

Sur la modélisation mathématique de conditions unilatérales en mécanique du contact

MARIUS COCOU

*Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique C.N.R.S.,
31 chemin Joseph Aiguier, 13402 MARSEILLE Cedex 20,
et Aix-Marseille Université, U.F.R. M.I.M., MARSEILLE*

Résumé :

Dans ce travail on considère quelques problèmes quasi-statiques de contact avec frottement local en élasticité linéarisée, concernant le contact unilatéral et une condition de contact modifiée. On décrit le cadre fonctionnel et des formulations variationnelles, associées au problème initial mais aussi aux problèmes incrémentaux obtenus par une semi-discrétisation temporelle. Pour les solutions incrémentales on démontre des résultats d'existence et d'approximation, qui permettent d'obtenir l'existence d'une solution du problème d'évolution. On présente également quelques propriétés remarquables des solutions variationnelles qui vérifient la condition de contact modifiée. Ces résultats peuvent être étendus à des cas plus généraux comme, par exemple, le contact entre deux corps (visco)élastiques ou le couplage adhésion-frottement.

Abstract :

The aim of this work is to study some quasistatic contact problems with local friction in linear elasticity, when the contact conditions are unilateral or of a modified type. Functional framework and variational formulations of continuous and incremental problems, obtained by a temporally semi-discrete approximation, are described. For the incremental solutions, one proves some existence and approximation results which enable to obtain the existence of a solution to the evolution problem. Some interesting properties of variational solutions verifying the modified contact conditions are presented. These results can be extended to more general cases, as, for example, the contact between two (visco)elastic bodies or the coupling between adhesion and friction.

Mots clefs : problème quasi-statique, conditions de contact unilatéral et modifiées, frottement local

1 Introduction

Les conditions classiques de contact unilatéral en élasticité linéarisée, dans le cas statique sans frottement, ont été formulées par A. Signorini en 1933 et les formulations variationnelles correspondantes ont été analysées par G. Fichera, J.L. Lions et G. Stampacchia dans les années 1970.

Les modèles qui utilisent ces conditions de contact unilatéral (ou de Signorini) avec une loi de frottement local de Coulomb présentent quelques difficultés et problèmes mathématiques ou physiques sérieux, voir par exemple [1], [2]. Pour surmonter certaines de ces difficultés on a proposé soit une régularisation de la loi de frottement, ce qui conduit à une loi de frottement non local (G. Duvaut), en préservant le caractère multivoque des conditions de contact unilatéral et de frottement, soit une régularisation des conditions de contact de Signorini en utilisant une loi de compliance normale (J.T. Oden et J.A.C. Martins) et en préservant le caractère local et multivoque de la loi de frottement.

Le problème statique de contact unilatéral avec frottement local de Coulomb à été résolu par J. Nečas, J. Jarušek, J. Haslinger dans les années 1980 et, même s'il s'agit d'un modèle non réaliste de frottement car toutes les conditions sont formulées en déplacements, ce résultat classique a permis néanmoins de commencer l'étude de formulations incrémentales dérivées des problèmes d'évolution, plus complexes.

Le problème quasi-statique correspondant, qui est un modèle réaliste car la loi de frottement est écrite en vitesses, a été résolu par L.E. Andersson [3] et R. Rocca, M. Cocou [4]. L'analyse numérique de ce problème, à partir d'une formulation variationnelle et d'une méthode d'éléments finis mixtes, a été faite dans [5] et l'extension de ce modèle au couplage entre le frottement local de Coulomb et l'adhésion a été considérée par M. Cocou, R. Rocca [6].

Comme pour le contact unilatéral avec frottement local la composante normale du vecteur contrainte sur la frontière de contact n'est pas suffisamment régulière, donc ne peut pas être définie ponctuellement, l'analyse mathématique ainsi que l'analyse numérique des problèmes de contact de ce type reposent sur une étude assez fine et technique, qui utilise des espaces de trace en dualité, une formulation incrémentale régularisée, une méthode de translation et un résultat d'existence d'un point fixe.

Dans le cas statique, un modèle intermédiaire a été proposé par P.J. Rabier et O.V. Savin [7], dans lequel la condition de contact unilatéral est relaxée d'une manière particulière. Même si le modèle considéré n'est pas analysé comme une approximation du modèle statique de contact unilatéral avec frottement de Coulomb, cette contribution est intéressante car les auteurs proposent une méthode de résolution qui permet non seulement de montrer l'existence de solutions généralisées vérifiant les conditions de frottement local en déplacements mais également un certain « contrôle » de la zone de contact unilatéral.

La principale contribution de ce travail consiste à étendre le modèle de P.J. Rabier et O.V. Savin, afin de caractériser le contact avec frottement local de Coulomb dans le cas quasi-statique, en obtenant ainsi un modèle réaliste du point de vue mécanique. Nous considérons tout d'abord la formulation classique et une formulation variationnelle mixte du problème quasi-statique avec conditions de contact modifiées et frottement local et du problème quasi-statique « limite », de contact unilatéral avec frottement local.

Pour résoudre le premier problème, nous nous intéressons à une formulation incrémentale obtenue par une semi-discrétisation temporelle et, en utilisant un résultat d'existence pour une inéquation variationnelle implicite abstraite, nous montrons l'existence de solutions incrémentales bornées indépendamment du pas de temps. Cette approche nous permet de trouver une sous-suite de solutions incrémentales qui converge vers une solution du problème quasi-statique. De plus, on démontre que la zone où il y a une pénétration peut être considérée arbitrairement petite, ce qui, par les généralisations et les applications possibles, constitue une propriété intéressante de ce modèle.

En tenant compte du cadre disponible, nous allons nous limiter aux cas particuliers des problèmes de contact évoqués ci-dessus et nous allons présenter seulement leurs formulations précises ainsi que quelques résultats et propriétés mathématiques remarquables concernant ce modèle. Les résultats et les démonstrations complets seront présentés dans un article en préparation.

Pour simplifier la présentation, nous nous intéressons dans la suite au contact entre un solide élastique et un support mais bien d'autres cas, plus généraux, peuvent être considérés comme, par exemple, le contact avec frottement local entre deux corps (visco)élastiques ou le couplage entre adhésion et frottement.

2 Problèmes quasi-statiques de contact avec frottement local

Considérons un milieu élastique linéaire en évolution quasi-statique occupant dans son état non déformé le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, où $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont trois parties disjointes suffisamment régulières de Γ et $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Supposons que le corps est fixé sur Γ_1 et notons par φ la densité volumique des forces données dans Ω et par ψ la densité surfacique des forces données sur Γ_2 .

Désignons par σ le tenseur des contraintes, de composantes cartésiennes orthonormées $\sigma = (\sigma_{ij})$, par ε le tenseur des déformations linéarisé, de composantes $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$, par \mathbf{u} le vecteur déplacement, de composantes $u = (u_i)$ et par \mathcal{E} le tenseur des coefficients d'élasticité, de composantes $\mathcal{E} = (a_{ijkl})$, vérifiant les conditions classiques de symétrie et d'ellipticité.

On introduit les décompositions en composantes normales et tangentielles suivantes : $\mathbf{u} = u_N \mathbf{n} + \mathbf{u}_T$ avec $u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\sigma \mathbf{n} = \sigma_N \mathbf{n} + \sigma_T$ avec $\sigma_N = (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est la normale extérieure unitaire à Γ , de composantes $n = (n_i)$.

On fait les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &\in W^{1,2}(0, T; [L^2(\Omega)]^d), \quad \psi \in W^{1,2}(0, T; [L^2(\Gamma)]^d), \quad \text{supp } \psi(t) \subset \bar{\Gamma}_2^0 \subset \Gamma_2 \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ a_{ijkl} &\in L^\infty(\Omega) \text{ et est de classe } C^{0,1/2+\nu} \text{ dans un voisinage de } \Gamma_3, \quad 0 < \nu \leq 1/2, \quad i, j, k, l = 1, \dots, d, \\ \mu &\in L^\infty(\Gamma) \text{ et est un multiplicateur sur } H^{1/2}(\Gamma) \text{ de norme } \|\mu\|_{\mathcal{M}}, \quad \mu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma. \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ p.p. sur } \Gamma_1\}, \\ \mathbf{K} &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}; v_N \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}, \\ C^{*-} &= \{\pi \in H^{-1/2}(\Gamma); \text{supp } (\pi) \subset \bar{\Gamma}_3, \pi \leq 0\}, \\ (\mathbf{L}, \mathbf{v}) &= (\varphi, \mathbf{v})_{[L^2(\Omega)]^d} + (\psi, \mathbf{v})_{[L^2(\Gamma)]^d} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{w}) dx \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ j_1(\lambda, \mathbf{v}) &= -\langle \mu \lambda, |\mathbf{v}_T| \rangle \quad \forall \lambda \in C^{*-}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ j_2(\lambda, \mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_3} \mu |\lambda| |\mathbf{v}_T| ds \quad \forall \lambda \in L^2(\Gamma_3), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire sur $[H^1(\Omega)]^d$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité sur $[H^{1/2}(\Gamma)]^d$, $[H^{-1/2}(\Gamma)]^d$ et sur $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Soient $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{K}$ et $\lambda_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$ vérifiant $\lambda_0 = \sigma_N(\mathbf{u}_0) \leq 0$ p.p. sur Γ_3 ainsi que la condition de compatibilité suivante :

$$a(\mathbf{u}_0, \mathbf{w} - \mathbf{u}_0) + j_2(\lambda_0, \mathbf{w}) - j_2(\lambda_0, \mathbf{u}_0) \geq (\mathbf{L}(0), \mathbf{w} - \mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{K}.$$

Sur Γ_3 on va considérer deux types de conditions de contact avec frottement local entre le corps et son support.

2.1 Conditions de Signorini avec frottement local

Le premier problème concerne l'évolution quasi-statique du solide élastique en contact unilatéral sur Γ_3 , considérée comme zone de contact initial et maximum, avec un support rigide fixé et vérifiant la loi de frottement local de Coulomb.

Problème P_1^c : Trouver $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ vérifiant la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ dans Ω et, pour tout $t \in]0, T[$, les equations et conditions suivantes :

$$(P_1^c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\varphi} \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\psi} \text{ sur } \Gamma_2, \\ u_N \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad u_N \sigma_N = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \\ |\boldsymbol{\sigma}_T| \leq \mu |\sigma_N| \text{ sur } \Gamma_3 \\ \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_T| < \mu |\sigma_N| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_T = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_T| = \mu |\sigma_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\mathbf{u}}_T = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_T, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où μ est le coefficient de frottement.

On considère la formulation variationnelle mixte du Problème P_1^c suivante [5] :

Problème P_1^v : Trouver $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V})$ et $\lambda \in W^{1,2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ vérifiant $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$, pour presque tout $t \in]0, T[$ $\lambda(t) \in C^{*-}$ et

$$(P_1^v) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + j_1(\lambda, \mathbf{v}) - j_1(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{L}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \lambda, v_N - \dot{u}_N \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \langle \pi - \lambda, u_N \rangle \geq 0 \quad \forall \pi \in C^{*-}. \end{array} \right.$$

On peut démontrer que le multiplicateur de Lagrange λ vérifie la relation $\lambda = \sigma_N(\mathbf{u})$ sur Γ_3 .

L'analyse mathématique, faite dans [3], [4], [6] (pour le cas avec adhésion) et l'analyse numérique, faite dans [5], montrent que sous les hypothèses précédentes, pour des valeurs suffisamment petites de $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma)}$ et $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$, il existe une solution du problème P_1^v qui peut être calculée par une méthode mixte d'éléments finis.

2.2 Conditions de contact modifiées avec frottement local

Considérons maintenant l'évolution quasi-statique du corps élastique avec une loi de contact différente des conditions de Signorini mais en gardant la loi de frottement local de Coulomb. Ce modèle a été proposé dans le cas statique dans [7].

Problème P_2^c : Trouver $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ vérifiant la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ dans Ω et, pour tout $t \in]0, T[$, les equations et conditions suivantes :

$$(P_2^c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = -\boldsymbol{\varphi} \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\psi} \text{ sur } \Gamma_2, \\ \underline{\beta}(u_N) \leq \sigma_N \leq \bar{\beta}(u_N) \text{ sur } \Gamma_3, \\ |\boldsymbol{\sigma}_T| \leq \mu |\sigma_N| \text{ sur } \Gamma_3 \\ \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\boldsymbol{\sigma}_T| < \mu |\sigma_N| \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_T = \mathbf{0}, \\ |\boldsymbol{\sigma}_T| = \mu |\sigma_N| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \dot{\mathbf{u}}_T = -\lambda \boldsymbol{\sigma}_T, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où $\underline{\beta}$, $\bar{\beta}$ sont deux fonctions définies par $\underline{\beta}(r) = 0$ si $r < 0$, $\underline{\beta}(r) = -M$ si $r \geq 0$ et $\bar{\beta}(r) = 0$ si $r \leq 0$, $\bar{\beta}(r) = -M$ si $r > 0$, avec $M > 0$ donnée, et $\underline{\beta}(u_{0N}) \leq \sigma_N(\mathbf{u}_0) \leq \bar{\beta}(u_{0N})$ sur Γ_3 .

On note que les conditions de Signorini correspondent à la valeur limite $M = +\infty$.

On suppose que \mathbf{u}_0, λ_0 vérifient, en plus des conditions précédentes, la relation $\underline{\beta}(u_{0N}) \leq \lambda_0 \leq \bar{\beta}(u_{0N})$ p.p. sur Γ_3 et on considère le problème variationnel suivant :

Problème P_2^v : Trouver $\mathbf{u} \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V})$ et $\lambda \in W^{1,2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$ vérifiant $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$, et pour presque tout $t \in]0, T[$

$$(P_2^v) \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + j_2(\lambda, \mathbf{v}) - j_2(\lambda, \dot{\mathbf{u}}) \geq (\mathbf{L}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) + \langle \lambda, v_N - \dot{u}_N \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \underline{\beta}(u_N) \leq \lambda \leq \bar{\beta}(u_N) \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

Une formulation équivalente peut être donnée en utilisant la notion de dérivée généralisée (F. Clarke [8]).
On a le résultat suivant.

Proposition 2.1 *Le problème P_2^v est une formulation variationnelle mixte du problème P_2^c , où le multiplicateur de Lagrange $\lambda \in L^\infty(\Gamma_3)$ a l'interprétation mécanique $\lambda = \sigma_N(\mathbf{u}) \leq 0$ p.p. sur Γ_3 et pour tout $t \in]0, T[$.*

2.3 Formulations incrémentales

Pour résoudre le problème P_2^v , on utilise les formulations incrémentales obtenues par une semi-discrétisation temporelle implicite qui sera décrite dans la suite.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Delta t := T/n$, $t_i := i \Delta t$, $i = 0, 1, \dots, n$, si θ est une fonction continue de $t \in [0, T]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé on introduit les notations $\theta^i := \theta(t_i)$ sauf pour $\theta = \mathbf{u}$, $\theta = \lambda$, et si η^i , $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, sont des éléments d'un espace vectoriel normé on pose

$$\partial \eta^i := \frac{\eta^{i+1} - \eta^i}{\Delta t}, \quad \Delta \eta^i := \eta^{i+1} - \eta^i \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

On considère la suite suivante de problèmes incrémentaux $(P_{2,n}^i)_{i=0,1,\dots,n-1}$.

Problème $P_{2,n}^i$: Trouver $\mathbf{u}^{i+1} \in \mathbf{V}$ et $\lambda^{i+1} \in L^2(\Gamma_3)$ solutions du système

$$(P_{2,n}^i) \begin{cases} a(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v} - \partial \mathbf{u}^i) + j_2(\lambda^{i+1}, \mathbf{v}) - j_2(\lambda^{i+1}, \partial \mathbf{u}^i) \\ \geq (\mathbf{L}^{i+1}, \mathbf{v} - \partial \mathbf{u}^i) + \langle \lambda^{i+1}, v_N - \partial u_N^i \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \underline{\beta}(u_N^{i+1}) \leq \lambda^{i+1} \leq \bar{\beta}(u_N^{i+1}) \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

Le problème incrémental $P_{2,n}^i$ est équivalent au problème $Q_{2,n}^i$ suivant, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Problème $Q_{2,n}^i$: Trouver $\mathbf{u}^{i+1} \in \mathbf{V}$ et $\lambda^{i+1} \in L^2(\Gamma_3)$ vérifiant

$$(Q_{2,n}^i) \begin{cases} a(\mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^{i+1}) + j_2(\lambda^{i+1}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^i) - j_2(\lambda^{i+1}, \mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i) \\ \geq (\mathbf{L}^{i+1}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^{i+1}) + \langle \lambda^{i+1}, v_N - u_N^{i+1} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \underline{\beta}(u_N^{i+1}) \leq \lambda^{i+1} \leq \bar{\beta}(u_N^{i+1}) \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \end{cases}$$

3 Existence et propriétés des solutions

Un premier résultat d'existence concerne les solutions incrémentales.

Theorem 3.1 *Pour tout M avec $0 < M < +\infty$ il existe $(\mathbf{u}^{i+1}, \lambda^{i+1}) \in \mathbf{V} \times L^2(\Gamma_3)$ solution du problème $Q_{2,n}^i$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.*

La démonstration de ce théorème consiste à démontrer et appliquer un résultat plus général, d'existence d'une solution pour une inéquation variationnelle implicite considérée dans l'espace produit $H \times \Xi$, où H est un espace de Hilbert et (Ξ, s) est un espace mesuré avec s une mesure complète et finie. Ce résultat abstrait est obtenu en introduisant une classe convenable d'applications multivoques séquentiellement faiblement semi-continues supérieurement et en utilisant un théorème de Ky Fan.

Pour passer à la limite dans les problèmes $(P_{2,n}^i)_{i=0,1,\dots,n-1}$, on a besoin d'estimations pour les solutions incrémentales.

Proposition 3.1 *Il existe des constantes $\bar{\mu} > 0$ et $C > 0$, indépendantes de n , telles que si $\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leq \bar{\mu}$ alors les solutions incrémentales vérifient les relations*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{i+1}\|_{[H^1(\Omega)]^d} &\leq C \left\{ \|\varphi^{i+1}\|_{[L^2(\Omega)]^d} + \|\psi^{i+1}\|_{[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d} \right\}, \\ \|\Delta \mathbf{u}^i\|_{[H^1(\Omega)]^d} &\leq C \left\{ \|\Delta \varphi^i\|_{[L^2(\Omega)]^d} + \|\Delta \psi^i\|_{[H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^d} \right\} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Ces estimations nous permettent de passer à la limite dans les problèmes incrémentaux lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ et d'obtenir ainsi le résultat principal suivant.

Theorem 3.2 *On suppose $\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leq \bar{\mu}$. Alors pour tout M avec $0 < M < +\infty$ le problème P_2^v admet au moins une solution $(\mathbf{u}, \lambda) \in W^{1,2}(0, T; \mathbf{V}) \times W^{1,2}(0, T; H^{-1/2}(\Gamma))$.*

Une remarque immédiate est que les solutions incrémentales, $(\lambda^i)_{i=1,2,\dots,n}$, et celle du problème continu, λ , appartiennent naturellement à $L^\infty(\Gamma_3)$, ce qui assure une meilleure régularité de la composante normale du vecteur contrainte sur Γ_3 .

On note également que ces résultats sont établis, en ce qui concerne le coefficient de frottement, sous la seule hypothèse $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$ suffisamment petite.

Une autre propriété intéressante, qui n'est pas vérifiée par le modèle classique de contact avec compliance normale, est que la zone où il y a une pénétration dans le support peut être diminuée d'une manière contrôlée. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Theorem 3.3 *Soit $(\mathbf{u}_M, \lambda_M)$ une solution du problème P_2^v correspondant à M . A chaque instant $t \in]0, T[$, on pose $\Gamma_p(\mathbf{u}_M) := \{\mathbf{x} \in \Gamma_3; u_{MN}(\mathbf{x}) > 0\}$, pour noter la portion de Γ_3 où une pénétration du milieu dans le support a lieu. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $k > 0$ tel que pour tout M avec $0 < M < +\infty$*

$$mes(\Gamma_p(\mathbf{u}_M)) \leq \epsilon + \frac{k}{M} \|\mathbf{L}\|_{[H^1(\Omega)]^d} \quad \forall t \in]0, T[.$$

On peut démontrer également que s'il existe une solution (\mathbf{u}, λ) du problème de contact unilatéral avec frottement local P_1^v telle que $\lambda \in L^\infty(\Gamma_3)$ alors (\mathbf{u}, λ) vérifie le problème P_2^v pour tout M suffisamment grand et réciproquement, si le couple (\mathbf{u}, λ) est solution de P_2^v pour deux valeurs distinctes de $M > 0$ alors il est solution, réaliste du point de vue physique, de P_1^v . Ces propriétés permettent de voir les solutions de P_2^v comme étant non seulement des approximations, dépendantes de M , de solutions de P_1^v mais aussi des solutions généralisées du problème de contact unilatéral avec frottement local [7].

4 Généralisations et applications

Les résultats présentés ci-dessus s'étendent naturellement, en introduisant la fonction distance initiale (ou la fonction « gap »), aux problèmes quasi-statiques en (visco)élasticité linéarisée concernant deux milieux, occupant dans leur état non déformé les domaines Ω^1 et Ω^2 , qui peuvent être en contact avec frottement entre les parties Γ_3^1 et respectivement Γ_3^2 de leurs frontières.

Une autre généralisation concerne certains problèmes d'interactions de contact, en particulier le couplage entre adhésion et frottement. Plusieurs lois reliant σ_N et u_N peuvent être étudiées dans ce cadre.

La propriété des solutions du problème P_2^v décrite par le théorème 3.3 montre que si M est suffisamment grand ou si les forces appliquées sont suffisamment petites alors l'aire de la partie de la surface de contact où la pénétration du corps dans l'obstacle a lieu devient arbitrairement petite. Comme on peut montrer aussi que, dans les mêmes conditions pour M et pour le chargement que celles présentées précédemment, la norme dans $L^1(\Gamma_3)$ de cette pénétration peut être arbitrairement petite, il résulte que ce modèle de contact avec frottement est réaliste, voir, par exemple, l'analyse de J.T. Oden et J.A.C. Martins [9], d'après laquelle le contact avec une pression suffisante est accompagné par l'écrasement des aspérités. Dans ce cas, il s'agit d'une zone critique (ou singulière), très petite et à localiser, dans laquelle la modélisation du contact peut se faire, pour une analyse fine, en utilisant des systèmes multi-échelles.

En conclusion, ce modèle est « optimal » par rapport au modèle de contact avec compliance normale et par rapport au modèle de contact unilatéral avec frottement local de Coulomb car il permet une simplification de certaines techniques d'analyse mathématique et numérique, ainsi qu'un élargissement du champ d'applications de ces modèles.

Ce travail souligne, en s'appuyant sur quelques exemples remarquables de problèmes quasi-statiques de contact en élasticité, l'influence des différentes conditions de contact et lois de frottement sur le cadre fonctionnel et sur la formulation variationnelle, choisis afin d'obtenir un modèle adapté aux applications envisagées et de fournir une méthode numérique performante.

Références

- [1] Kikuchi N. and Oden J. Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1988.
- [2] Capatina A., Cocou M., and Raous M. A class of implicit variational inequalities and applications to frictional contact. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 32(en ligne), 1–24, 2008.
- [3] Andersson L. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. Applied Mathematics and Optimization, 42(2), 169–202, 2000.
- [4] Rocca R. and Cocou M. Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction. Int. J. Engrg. Sci., 39(11), 1233–1255, 2001.

- [5] Rocca R. and Cocou M. Numerical analysis of quasistatic unilateral contact problems with local friction. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(4), 1324–1342, 2001.
- [6] Cocou M. and Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis*, 34(5), 981–1001, 2000.
- [7] Rabier P. and Savin O. Fixed points of multi-valued maps and static Coulomb friction problems. *Journal of Elasticity*, 58(2), 155–176, 2000.
- [8] Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York, 1983.
- [9] Oden J. and Martins J. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 52(1-3), 527–634, 1985.