x) = \hat{F}_m(x) = \int_0^{+\infty} \int_{z_1}^{z_2} g_m(x; x') \psi_m(z') \hat{U}_0(z') \delta(x') dz' dx' \quad (23)$$

$$\text{avec} \quad \hat{U}_0(z) \delta(x) = \hat{Q}_m \psi_m(z) \delta(x) \quad (24)$$

où  $\hat{Q}_m$  est l'amplitude de la source acoustique, qui est supposée ici ne créer que le mode noté " $m$ ".

Compte tenu des relations (20) et (22), l'expression à l'ordre  $N$  de l'amplitude de chaque mode, en fonction de l'ordre  $(N-1)$ , prend la forme

$$\hat{A}_m^{(N)}(x) = -\sum_n \sum_{q=1}^2 \int_0^{+\infty} \hat{A}_n^{(N-1)}(x') \psi_n(z'_q) O(x', z'_q) [g_m(x; x') \psi_m(z'_q)] dx' + \sum_n B_{nm}(x) \hat{A}_n^{(N-1)}(x) . \quad (25)$$

### 7 Résultats et discussion

La configuration choisie ici à titre d'illustration est celle d'un guide en forme de plaque d'épaisseur  $L$  comportant une rugosité en dents de scie uniquement sur la surface supérieure ( $z_1$ ), l'autre surface étant parfaitement lisse (figure 2), la rugosité de la surface  $z_1$ , de longueur  $\ell$ , étant composée de 20 dents de scie. Chaque dent de scie est caractérisée par une hauteur de rugosité  $h$  telle que  $h/L = 0,04$  et une périodicité spatiale  $\Lambda$  telle que  $L/\Lambda = 2,5$ .

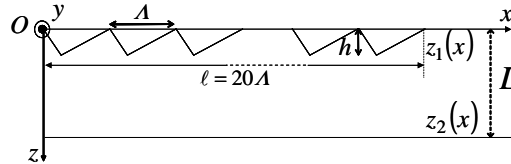


FIG. 2 – Schéma du guide d'onde étudié.

Les résultats présentés ici portent sur les amplitudes du mode incident ( $m$ ) ou des modes diffusés ( $n$ ) en fonction de la fréquence et de la coordonnée spatiale  $x$ . Pour certaines fréquences, la relation de phonon [2]

$$\kappa_m + \kappa_n - 2\pi/\Lambda = 0 , \quad (26)$$

est satisfaite ; elle caractérise le couplage privilégié entre un mode incident  $m$  et un mode diffusé  $n$  (figure 3). Le domaine de fréquence  $f$  étudié est compris entre les valeurs de la fréquence adimensionnée  $f L/c_T = 1,3$  et  $f L/c_T = 1,75$ . Quatre modes sont pris en compte dans les calculs : les modes incident SH0 et diffusés SH1, SH2 et SH3. Sur la bande fréquentielle de l'étude, les modes SH0, SH1 et SH2 sont propagatifs et le mode SH3 est soit évanescent soit propagatif (sa fréquence de coupure est donnée par  $f L/c_T = 1,5$ ).

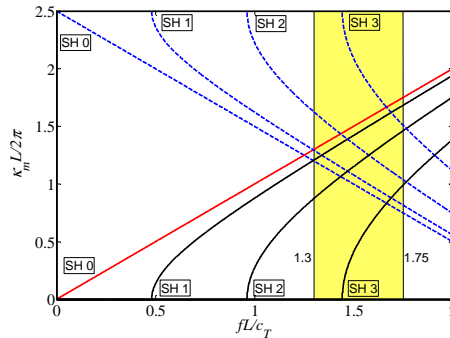


FIG. 3 – Courbes de dispersion (courbes en traits pleins) et de phonon (courbes en traits pointillés).

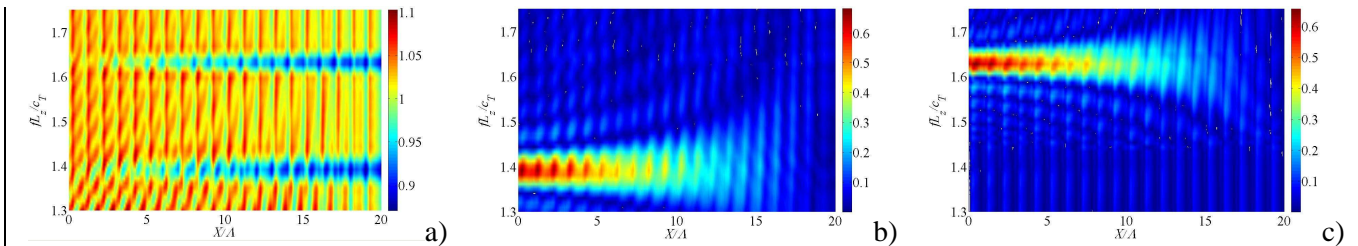


FIG. 4 – Module de l'amplitude normalisée de modes en fonction de la coordonnée spatiale adimensionnée  $x/\Lambda$  et de la fréquence adimensionnée  $f L/c_T$  : a) mode incident SH0, b) mode diffusé SH2, et c) mode diffusé SH3.

Dans ce domaine de fréquence, il existe deux relations de phonons, représentées par l'intersection des courbes de phonon (courbes descendantes sur la figure 3) et des courbes de dispersion (courbes ascendantes sur la figure 3) : une première relation de phonon entre le mode incident SH0 avec le mode diffusé SH2 en  $fL/c_T = 1,38$  et une seconde relation de phonon entre le mode incident SH0 et le mode diffusé SH3 en  $fL/c_T = 1,63$ .

L'amplitude du mode incident SH0 décroît très faiblement au cours de la propagation, sauf pour les fréquences pour lesquelles les deux relations de phonon avec les modes créés par couplage SH2 et SH3 sont vérifiées (respectivement  $fL/c_T = 1,38$  et  $fL/c_T = 1,63$ ) (figure 4a). Corrélativement, l'amplitude de chacun de ces deux modes diffusés SH2 et SH3 est négligeable sauf pour la fréquence associée à sa relation de phonon avec le mode incident (figures 4b et 4c). Les mécanismes de transfert d'énergie entre modes ayant lieux pour des fréquences proches de fréquences vérifiant les relations de phonon avec les modes concernés sont clairement mis en lumière par ces résultats [2, 4, 5, 7].

## 8 Conclusion

Le modèle analytique présenté permet d'interpréter les effets de rugosité de frontières de faible hauteur (en comparaison avec l'épaisseur de la plaque) et de faibles pentes, et de mettre en lumière les mécanismes de transfert d'énergie entre modes. Il apparaît en particulier que pente et hauteur de rugosité exercent tous deux des influences du même ordre de grandeur sur les couplages de modes. Pour un profil périodique, les mécanismes de transfert d'énergie entre modes sont très sensibles au voisinage des relations de phonon. Ces différents aspects des effets de couplage modaux dus à la rugosité sont fondamentaux en pratique, en termes de caractérisation de rugosités réelles dont les profils présentent en général des caractéristiques intermédiaires entre profil périodique et profil aléatoire.

## References

- [1] Chimenti D.E., Lobkis O.I., The effect of rough surfaces on guided waves in plates, *Ultrasonics*, 36, 155-162, 1998.
- [2] Leduc D., Hladky A-C., Morvan B., Izbicki J-L., Pareige P., Propagation of Lamb waves in a plate with periodic grating: Interpretation by phonon, *J. Acoust. Soc. Am.*, 118 (4), 2234-2239, 2005.
- [3] Banerjee S., Kundu T., Elastic wave propagation in sinusoidally corrugated waveguides, *J. Acoust. Soc. Am.*, 119 (4), 2006-2017, 2006.
- [4] Potel C., Leduc D., Morvan B., Depollier C., Hladky A-C., Izbicki J-L., Pareige P., Bruneau M., Lamb wave attenuation in a rough plate. I. Analytical and experimental results in an anisotropic plate, *J. Appl. Phys.*, 104, 074908, 2008.
- [5] Potel C., Leduc D., Morvan B., Depollier C., Hladky A-C., Izbicki J-L., Pareige P., Bruneau M., Lamb wave attenuation in a rough plate. II. Analytical and numerical results in a fluid plate, *J. Appl. Phys.*, 104, 074909, 2008.
- [6] Valier-Brasier T., Potel C., Bruneau M., Modes coupling of shear acoustic waves polarized along a one-dimensional corrugation on the surfaces of an isotropic solid plate, *Appl. Phys. Lett.*, 93, 164101, 2008.
- [7] Potel C., Bruneau M., Modes coupling due to non homogeneously-shaped walls in duct acoustics, *J. Sound Vib.*, 313, 738-759, 2008.
- [8] Morse P.M., Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics-Part II*, McGraw-Hill, New-York, 999-1064, 1953.
- [9] Sum K. S., Pan J., Effects of the inclination of a rigid wall on the free vibration characteristics of acoustic modes in a trapezoidal cavity, *J. Acoust. Soc. Am.*, 119, 2201-2210, 2006.
- [10] Michel Bruneau, *Manuel d'Acoustique Fondamentale*, Hermès, Paris, p. 320, 1998.