

Modélisation par éléments finis des vibrations non linéaires d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique

M. BILASSE, E.M. DAYA

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux,
UMR CNRS 7554, ISGMP, Université de Metz
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01 (France)
bilasse@univ-metz.fr, daya@lpmm.univ-metz.fr

Résumé :

On présente une méthode numérique de calcul des vibrations non linéaires de poutre sandwich à cœur viscoélastique. Le modèle d'Euler Bernoulli est appliqué aux faces tandis que le modèle de Timoshenko est appliqué au cœur viscoélastique. Les non-linéarités géométriques sont considérées selon les hypothèses de Von Karman. La réponse forcée est approchée par le mode propre de vibrations linéaires discrétisé en éléments finis en couplant la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode. L'amplitude de la réponse est alors solution d'une équation dépendant de la fréquence d'excitation dont les coefficients sont fonction du mode propre de vibrations linéaires. Le choix de la base de Galerkin et son influence sur la réponse sont discutés.

Abstract :

A numerical method for nonlinear vibration analysis of viscoelastically damped sandwich beam is presented. The kinematic models are considered based on the classical Euler Bernoulli's beam theory for the face layers and Timoshenko's beam theory for the viscoelastic core. Geometrical nonlinearities are introduced in the Von Karman's theory framework. Using the harmonic balance method and the Galerkin's technique, the forced response of the sandwich beam is approximated using the linear eigenmode. This eigenmode is determined by finite element method. The result is an amplitude equation whose coefficients depend on the linear eigenmode. The Galerkin base choice and its influence on the beam response are discussed.

Mots clés : viscoélastique, sandwich, vibration non linéaire, équilibrage harmonique, méthode de Galerkin, facteur de perte, amplitude

1. Introduction

Les structures sandwich à cœur viscoélastique trouvent leurs applications dans tous les domaines d'ingénierie et des systèmes mécaniques notamment dans l'électroménager, l'aérospatial, l'aéronautique, la construction navale, l'automobile ou le génie civil. Outre leur masse légère, elles permettent d'atténuer les vibrations assurant ainsi une isolation acoustique. Une structure sandwich à cœur viscoélastique est constituée de deux couches d'aciers intercalées en leur milieu par une couche viscoélastique (FIG. 1). La fonction amortissante se traduit par un cisaillement dans la couche viscoélastique dû à une différence entre les déplacements longitudinaux dans les parements d'aciers. Face à l'insuffisance des modèles analytiques quant à la modélisation des structures à géométrie complexe, des approches reposant sur l'analyse par éléments finis ont été développées par de nombreux auteurs [1-3]. L'étude des structures sandwich à cœur viscoélastique a été étendue dans le cadre des non-linéarités géométriques où le facteur de perte, le mode et la fréquence propre dépendent de l'amplitude des vibrations [4]. Récemment, une méthode analytique pour l'étude des vibrations non linéaires des structures sandwich à cœur viscoélastique a été développée par Daya et al. [5] et Boutyour et al. [6]. Cette méthode est basée sur la technique d'équilibrage harmonique couplé à la méthode de Galerkin à un mode. Dans ces travaux, la base de Galerkin choisie est constituée du mode propre du sandwich non amorti, dit mode réel où seule l'élasticité retardée du cœur est prise en compte. Le but de ce travail est de développer une méthode numérique utilisant les mêmes techniques que la méthode

analytique. Mais la base de Galerkin sera constituée du mode propre du sandwich amorti dit mode complexe puisqu'il est solution d'un problème aux valeurs propres complexes [1]. Une étude comparative des deux choix de la base de Galerkin est présentée et discutée.

2. Formulation cinématique et lois de comportement

On effectue l'analyse de la poutre sandwich dans les hypothèses cinématiques classiques. En appliquant la théorie d'Euler-Bernoulli aux faces élastiques et la théorie de Timoshenko au cœur viscoélastique et en tenant compte des non-linéarités géométriques, le champ de déplacement et de déformation s'écrit :

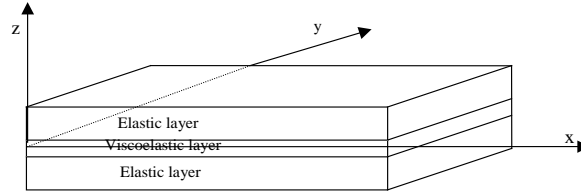


FIG. 1- poutre Sandwich

pour les faces élastiques $i = 1, 3$

$$U_i(x, z, t) = u_i(x, t) - (z - z_i) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$W_i(x, z, t) = w(x, t)$$

$$\varepsilon_i(x, z, t) = \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 - (z - z_i) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$$

pour le cœur viscoélastique $i = 2$

$$U_2(x, z, t) = u(x, t) + z\beta(x, t)$$

$$W_2(x, z, t) = w(x, t) \quad (2)$$

$$\varepsilon_2(x, z, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x}$$

$$\gamma_2(x, z, t) = \frac{1}{2} \left[\beta(x, t) + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right]$$

u, β et w sont respectivement le déplacement axial, la rotation et la flèche commune aux trois couches. L'état d'équilibre de la poutre sandwich est décrit par le principe des puissances virtuelles appliqué à l'ensemble des trois couches constitutives :

$$-\delta P_{\text{int}} = \delta P_{\text{ext}} - \delta P_{\text{acc}} \quad (3)$$

$$\int_0^L \left\{ N \delta u' + N w' \delta w' + M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T (\delta w' + \delta \beta) \right\} dx = \int_0^L F \delta w dx - (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx$$

N, T et F sont respectivement l'effort normal, l'effort tranchant résultant dans la poutre et l'effort extérieur, M_β et M_w les moments de flexion résultant dans la poutre.

3. Formulation éléments finis et mode de vibrations linéaires

On s'intéresse ici au mode de flexion en vibrations linéaires. Celui-ci est déterminé par résolution du problème de flexion issu de (3) en ignorant les termes de non-linéarité et d'excitation extérieure:

$$\int_0^L \left\{ M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T (\delta w' + \delta \beta) \right\} dx = -(2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx \quad (4)$$

On cherche alors la solution sous forme harmonique $\begin{Bmatrix} w(x, t) \\ \beta(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(x) \\ B(x) \end{Bmatrix} e^{i\omega_p t}$ où ω_p désigne la fréquence propre des vibrations linéaires et est complexe. Une discrétisation éléments finis appliquée à l'équation (4) permet de ramener le problème à l'étude d'un élément 1-D à deux nœuds, chaque nœud possédant trois degrés de liberté. Ainsi pour chaque élément délimité par les nœuds i et j , les variables nodales se réduisent à :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = {}^T [W_i \quad W_i' \quad B_i \quad W_j \quad W_j' \quad B_j] \quad (5)$$

En utilisant une transformation géométrique linéaire avec interpolation linéaire pour les rotations et une interpolation cubique pour les déplacements transverses, on a :

$$\begin{Bmatrix} W \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_\beta \end{bmatrix} \{q^e\} \quad (6)$$

$[N_w]$ désigne la matrice des fonctions d'interpolation cubique de type Hermite et $[N_\beta]$ la matrice des fonctions d'interpolation linéaire [7]. Cet élément a été validé par Hu [8] pour une poutre sandwich encastree-libre par comparaison aux résultats fournis dans la référence [9] sur le déplacement transversal et la contrainte de cisaillement. En introduisant la relation (6) dans (4), le problème discrétisé s'écrit :

$$([K^e(\omega_p)] - \omega_p^2 [M^e]) \{q^e\} = 0 \quad (7)$$

Les matrices élémentaires sont données en posant $J = \frac{1}{2}L^e$:

$$\begin{aligned} [M^e] &= (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) [m^e], \\ [K^e] &= \frac{1}{2} \{ (2I_c E_c(\omega_p) + E_f S_f h_c^2) [k_1^e] - E_f S_f h_f h_c [k_2^e] + E_f (4I_f + S_f h_f^2) [k_3^e] + 2S_c G_c(\omega_p) [k_4^e] \}, \\ [m^e] &= \int_{-1}^1 J^T [N_w] [N_w] d\xi, \quad [k_1^e] = \int_{-1}^1 J^{-1 T} [N'_\beta] [N'_\beta] d\xi, \quad [k_2^e] = \int_{-1}^1 J^{-2} \left({}^T [N'_\beta] [N_w] + {}^T [N_w] [N'_\beta] \right) d\xi, \\ [k_3^e] &= \int_{-1}^1 J^{-3 T} [N_w] [N_w] d\xi, \quad [k_4^e] = \int_{-1}^1 \left(J^{-1 T} [N'_w] [N'_w] + {}^T [N_\beta] [N'_w] + {}^T [N_w] [N_\beta] + J^T [N_\beta] [N_\beta] \right) d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

La dépendance en fréquence de la matrice de rigidité est introduite par le module d'Young ou de cisaillement du matériau viscoélastique qui varie en fonction de la fréquence [10]. Après assemblage des matrices élémentaires résulte le problème aux valeurs propres complexes non linéaire :

$$([K(\omega_p)] - \omega_p^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (9)$$

Ce problème est largement connu dans l'étude des structures viscoélastiques et il existe différentes méthodes de résolution [1]. Mais ici ce problème aux valeurs propres est résolu en deux étapes en utilisant le logiciel **Matlab2006**. En premier lieu, le problème aux valeurs propres réels correspondant au sandwich non amorti est résolu en ne considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique du cœur:

$$([K(0)] - \omega_0^2 [M]) \{q_0\} = 0 \quad (10)$$

où la fréquence non amortie ω_0 et le mode non amorti q_0 sont des quantités réelles. En second lieu, pour prendre en compte la dépendance en fréquence, la matrice de rigidité $[K(\omega_p)]$ est approximée au voisinage de la fréquence réelle ω_0 . Ce qui conduit à la résolution du problème aux valeurs propres complexes correspondant au sandwich amorti :

$$([K(\omega_0)] - \omega_p^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (11)$$

où la fréquence amortie ω_p et le mode amorti q sont des quantités complexes et ne sont déterminés que pour un mode donné c'est-à-dire $\omega_0 = \omega_{0j}$ et $q = q(\omega_0)$ où j désigne le rang du mode.

4. Solution approchée du problème de vibrations non linéaires

Dans ce travail, l'analyse est limitée à des réponses périodiques en temps de la poutre soumise à une excitation transversale harmonique de la forme $F = f(x)\cos(\omega t)$. Ainsi, le problème (3) est décomposé en deux équations :

$$\int_0^L N \delta u' dx = 0. \quad (12)$$

$$\int_0^L \{ N w' \delta w' + M_\beta \delta \beta' + M_w \delta w'' + T(\delta w' + \delta \beta) \} dx = \int_0^L F \delta w dx - (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx$$

En utilisant la méthode de Galerkin à un mode, on cherche la réponse sous la forme approchée suivante:

$$\begin{cases} w(x,t) \\ \beta(x,t) \end{cases} = A \begin{cases} W(x) \\ B(x) \end{cases} e^{i\omega t} + CC \quad (13)$$

où A est une amplitude complexe inconnue dépendant de la fréquence d'excitation ω , $\{W, B\}$ est le mode propre de vibration linéaire du sandwich et CC désigne le complexe conjugué. Dans ce cas, l'effort normal peut s'écrire en fonction des harmoniques 0 et 2ω comme dans [5]:

$$N(x,t) = |A|^2 N_0(x) + \{ A^2 N_{2\omega}(x) e^{i2\omega t} + CC \} \quad (14)$$

Nous considérons ici le cas d'une poutre immobilisée axialement à ses extrémités et les composantes de l'effort normal sont respectivement :

$$N_0(x) = \frac{2E_f S_f + S_c E_c(0)}{L} \int_0^L |W'(s)|^2 ds \quad (15)$$

$$N_{2\omega}(x) = \frac{2E_f S_f + S_c E_c(2\omega)}{2L} \int_0^L W'^2(s) ds$$

En utilisant un équilibrage harmonique $\begin{cases} \delta w(x,t) \\ \delta \beta(x,t) \end{cases} = \begin{cases} \overline{W}(x) \\ \overline{B}(x) \end{cases} e^{-i\omega t}$ dans (12) et en ne retenant que les termes indépendants du temps, l'analyse de la réponse forcée est ramenée à une équation d'amplitude complexe :

$$-\omega^2 MA + KA + K_{NL} \overline{AA}^2 = Q \quad (16)$$

avec $M = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L |W|^2 dx$, $K_{NL} = \int_0^L (N_0 |W'|^2 + N_{2\omega} \overline{W}'^2) dx$, $Q = \int_0^L f \overline{W} dx$, (17)

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_f (4I_f + S_f h_f^2) |W''|^2 - E_f S_f h_f h_c (W'' \overline{B}' + \overline{W}'' B') + (2I_c E_c(\omega) + E_f S_f h_c^2) |B'|^2 + 2S_c G_c(\omega) |W' + B|^2 \right\} dx$$

On effectue l'analyse autour de la résonance et on admettra que la fréquence d'excitation est proche de la fréquence non amortie ω_0 c'est-à-dire $K \approx K(\omega_0)$ et $K_{NL} \approx K_{NL}(\omega_0)$. Dans le cas de vibrations libres linéaires, l'équation (16) permet de définir la pulsation amortie Ω_L et le facteur de perte η_L :

$$\begin{cases} \frac{K}{M} = \Omega_L^2 (1 + i\eta_L) \\ \Omega_L = \frac{K^R}{M}, \quad \eta_L = \frac{K^I}{K^R} \end{cases} \quad (18)$$

En vibrations libres non linéaires, l'équation (16) permet de traduire la dépendance en amplitude $a = |A|$ de la pulsation amortie et du facteur de perte :

$$\begin{cases} \Omega_{NL}^2 = \Omega_L^2 (1 + a^2 C^R) \\ \eta_{NL} = \eta_L \frac{1 + a^2 C^I}{1 + a^2 C^R} \end{cases} \quad (19)$$

où les coefficients $C^R = \frac{K_{NL}^R}{K^R}$ et $C^I = \frac{K_{NL}^I}{K^I}$ caractérisent les effets non linéaires. Les résultats sont comparés pour ces paramètres modaux estimés d'une part à l'aide d'une base de Galerkin à mode réel $q = q_0$ et d'autre part à l'aide d'une base de Galerkin à mode complexe $q = q(\omega_0)$.

5. Résultats et discussion

L'analyse est menée sur la poutre sandwich étudiée dans [5] mais ici le cœur est en ISD112. Le module de cisaillement dépend de la température et est donné par le modèle de Maxwell généralisé [10] :

$$G_c(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{10} \frac{\alpha_j \omega}{\omega - i\tau_j^{-1}} \right) \quad (20)$$

Les résultats sont présentés dans le tableau 1 pour les deux premiers modes de vibration. On voit qu'à la température 38°C les valeurs de l'amortissement sont très faibles et les paramètres modaux obtenus avec le mode réel et le mode complexe sont les mêmes. A la température 0°C, l'approche en mode réel surestime l'amortissement. A cette température, les paramètres modaux sont différents selon que l'on utilise le mode réel ou le mode complexe. Les valeurs du paramètre C^I en mode réel et mode complexe dans le cas de l'appui simple sont presque dans un rapport double à cette température.

	$\Omega_L(\text{Hz})$		$\eta_L \times 10^1$		C^R		$C^I \times 10^3$	
	complexe	réel	complexe	réel	complexe	réel	complexe	réel
Appui simple								
38°C	17.72	17.72	0.78	0.80	221.58	218.83	4.03	3.92
	56.61	56.60	0.77	0.78	78.54	77.90	3.27	3.22
0°C	28.14	27.00	5.33	10.25	112.34	94.24	9.20	4.01
	90.18	87.05	6.45	9.72	39.06	32.93	5.43	3.04
Bi-encastree								
38°C	31.74	31.74	0.50	0.51	76.98	76.68	3.30	3.27
	83.10	83.08	0.55	0.56	42.80	42.49	3.19	3.14
0°C	44.62	43.35	6.08	8.35	43.29	41.10	4.47	3.11
	118.23	116.71	5.70	8.01	23.82	21.53	4.77	3.09

TAB. 1- Paramètres modaux en mode complexe et mode réel

Le tableau 2 présente les facteurs de perte du cœur viscoélastique estimés autour de la fréquence réelle ω_0 aux différentes températures et correspondant aux deux premiers modes de vibration. A la température 0°C, le cœur est fortement amorti et les résultats révèlent que l'utilisation d'une base de Galerkin à mode réel n'est pas réaliste. Par contre lorsque le cœur est faiblement amorti comme le cas à 38°C, une base de Galerkin à mode réel donne des résultats satisfaisant comme celle du mode complexe.

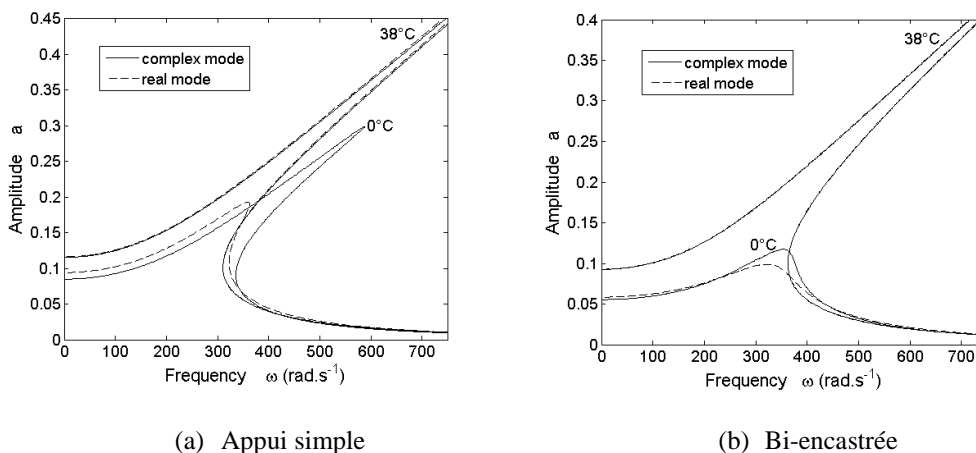


FIG. 2- Réponse en amplitude pour le premier mode, force par unité de longueur $f = 20N.m^{-1}$

La figure 2 montre la réponse en amplitude du premier mode pour une excitation f constante. L'amplitude maximale est faible à 0°C dû au fait que le sandwich est fortement amorti à cette température. A cet effet, l'approximation en mode réel sous estime les pics de résonance. Par contre, à la température 38°C, le

sandwich est faiblement amorti et la réponse de la poutre est la même en mode réel qu'en mode complexe. Ceci montre qu'une base de Galerkin à mode réel serait valide que pour des structures faiblement amorties.

	Appui simple	Bi-encastée
38°C	0.168	0.236
	0.335	0.417
0°C	1.324	1.441
	1.438	1.427

TAB. 2 -Facteur de perte du cœur $\eta_c(\omega_0, T)$

6. Conclusion

Dans travail, une méthode numérique pour le calcul des vibrations non linéaires de poutre sandwich a été présentée. La réponse forcée est approchée à partir du mode propre de vibrations linéaires en utilisant la technique d'équilibrage harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. Une équation d'amplitude complexe est alors établie dont les coefficients dépendent du mode propre de vibrations linéaires formant la base de Galerkin. En utilisant un élément fini de type poutre, le mode propre est issu de la résolution approchée d'un problème aux valeurs propres complexes non linéaire. La présente méthode est similaire à la méthode analytique développée dans [5], cependant elle améliore la prise en compte de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique et des conditions aux limites dans l'analyse des vibrations non linéaires.

Références

- [1] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers & Structures*, 79(5):533–541, February 2001.
- [2] Laëtitia Duigou, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1323–1335, March 2003.
- [3] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers & Structures*, In Press, Corrected Proof:–.
- [4] M. Ganapathi, B. P. Patel, P. Boisse, and O. Polit. Flexural loss factors of sandwich and laminated composite beams using linear and nonlinear dynamic analysis. *Composites Part B: Engineering*, 30(3):245–256, April 1999.
- [5] E. M. Daya, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5):789–813, April 2004.
- [6] El Hassan Boutyour, El Mostafa Daya, and Michel Potier-Ferry. A harmonic balance method for the non-linear vibration of viscoelastic shells. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(1):68–73, January 2006.
- [7] Gouri Dhat and Gilbert Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. 2ème édition, 1984.
- [8] Heng HU. *Modélisation multi-échelle des structures sandwich*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 2006.
- [9] J.L. Batoz and G.Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. volume 1, HERMES, Paris, 1990.
- [10] Luciano Afonso da Silva. *Internal Variable and Temperature Modeling Behavior of Viscoelastic Structures - A Control Analysis*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.