

Techniques de recouvrement de maillages pour le calcul direct en aéroacoustique

J. CHICHEPORTICHE^a, X. GLOERFELT^a

a. Laboratoire SINUMEF, Arts et Métiers ParisTech, 151 boulevard de l'Hôpital, 75013 PARIS

Résumé :

L'objectif de cette étude est la mise en place d'un code de simulation numérique en aéroacoustique basé sur des techniques de recouvrement de maillages. Un des principaux problèmes lié à ces techniques de maillages est le choix du type et de l'ordre d'interpolation faisant communiquer les différentes grilles entre elles. Ce point est d'autant plus important que les schémas numériques utilisés en aéroacoustique sont de hautes précisions. Deux choix d'interpolation sont proposés : l'interpolation polynômiale de Lagrange et l'interpolation optimisée proposée par Tam et Kurbatskii [1]. Des cas de validations 2-D permettent de mettre en évidence le caractère non-monotone de la précision des résultats numériques avec la taille du support d'interpolation, quelle que soit la méthode d'interpolation utilisée. Ainsi, l'augmentation de l'ordre ou de la taille du support d'interpolation devient inappropriée dans certains cas.

Abstract :

The aim of this study is to realize an aeroacoustic numerical solver based on the overset grids method. One of the major difficulties is related to the choice of the order and type of interpolation which ensures the communication between each grids. This problem is enhanced by the use of high-order accuracy schemes in aeroacoustics. Two types of interpolation schemes are proposed : the Lagrange polynomial interpolation and the optimized interpolation introduced by Tam et Kurbatskii [1]. For both interpolation methods, validations of 2-D test cases show the non-monotonic behaviour of the accuracy of results with the size of the interpolation stencil. Thus, the rise of the interpolation order or of the size of the stencil is not necessary the best option according to the considered problem.

Mots clefs : recouvrement de maillages, interpolation, aéroacoustique

1 Introduction

La principale difficulté des calculs aéroacoustiques tient à la nature très différente des grandeurs acoustique et aérodynamique ainsi qu'à la grande disparité des échelles à résoudre. Cette dernière particularité est partagée avec les approches DNS et LES pour lesquelles une large gamme d'échelles turbulentes doit aussi être prise en compte. Afin de préserver les ondes acoustiques d'amplitude très faible et de les propager sur de longues distances, on a généralement recours à des schémas numériques d'ordre élevé minimisant les erreurs de dispersion et de dissipation. Ces schémas à haute résolubilité spectrale [2, 3, 4] ne peuvent être utilisés que sur des maillages structurés. L'extension vers des géométries complexes est alors délicate. Cette difficulté, rencontrée très tôt en aérodynamique, a abouti dans les années 80 au développement de techniques dites de recouvrement de maillages notamment grâce aux travaux de Benek *et al.* [5] et de Chessire et Henshaw [6] dans les années 90. En aéroacoustique, l'intérêt des méthodes de recouvrement de maillages est de décomposer un domaine de calcul complexe en plusieurs sous-domaines de topologies plus simples, où les schémas à haute résolubilité spectrale pourront être utilisés. La communication entre les grilles est alors assurée par des interpolations. Cependant, afin de ne pas dégrader la solution globale, les schémas d'interpolation doivent être suffisamment précis en particulier dans l'espace des nombres d'onde. Plusieurs auteurs ont déjà traité ce problème comme Sherer et Scott [7] pour des schémas compacts ou Delfs [8] pour des schémas préservant la relation de dispersion (DRP). Desquesnes [9] a étendu ce problème pour le couplage CFD/CAA. Cependant, la génération de tels maillages composites reste compliquée. A l'instar de Emmert [10], nous utiliserons le meilleur Ogen disponible dans les librairies libres d'Overture développées par Henshaw *et al.* [11]. Dans ce papier, nous nous intéresserons à l'ordre et à la taille des supports d'interpolation pour le recouvrement de maillages en aéroacoustique. Cette étude sera entreprise pour les interpolations polynômiales de Lagrange et les interpolations optimisées [1] avec le recouvrement d'un maillage cartésien par un maillage cartésien. Le premier cas étudié sera l'advection d'un tourbillon et le deuxième cas concernera la propagation d'une source acoustique.

2 Interpolations dans un espace 2-D

Le recouvrement de maillages permet la communication entre différents maillages. Comme dans toute communication, on distingue un expéditeur, qu'on appelle le maillage donneur, et un destinataire, qu'on appelle le maillage récepteur. Le maillage récepteur reçoit l'information du maillage donneur en ses points récepteurs et le maillage donneur envoie l'information par ses points donneurs. Cette mise à jour de données se fait par l'interpolation des points donneurs (points de support) vers les points récepteurs (points d'interpolation) dans le recouvrement des deux maillages. Si la réception et l'envoi d'information entre les deux grilles sont couplés, on parle d'interpolations implicites. Si la réception est indépendante de l'envoi, on parle d'interpolations explicites. Dans cette étude, on s'intéressera uniquement aux interpolations de type explicites. En effet, contrairement aux interpolations implicites, elles ne nécessitent pas de résolutions de systèmes matriciels coûteux en temps (voir [6]) et s'adaptent parfaitement à l'architecture "tout explicite" de notre solveur. Un autre point concerne la conservativité des interpolations dans l'interface de recouvrement. En effet, les interpolations proposées dans cette étude sont non-conservatives. Cependant, pour des nombres de Mach peu élevés (comme celui qui sera envisagé dans les travaux futurs), la non-conservativité de ces schémas aux interfaces n'est pas préjudiciable comme le démontre [6].

2.1 Formule générale d'une interpolation 2-D

En 2D, la forme générale d'une interpolation explicite d'une fonction u au point (x_0, y_0) pour un support de points de taille $N \times N$ est :

$$u(x_0, y_0) = \sum_{i,j=1}^N S_{ij} u(x_i, y_j) \quad (1)$$

avec S_{ij} les coefficients d'interpolation associés aux points (x_i, y_j) . Dans cette étude, les coefficients d'interpolation 2-D S_{ij} seront égaux aux produits des coefficients 1-D S_i et S_j , soit :

$$S_{ij} = S_i S_j \quad (2)$$

Ainsi, les interpolations sont considérées comme directionnelles : on interpole dans une direction puis dans l'autre. Les formules d'interpolation 2-D deviennent alors de simples extensions des formules 1-D.

2.2 Interpolation polynômiale de Lagrange 1-D

Pour une interpolation polynômiale de Lagrange, les coefficients S_j sont :

$$S_j = \prod_{l=1, l \neq j}^N \frac{x_0 - x_l}{x_j - x_l} \quad (3)$$

Cette interpolation est précise à l'ordre N .

2.3 Interpolation optimisée 1-D

Les schémas d'interpolations optimisés ont été introduits par Tam et Kurbatskii [1]. Ils consistent à optimiser les coefficients d'interpolation de façon analogue à ceux des schémas DRP. L'optimisation permet alors de contrôler la résolubilité spectrale de nos interpolations. Ainsi, comparée à une méthode du type polynôme de Lagrange et pour une taille de support égale, cette interpolation permet de repousser la limite de résolubilité spectrale jusqu'à 4 points par longueur d'onde. La construction de ce schéma s'effectue dans l'espace des nombres d'onde et s'appuie sur la décomposition de la solution en modes de Fourier. Pour une onde simple $u_k(x) = e^{i[kx + \phi(k)]}$, on introduit l'erreur d'interpolation locale dans l'espace de Fourier par :

$$E_{locale} = \left| e^{i(kx_0 + \phi)} - \sum_{j=1}^N S_j e^{i(kx_j + \phi)} \right|^2 = \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} k \Delta x} \right|^2 \quad (4)$$

Les coefficients d'interpolation optimisés S_j sont obtenues en minimisant l'erreur locale intégrée dans l'espace des nombres d'ondes suivant plusieurs conditions. En 1-D, l'erreur totale à minimiser s'écrit :

$$E = \int_0^\kappa \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} k \Delta x} \right|^2 d(k \Delta x) \quad (5)$$

La première condition est que l'erreur soit nulle pour $k = 0$, c'est-à-dire pour u constante, ce qui donne :

$$E_{locale}(k = 0) = \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j \right|^2 = 0 \quad (6)$$

Une seconde condition développée par Tam et Hu [12] est de rajouter des contraintes d'ordre basées sur un développement en série de Taylor. Ces contraintes permettent d'améliorer le comportement de la solution en bas nombre d'onde. On utilise alors la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour inclure les deux conditions précédentes au problème de minimisation de l'erreur. La fonction de Lagrange est donc définie comme :

$$L = \int_0^{\kappa} \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} y} \right|^2 dy + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^N S_j \right)^2 + \sum_m \mu_m \left[\sum_{k=1}^N S_k (x_k - x_0)^m \right] = 0,$$

avec λ et μ_m les multiplicateurs de Lagrange. S_j , λ et μ_m sont alors les solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial S_j} = 0 & \text{soit} & \mathcal{R}e \left[- \int_0^{\kappa} e^{-ijy} \left(1 - \sum_{m=1}^N S_m e^{-i \frac{x_m - x_0}{\Delta x} y} \right) dy \right] + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & \text{soit} & \sum_{j=1}^N S_j - 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_m} = 0 & \text{soit} & \sum_{k=1}^N m S_k (x_k - x_0)^{m-1} = 0 \end{cases}$$

Dans la suite de cette étude, une interpolation optimisée avec contraintes d'ordre m désignera une optimisation à laquelle on ajoute m contraintes d'ordre par l'intermédiaire de μ_m multiplicateurs de Lagrange.

3 Résultats Numérique

3.1 Schémas numériques

Les équations d'Euler seront résolues numériquement. La discrétisation des flux eulériens est assurée par des schémas centrés DRP (*Dispersion Relation Preserving*) sur 11 points et d'ordre 4 formellement. L'intégrateur temporel sera un schéma de type Runge-Kutta explicite et optimisé, d'ordre 4 et à six-sous étapes. On utilise aussi un filtrage sélectif centré sur 11 points et optimisé jusqu'à 4 points par longueur d'onde. Ces schémas sont issues des travaux de Boguey et Bailly [4].

3.2 Maillages

Un recouvrement de maillage entre une grille cartésienne et une autre est étudié. La première grille a pour résolution $nx_1 = 181$, $ny_1 = 81$. La deuxième grille a pour résolution $nx_2 = 60$, $ny_2 = 61$. La discrétisation spatiale des deux maillages est la même à savoir $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ et $\Delta y_1 = \Delta y_2 = 1$. Les deux grilles sont décalées entre elles d'une demi-maille dans chaque direction comme le montre la figure 1.

Support	Nbr de points d'interpolations	
	cartésien (—)	cartésien (—)
2×2	890	1110
4×4	850	1110
6×6	810	1110
8×8	770	1110
10×10	730	1110
12×12	690	1110

TAB. 1 – Nombre de points d'interpolation en fonction de la taille du support.

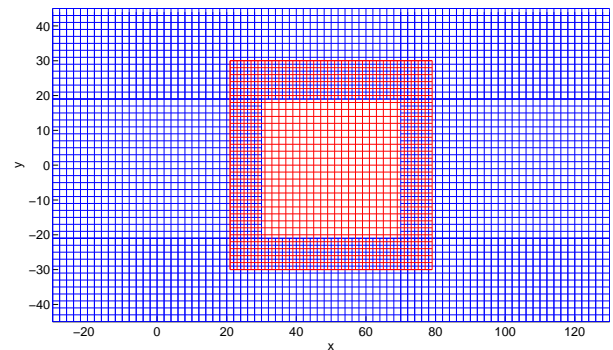


FIG. 1 – Recouvrement d'un maillage cartésien par un maillage cartésien avec 1 point sur 2 représenté sur la figure.

Le maillage prioritaire, c'est-à-dire celui qui conserve une dimension fixe, est le plus petit maillage. Dans le maillage de fond, il se crée donc un trou dont la taille diminue avec le recouvrement de maillage. De plus la taille du recouvrement de maillage augmente avec la taille des supports d'interpolation utilisés. La conséquence est un nombre de points d'interpolation globale moins élevé pour les supports les plus étendus comme le montre le tableau 1. Quelque soit le support, le nombre de points d'interpolation reste assez élevé, de l'ordre de 9 à 11% par rapport au nombre total de points ($nx_1 \times ny_1 + nx_2 \times ny_2$).

3.3 Advection d'un tourbillon

Le premier cas étudié, inspiré par les travaux d'Emmert [10], est le passage d'un tourbillon de Taylor à travers une interface de recouvrement. Ce tourbillon est défini par :

$$\begin{cases} u = u_\infty + A \frac{y}{\Delta y} \exp(\alpha R^2) \\ v = -A \frac{x}{\Delta x} \exp(\alpha R^2) \\ p = -\rho_\infty \frac{A^2}{4\alpha \Delta x \Delta y} \exp(2\alpha R^2) \end{cases} \quad (7)$$

avec $R = \sqrt{y^2 - y^2}$, $\alpha = -\ln 2/b^2$, $b = 0,2$ la demi-largeur de la gaussienne, $u_\infty = 0,5c_\infty$ la vitesse d'advection du tourbillon, c_∞ la vitesse du son et $A = 10$ m/s l'amplitude du tourbillon.

La figure 2 représente la position du tourbillon à des instants successifs pour une interpolation de Lagrange d'ordre 2 (support 2×2). Pour la figure de droite, le tourbillon a complètement traversé la première interface de recouvrement. On distingue clairement la génération d'un rayonnement acoustique parasite. On peut quantifier ce rayonnement pour différents ordres d'interpolation de Lagrange en calculant la pression résiduelle sur le premier tiers du maillage de fond. Une évolution de cette valeur en fonction du nombre d'itérations est tracée sur la figure 3. On remarque alors que le rayonnement parasite, caractérisé après la chute des résidus suite

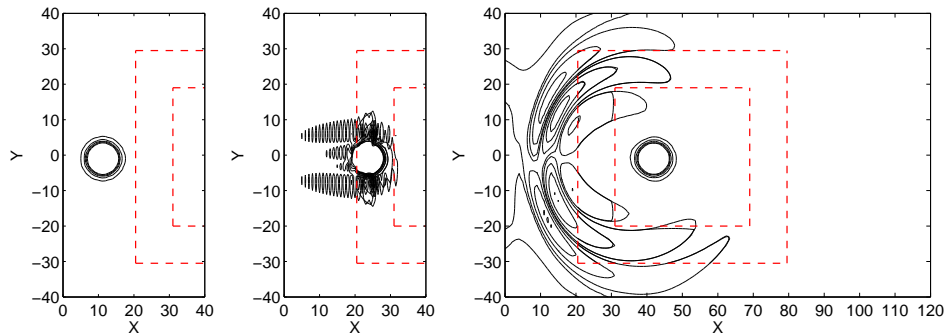


FIG. 2 – Iso-contours du champ de pression lors du passage du tourbillon à travers la première interface de recouvrement (- - -) à trois instants successifs (de gauche à droite) pour une interpolation polynômiale de Lagrange 2×2 . Iso-contours de ± 1 Pa, ± 5 Pa jusqu'à ± 20 Pa tous les 5 Pa.

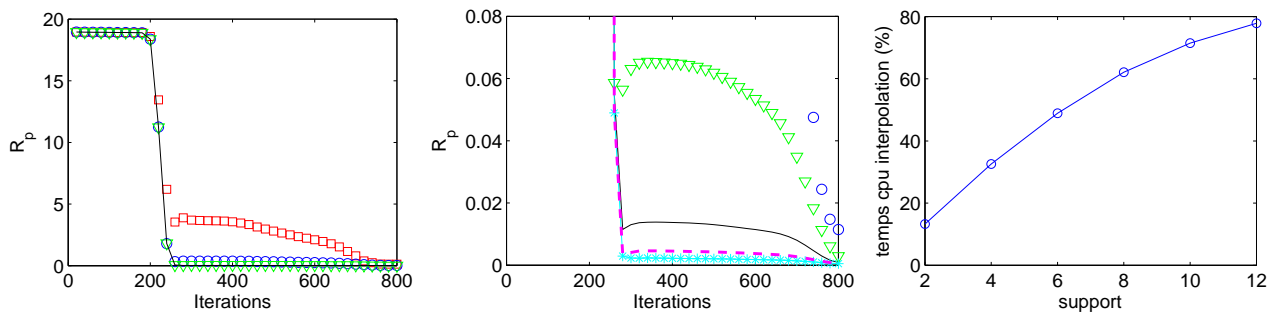


FIG. 3 – Résidu de pression $Rp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} \sum_{j=1}^{ny_1} (p_{i,j} - p_\infty)^2}{40 \times ny_1}}$ en fonction du nombre d'itérations pour différents supports d'interpolation des polynômes de Lagrange. A gauche : supports 2×2 (\square), 4×4 (\circ), 6×6 (\triangle). Au milieu : zoom de la figure de gauche où l'on ajoute les supports 8×8 (—), 10×10 (- - -) 12×12 (*). A droite : part du calcul consacrée à l'exécution des interpolations en fonction de la taille du support.

au passage du tourbillon, est moins intense lorsque l'ordre d'interpolation augmente. On observe aussi qu'à

partir d'une interpolation d'ordre 6 ce rayonnement est très faible. La part du temps de calcul consacrée aux interpolations est aussi représentée sur la figure de droite. Elle est conséquente compte tenu des petits maillages utilisés et donc de la proportion élevée du nombre de points d'interpolation par rapport au nombre total de points de maillage. Ainsi pour des supports 6×6 , cette part atteint déjà environ 50% du temps de calcul.

3.4 Propagation d'une source harmonique

Le cas de la propagation d'une source harmonique permet de pouvoir contrôler le degré de discrétisation souhaité de la solution. Il permet donc de valider le comportement spectral des techniques d'interpolation associées aux recouvrements de maillages pour l'aéroacoustique. On s'intéresse à une source harmonique de la forme : $S = c_\infty \sin(\omega t) \exp\left(\frac{\ln 2}{0.3^2}(x^2 + y^2)\right)$, avec ω la pulsation de la source et c_∞ , la vitesse du son. La solution analytique pour la propagation de cette source est connue [13] et une erreur de la pression rms entre celle-ci et la solution analytique est calculée le long de $y = 0$ sur plusieurs périodes. La norme L2 pour le calcul de l'erreur est retenue et non la norme infinie qui équivaut seulement à l'erreur relevée sur le pic de la source.

La première configuration concerne une source de pulsation $\omega=2\pi/9c_\infty$. Dans ce cas, la longueur d'onde correspond à 10 points de maillage et par conséquent la solution est bien discrétisée. Sur la figure 4, l'erreur décrite précédemment est tracée pour les interpolations polynômiales de Lagrange et les interpolations optimisées avec contraintes d'ordre 2 et 4. On observe que plus la taille du support augmente est plus l'erreur diminue et tend à saturer vers une valeur fixe à partir d'un support 8×8 , quelle que soit l'interpolation. De plus la différence maximale entre l'erreur d'interpolation pour un support 8×8 et celle d'un support 12×12 est inférieure au pourcent par rapport à l'erreur de référence sans recouvrement. La deuxième configuration concerne une

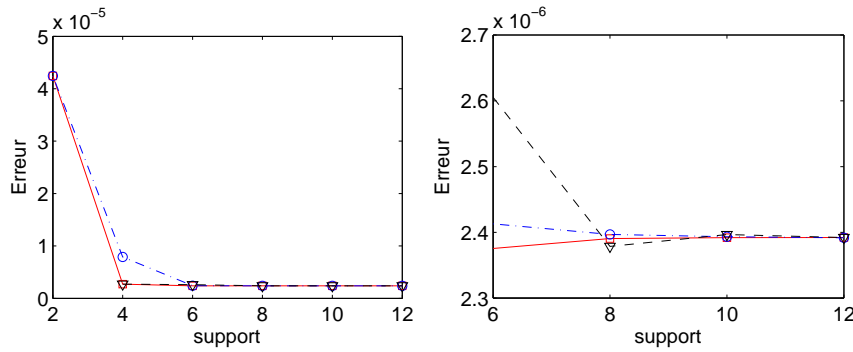


FIG. 4 – Norme L2 de l'erreur de la pression rms calculée par rapport à la solution analytique pour $y = 0$ en fonction de la taille du support d'interpolation $N \times N$. Lagrange (— \square), optimisation et contraintes d'ordre 2 (— \circ), optimisation et contraintes d'ordre 4 (— \triangle).

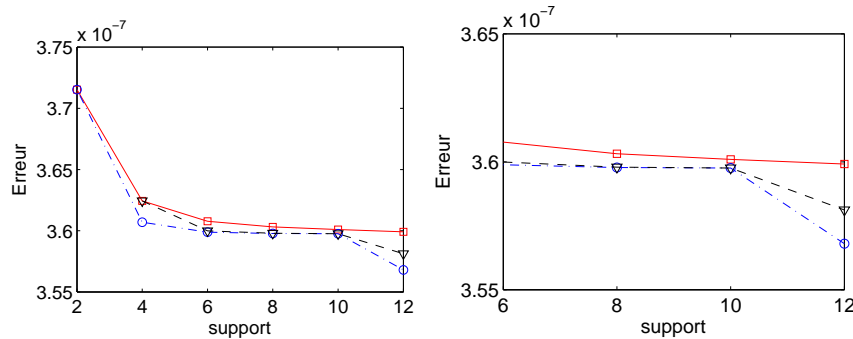


FIG. 5 – Norme L2 de l'erreur de la pression rms calculée par rapport à la solution analytique pour $y = 0$ en fonction de la taille du support d'interpolation $N \times N$. Lagrange (— \square), optimisation et contraintes d'ordre 2 (— \circ), optimisation et contraintes d'ordre 4 (— \triangle).

source de pulsation $\omega=2\pi/4c_\infty$. La longueur d'onde correspond à 5 points de maillage, la solution est à peine supportée par le maillage. A l'instar de la figure 4, la figure 5 présente les erreurs pour les différents types d'interpolations. Sur la figure 5, on remarque que l'optimisation améliore à support égal le comportement de

la solution. Cette tendance est plus marquée pour un support 12×12 . La différence entre une interpolation de support 8×8 et 12×12 reste elle aussi de l'ordre du pourcent par rapport à l'erreur de référence sans recouvrement.

Dans les deux cas test précédents, l'augmentation de la taille du support n'améliore pas considérablement la précision de la solution numérique.

4 Conclusion

Le cas test du tourbillon a mis en évidence la présence d'un rayonnement acoustique parasite susceptible d'apparaître lors d'une simulation aéroacoustique employant une méthode de recouvrement de maillages. Ce rayonnement peut être atténué en augmentant l'ordre d'interpolation pour la communication inter-maillages. Cependant, en considérant le cas test acoustique de la propagation d'une source harmonique, il s'avère que l'augmentation de la taille du support d'interpolation ne mène pas forcément à la meilleure stratégie de calcul. En effet, pour la résolution des équations d'Euler, un recouvrement de maillages faisant intervenir des interpolations sur des supports 6×6 ou 8×8 semble être le meilleur compromis entre coût de calcul et précision de la solution numérique. Cette conclusion implique que l'interpolation ne doit pas nécessairement avoir le même ordre ou la même résolubilité spectrale que nos schémas de discrétisation pour bien se comporter.

Ces techniques de recouvrement de maillages ont été validées par d'autres cas test comme la diffraction d'une source harmonique par un ou deux cylindres. Dans ces deux cas, le recouvrement de maillages se réalise entre un maillage cartésien de fond et un ou deux maillages polaires entourant le ou les cylindre(s) en question. Outre la mise en place d'une méthodologie pour le recouvrement de maillages, le but final de ce développement est l'étude du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique. Cette configuration fera aussi intervenir un maillage polaire pour la cavité et un maillage cartésien au-dessus.

Références

- [1] Tam C. and Kurbatskii K. A wavenumber based extrapolation and interpolation method for use in conjunction with high-order finite difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 157, 588–617, 2000.
- [2] Tam C. and Webb J. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, 107, 262–281, 1993.
- [3] Lele S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103, 16–42, 1992.
- [4] Bogey C. and Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computation. *J. Comput. Phys.*, 194, 194–214, 2004.
- [5] Benek J., Steger J., and Dougherty F. A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations. AIAA Paper 83-1944, 1983. unpublished.
- [6] Chessire G. and Henshaw W. Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations. *J. Comput. Phys.*, 90, 1–64, 1990.
- [7] Sherer S. and Scott J. High-order compact finite-difference methods on general overset grids. *J. Comput. Phys.*, 210, 459–496, 2005.
- [8] Delfs J. An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries. AIAA Paper 2001-2199, 2001.
- [9] Desquesnes G., Terracol M., Manoha E., and Sagaut P. On the use of a high order overlapping grid method for coupling in CFD/CAA. *J. Comput. Phys.*, 220, 355–382, 2006.
- [10] Emmert T. Development of a multidomain high-order algorithm for computational aeroacoustics : Application to subsonic and transonic confined flows. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007. No 2007-30.
- [11] Henshaw B., Chand K., and Quinlan D. Overture. <https://computation.llnl.gov/casc/Overture/>.
- [12] Tam C. and Hu F. An optimized multi-dimensional interpolation scheme for computational aeroacoustics applications using overset grids. AIAA Paper 2004-2812, 2004.
- [13] Sherer S. Scattering of sound from axisymmetric source by multiple circular cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(2), 488–496, 2004.