

---

## **Evaluation de la précision des courbes d'étalonnage des turbidimètres par la méthode de Monte Carlo**

Assessment of the accuracy of turbidimeter calibration curves using the Monte Carlo method

Ruban G., Joannis C., Derrien A.-S.

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, route de Bouaye, BP 4129,  
44341 Bouguenais Cedex, France

([gwenael.ruban@lcpc.fr](mailto:gwenael.ruban@lcpc.fr), [claud.joannis@lcpc.fr](mailto:claud.joannis@lcpc.fr))

### **RESUME**

L'évaluation de la précision du mesurage de la turbidité des eaux résiduaires urbaines est nécessaire pour ses différentes applications : pilotage d'ouvrages de stockage ou de traitement, surveillance des rejets dans le milieu récepteur et calage de modèles de flux polluants. Les formules analytiques classiques pour l'évaluation de l'incertitude du mesurage restent relativement simples tant que le modèle d'étalonnage des appareils est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux, que la dispersion des mesurages est constante en fonction de la valeur mesurée et que l'incertitude sur les étalons est négligeable. Cependant il apparaît que ce dernier élément peut représenter une part non négligeable de l'incertitude totale du mesurage. Les méthodes analytiques devenant alors particulièrement complexes, on a donc évalué l'incertitude de mesurage de la turbidité en effectuant des simulations d'étalonnages par la méthode de Monte Carlo.

### **ABSTRACT**

The assessment of the accuracy of turbidity measurement in urban waste waters is necessary for various purposes: automation of retention basins or treatment works, control of discharges in the receiving waters, calibration of pollutant flow models. The usual analytical formulas for the assessment of the measurement accuracy remain relatively simple as long as the calibration curves of the devices are polynomials of power one or two, as the measurement scattering versus the measured value is constant, and as the uncertainty of the standards is insignificant. However it appears that this last element may play a noticeable role in the total uncertainty of the measurement. As the analytical methods which take this uncertainty into account are more complicated, the accuracy of turbidity measurement was then computed in simulating calibrations with the simpler method of Monte Carlo.

### **MOTS CLES**

Assainissement urbain, Etalonnage, Précision, Réseau d'assainissement, Turbidité.

## 1 INTRODUCTION

La turbidimétrie, déjà utilisée pour le mesurage des concentrations de boues dans les stations de traitement des eaux résiduaires, commence à se développer en réseaux d'assainissement. Elle peut être utilisée pour le pilotage d'ouvrages de stockage ou de traitement, pour la surveillance des rejets et le calage de modèles de flux polluants (il faut alors établir les relations entre polluants et turbidité).

Pour ces différentes applications, il est souhaitable de connaître la précision du mesurage de la turbidité, notamment l'incertitude de la courbe d'étalonnage de l'appareil. Dans le cas le plus simple (étalons précis, dispersion constante des mesures en fonction de la valeur mesurée), l'incertitude peut être calculée à l'aide de formules analytiques simples (appareil linéaire), ou plus compliquées pour les appareils non-linéaires, ce qui est fréquemment le cas pour les turbidimètres de terrain (Ruban G. et al., 2006). Cependant pour ces appareils, les incertitudes dues aux étalons peuvent représenter une part non négligeable de l'incertitude totale du mesurage. Le calcul à l'aide de formules analytiques devient alors particulièrement lourd.

La méthode plus simple de Monte Carlo par simulation de l'étalonnage a donc été utilisée pour évaluer l'incertitude totale du mesurage de la turbidité sur échantillons. Ces échantillons sont soit des étalons pour les opérations d'étalonnage, de vérification et de réglage, soit des eaux résiduaires pour l'établissement des relations entre polluants et turbidité dans de bonnes conditions de représentativité (mesurage de turbidité et analyses effectués sur le même échantillon).

## 2 EVALUATION DE L'INCERTITUDE D'ETALONNAGE AVEC LES FORMULES ANALYTIQUES CLASSIQUES

### 2.1 Matériel, méthodes d'étalonnage et de calcul de l'incertitude

#### 2.1.1 Matériel et méthodes d'étalonnage

Un turbidimètre de terrain a été étalonné sur la gamme 0-2000 FAU (Formazin Attenuation Unit). Cette gamme convient pour la majorité des turbidités constatées dans les eaux résiduaires urbaines. Les étalons de formazine ont été préparés au laboratoire selon la norme NF EN ISO 7027 (2000) sur la détermination de la turbidité. Cinq niveaux d'étalonnage 100, 250, 500, 1000, 2000 FAU (plus le zéro), correspondant au nombre minimum indiqué dans la norme, ont été obtenus par dilutions successives de suspensions mères à 4000 FAU. Ils sont répartis en progression sensiblement exponentielle pour optimiser la précision relative dans les basses valeurs.

Les étalonnages ont été effectués d'une part sur une seule gamme d'étalons, et d'autre part sur cinq gammes différentes d'étalons, pour prendre en compte leur incertitude, comme indiqué dans la norme XP T 90-210 (1999). Cette norme porte en fait sur l'évaluation d'une méthode alternative par rapport à une méthode de référence, mais peut être transposée à l'étalonnage de capteurs. Les mesurages ont été répétés cinq fois comme également indiqué dans cette norme.

Afin d'accroître la représentativité statistique des résultats, 3 séries d'étalonnages sur 1 gamme et 3 séries d'étalonnage sur 5 gammes ont été effectuées.

#### 2.1.2 Calcul de l'incertitude

L'incertitude d'étalonnage pour une valeur étalon  $x_0$  donnée, peut être exprimée par l'écart type  $S_{\text{étal}}$  au carré (variance) selon les expressions ci-dessous ( $y_0$  est l'indication de l'appareil correspondant à  $x_0$ ). Ces expressions sont valides avec les

hypothèses de dispersion constante des mesures en fonction de la valeur mesurée et d'incertitude négligeable sur les étalons :

$$s^2_{\text{étal}}(x_0) = \frac{s^2_{\text{étal}}(y_0)}{b^2} = \frac{s_i^2}{b^2} \left[ \frac{1}{N} + \frac{(x_0 - xm)^2}{\sum_i n_i (x_i - xm)^2} \right] \quad (1)$$

pour une droite d'étalonnage de pente b et :

$$s^2_{\text{étal}}(x_0) = \frac{s^2_{\text{étal}}(y_0)}{f'(x_0)^2} = \frac{s_i^2}{f'(x_0)^2} \left[ \frac{1}{N} + A_{F5} \right] \quad (2)$$

pour un polynôme de degré 2, de pente f', avec :

$$A_{F5} = \frac{A_{F1}(x_0 - xm)^2 + A_{F2} \left( x_0^2 - \frac{\sum_i n_i x_i^2}{N} \right)^2 - 2A_{F3}(x_0 - xm) \left( x_0^2 - \frac{\sum_i n_i x_i^2}{N} \right)}{A_{F4}}$$

$$A_{F1} = \sum_i n_i \left( x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 \right)^2 \quad A_{F2} = \sum_i n_i (x_i - xm)^2$$

$$A_{F3} = \sum_i n_i (x_i - xm) \left( x_i^2 - \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 \right) \quad A_{F4} = A_{F1} A_{F2} - A_{F3}^2$$

où  $s_i^2$  : estimation de la variance liée (écart type des résidus au carré) =  $\sum_i n_i (y_i - y'_i)^2 / (N - 2)$  ;

N et  $n_i$  : respectivement le nombre de valeurs d'étalonnage et le nombre de répétitions ;

$y_i$  et  $y'_i$  : respectivement les indications de l'appareil pour les valeurs d'étalonnage et l'ordonnée correspondante de la courbe d'étalonnage ;

$x_i$  et  $xm$  : respectivement les valeurs et la moyenne des valeurs étalon utilisées pour l'établissement de la courbe d'étalonnage.

La division respectivement par b et  $f'(x_0)$  s'explique simplement du fait qu'on utilise en pratique la fonction inverse de la relation d'étalonnage pour convertir les indications  $y_0$  de l'appareil en valeurs  $x_0$  exprimées en unités étalon (cf. figure 1).

Pour des polynômes de degré supérieur à 2, l'expression de  $s^2_{\text{étal}}(x_0)$  se complexifie encore (Neuilly, 1998). Différentes méthodes sont proposées pour juger de l'intérêt de linéariser l'appareil par un polynôme de degré 2 ou supérieur (Bertrand-Krajewski et al., 2000 ; Neuilly et CETAMA, 1998 ; norme XP T 90-210, 1999). On peut plus simplement juger de l'utilité de passer à un polynôme de degré supérieur en comparant les erreurs d'étalonnage calculées avec le besoin de précision souhaité pour l'application concernée.

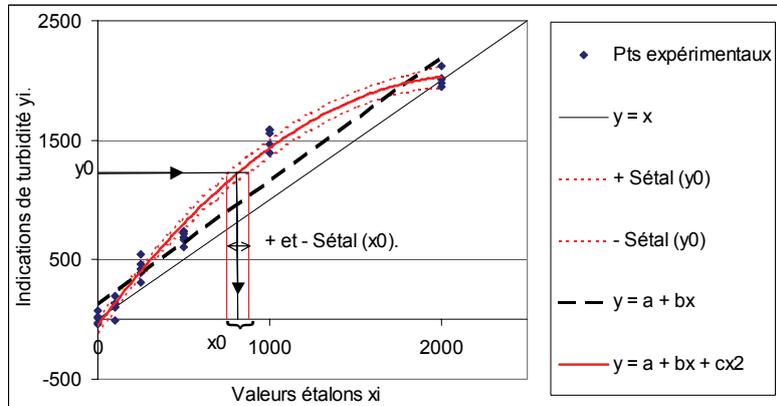


Figure 1 – Exemple de droite et courbe d'étalonnage avec les incertitudes associées (pour la courbe).

## 2.2 Résultats et discussion

Le graphe ci-dessous (figure 2) représente d'une part l'écart type expérimental  $s_{\text{exp}}(x_0)$  et d'autre part les incertitudes d'étalonnage  $s_{\text{étal}}(x_0)$  pour les trois configurations testées. Comme indiqué en 2.1.1, ces résultats correspondent à la moyenne de 3 séries de chacune des configurations. Ces trois configurations sont les suivantes :

- étalonnage linéaire sur 1 gamme d'étalons (5 répétitions) ;
- linéarisation avec un polynôme de degré 2 sur 1 gamme d'étalons (5 répétitions) ;
- linéarisation avec un polynôme de degré 2 sur 5 gammes d'étalons pour prendre en compte leur incertitude (norme XP T 90-210, 1999).

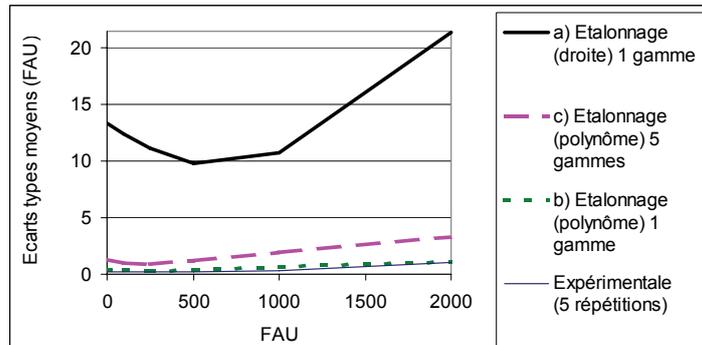


Figure 2 - Ecart types d'incertitude expérimentale et d'étalonnage pour 3 configurations

La figure 2 montre que :

- l'écart type d'incertitude pour les étalonnages polynomiaux b) et c) est nettement inférieur à celui de l'étalonnage linéaire a). Pour ce dernier on obtient une incertitude relative d'environ 25% pour la valeur 100 FAU au niveau de confiance de 95%. Cette incertitude paraît trop grande pour cette valeur qui correspond approximativement au bas de la gamme des turbidités des eaux résiduaires urbaines : il est donc préférable de linéariser par un polynôme ;

- l'écart type d'incertitude expérimental  $s_{\text{exp}}(x_0)$  qui caractérise la dispersion des mesures, augmente en fonction de la valeur mesurée ;
- l'écart type d'incertitude d'étalonnage polynomial sur 5 gammes c), qui prend en compte l'incertitude sur les étalons, apparaît prépondérant par rapport à l'écart type d'incertitude expérimental  $s_{\text{exp}}(x_0)$ . L'incertitude sur les étalons joue donc un rôle notable dans l'incertitude d'étalonnage ;
- l'écart type d'incertitude d'étalonnage polynomial sur 1 gamme b), est notablement inférieur à celui pour l'étalonnage sur 5 gammes c), alors que, par analogie avec la détermination de l'écart type d'une moyenne de 5 échantillons par rapport à l'écart type de la population, on s'attendrait à ce qu'il soit  $\sqrt{5}$  fois plus élevé. L'explication de ce paradoxe est qu'un étalonnage sur une gamme effectué en diluant une suspension mère unique ne permet pas de prendre en compte les incertitudes sur les suspensions mères, et donc la dispersion des valeurs qui en résulte ;

Mais même avec 5 gammes, l'utilisation des formules ci-dessus n'est cependant pas correcte car on ne tient pas compte de la variation des incertitudes (expérimentales et sur les étalons) en fonction de la valeur mesurée. La méthode analytique correcte étant particulièrement complexe (voir Bertrand-Krajewski, 2004, pour l'étalonnage linéaire), on a donc procédé par simulation de l'étalonnage par la méthode plus simple de Monte Carlo.

### 3 EVALUATION DE L'INCERTITUDE D'ETALONNAGE AVEC LA METHODE DE MONTE CARLO

La méthode de Monte Carlo consiste à simuler la distribution statistique des valeurs de la variable de sortie d'un processus, connaissant la distribution des valeurs des variables d'entrée (Wonnacot et Wonnacot, 1990 ; Bertrand-Krajewski et al., 2000). Dans notre cas les distributions des variables d'entrée (valeurs des étalons en FAU et répétabilité des mesures en fonction de la valeur mesurée) suivent la loi normale, et il en est de même pour la variable de sortie (turbidités indiquées par l'appareil pour une valeur étalon donnée). Les valeurs d'écart types caractérisant la distribution des valeurs des variables d'entrée ont bien entendu été calculées d'après les résultats expérimentaux des étalonnages décrits au §2.2. Ces valeurs sont illustrées sur la figure 3 ci-dessous.

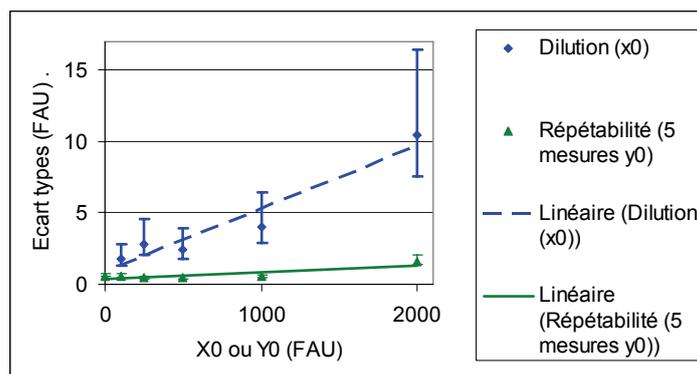


Figure 3 - Ecart types d'incertitude expérimentaux de dilution et de répétabilité

Les écarts types de dilution correspondent aux incertitudes sur les valeurs des étalons  $x_0$  déduites des indications  $y_0$  de l'appareil par la fonction inverse d'étalonnage (figure 1). Les écarts types de répétabilité correspondent à la dispersion

des indications  $y_0$  de l'appareil pour une valeur étalon donnée. Compte tenu des incertitudes sur les valeurs d'écart types représentées par les barres verticales, ces valeurs ont été linéarisées.

En se basant sur ces valeurs d'écart types, on a simulé par tirage aléatoire un grand nombre (4800, permettant d'évaluer des écarts-types à 2% près) de séries expérimentales d'étalonnage, à partir de la courbe d'étalonnage  $c$ ) du §2.2 définie comme vraie et par rapport à laquelle sont calculées les erreurs. L'enveloppe de 68% des écarts entre les courbes d'étalonnage simulées et la courbe « vraie » détermine la zone de confiance correspondant à l'écart type d'étalonnage  $s_{\text{étal}}(y_0)$  (cf. figure 1 ; pour une distribution normale, 68% des valeurs sont comprises entre plus ou moins un écart type).

Le graphe ci-dessous montre les écarts types d'étalonnage  $s_{\text{étal}}(x_0)$  (on divise  $s_{\text{étal}}(y_0)$  par  $f'(x_0)$  comme expliqué au §2.1.2, pour l'exprimer en valeurs étalons), calculés par la méthode analytique et la simulation de Monte Carlo. On constate que :

- l'incertitude d'étalonnage sur 1 gamme simulée par Monte Carlo est effectivement de l'ordre de  $\sqrt{5}$  fois supérieure à celle sur 5 gammes (comme supposé au §2.2) ;
- sur 5 gammes, la méthode analytique approchée surestime l'incertitude pour les faibles valeurs (0.9 FAU contre 0.4 à 100 FAU), et la sous-estime d'environ 1/3 pour les moyennes à fortes valeurs : ce pourrait être dû au fait que la méthode analytique ne tient pas compte de la variabilité de la variance en fonction de la valeur mesurée.

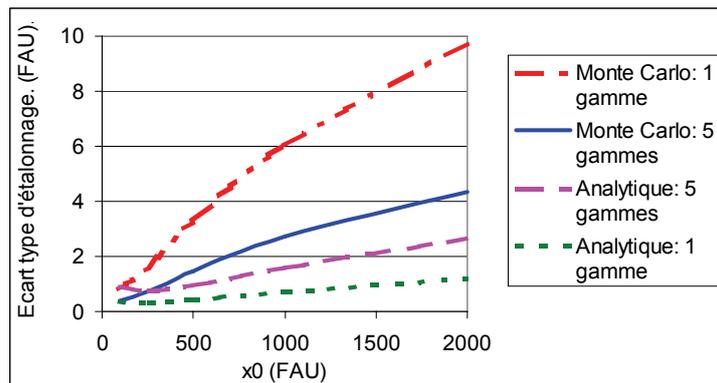


Figure 4 - Ecart types d'étalonnage sur 1 gamme et 5 gammes, déterminés par les formules analytiques classiques et la simulation de Monte Carlo.

Un intérêt supplémentaire de la méthode de Monte Carlo est de pouvoir effectuer des simulations complémentaires pour confirmer des hypothèses. Ainsi :

- si on simule une incertitude nulle sur les suspensions mères, les écarts types déterminés par la méthode analytique sur 1 gamme et sur 5 gammes sont voisines, ce qui confirme que la sous-estimation sur 1 gamme est due au fait que l'incertitude sur les suspensions mères n'est pas prise en compte ;
- si on simule une variance liée constante, les écarts types déterminés sur 5 gammes par la méthode analytique et la méthode de Monte Carlo sont voisines, ce qui confirme que les écarts constatés entre ces 2 méthodes sont dus à la non-prise en compte par la méthode analytique, de la variabilité de la variance liée en fonction de la valeur mesurée.

#### 4 INCERTITUDE TOTALE DU MESURAGE DE LA TURBIDITE

Dans le cas général, les sources d'erreur expérimentale et d'étalonnage sont indépendantes. La variance caractérisant l'incertitude totale s'obtient alors en faisant la somme des variances correspondant à ces 2 sources d'erreur.

La variance d'étalonnage  $s_{\text{etal}}^2$  a été déterminée au paragraphe ci-dessus ainsi que la variance expérimentale  $s_{\text{exp}}^2$  dans le cadre de l'étalonnage à la formazine. Mais pour un même appareil la variance expérimentale dépend du milieu de mesure. On a ainsi constaté que dans des conditions de mesure identiques, le rapport des écarts types  $s_{\text{ERU}i}$  d'un échantillon représentatif d'eaux résiduaires urbaines - ERU - de temps sec sur ceux d'un échantillon de formazine varie de 3 à 7 suivant les niveaux (de 100 à 2000 FAU). Pour déterminer l'incertitude totale de la mesure, il faut donc composer la variance d'étalonnage avec la variance expérimentale déterminée, soit sur la formazine (pour les étalonnages, vérifications et réglages), soit sur les eaux résiduaires (pour l'établissement des relations entre polluants et turbidité). Si on fait la moyenne de  $n_0$  mesurages  $y_i$  indépendants sur les eaux résiduaires, la variance expérimentale  $s_{\text{expERU}}^2$  correspondant à la turbidité moyenne  $y_{0m}$  s'exprime alors de la façon suivante en fonction de l'écart type  $s_{\text{ERU}}$  déterminé avec le même appareil sur ces eaux :

$$s_{\text{expERU}}^2(x_0) = \frac{s_{\text{expERU}}^2(y_{0m})}{f'(x_0)^2} = \frac{s_{\text{ERU}}^2}{n_0 \cdot f'(x_0)^2} \quad (3)$$

La division par  $f'(x_0)$  s'explique comme au §2.1.2 par la conversion de l'indication  $y_{0m}$  en valeur étalon  $x_0$  via l'inverse de la fonction d'étalonnage (cf. figure 1).

La variance totale  $s_{\text{totale}}(x_0)$  sur l'estimation de  $x_0$  est donc :

$$s_{\text{totale}}^2(x_0) = s_{\text{etal}}^2(x_0) + s_{\text{expERU}}^2(x_0) \quad (4)$$

Les mesurages de turbidité sur échantillons d'eaux résiduaires (tamisées à 2mm pour éliminer les grosses matières en suspension non représentatives) présentent une distribution normale. L'écart type d'incertitude ainsi calculé correspond donc à un intervalle de confiance à 68%. Pour passer au niveau de confiance plus classique de 95%, qui correspond au risque  $\alpha = 5\%$  que la valeur soit située en dehors de l'intervalle, on multiplie cet écart type par un facteur d'élargissement correspondant à la variable de Student  $t_{1-\alpha/2}(v)$ ,  $v$  étant le nombre de degrés de liberté (égal au nombre  $N$  de mesurages d'étalonnage moins le degré du polynôme). Le résultat du mesurage  $x_0$  de turbidité affecté de l'incertitude totale s'exprime donc de la manière suivante:

$$x_0 \pm s_{\text{totale}}(x_0) * t_{1-\alpha/2}(v) \quad (5)$$

Les différents écarts types déterminés sur les données expérimentales utilisées dans le cadre de cet article, ainsi que les incertitudes totales relatives au niveau de confiance de 95%, rapportées aux valeurs mesurées, sont indiqués dans le tableau 1 ci-après. On constate que l'écart type expérimental sur 5 répétitions est inférieur ou égal à l'écart type d'étalonnage sur 5 gammes. Les incertitudes totales correspondantes sont inférieures à 1.1% à partir de la valeur 100 FAU qui correspond approximativement aux valeurs basses rencontrées en eaux résiduaires urbaines. On obtient donc une bonne précision en faisant la moyenne de 5 répétitions sur 5 gammes étalon et 6 niveaux de gamme (zéro inclus), sous réserve de linéariser cet appareil avec un polynôme de degré 2. En n'utilisant qu'une gamme étalon, on obtient une précision de l'ordre de  $\sqrt{5}$  fois inférieure, soit 2% à 100 FAU, ce qui est également satisfaisant, mais nécessite d'estimer par ailleurs l'incertitude sur les étalons.

Niveaux de gamme	$S_{\text{ERU}}(X_0)$	$S_{\text{expERU}}(X_0)$ ( $S_{\text{ERU}}(X_0)/\sqrt{5}$ )	$S_{\text{étal}}(X_0)$ 5 gammes	$S_{\text{totale}}(X_0)$ 5 gammes	incertitude 5 gammes	incertitude 1 gamme
100	0.8	0.4	0.4	0.5	1.1	1.9
250	1.5	0.7	0.7	1.0	0.8	1.4
500	2.1	0.9	1.5	1.7	0.7	1.4
1000	3.9	1.7	2.8	3.3	0.7	1.3
2000	8.5	3.8	4.5	5.9	0.6	1.1

Tableau 1 : écarts types expérimentaux sur 1 et 5 répétitions, d'étalonnage et totaux sur 5 gammes étalon (en FAU), et incertitudes totales au niveau de confiance de 95% (en %).

## 5 CONCLUSIONS

L'évaluation de la précision des mesurages de turbidité avec les formules analytiques classiques donne des résultats inexacts car:

- la dispersion des mesurages augmente avec la valeur mesurée;
- ces formules ne prennent pas en compte l'incertitude sur les étalons (mesurée ou indiquée par le fabricant).

La simulation de l'étalonnage par la méthode de Monte Carlo permet de prendre en compte ces éléments et est facilement exécutable avec un tableur. Elle permet en outre de valider des hypothèses sur les causes des écarts constatés avec la méthode analytique classique.

Finalement l'incertitude totale à court terme du mesurage de la turbidité sur échantillon est très satisfaisante (moins de 2% au dessus de 100 FAU), pourvu que l'appareil soit linéarisé (par un polynôme du second degré dans notre cas). Un tel résultat peut être obtenu dans des conditions de mise en œuvre proches de celles du laboratoire : maîtrise des variables d'environnement (température, luminosité), préparation et conservation des étalons, homogénéisation pendant le mesurage. La poursuite de l'étude portera sur l'évaluation de la précision à long terme in situ, prenant en compte l'influence des variables d'environnement et la dérive.

## 6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Bertrand-Krajewski, J.-L., Laplace, D., Joannis, C., Chebbo, G. (2000). *Mesures en hydrologie urbaine et assainissement*. Technique et Documentation, Paris (France), 794 pages. ISBN 2-7430-0380-4.
- Bertrand-Krajewski, J.-L. (2004). TSS concentration in sewers estimated from turbidity measurements by means of linear regression accounting for uncertainties in both variables. *Water Science and Technology*, 50 (11), 81-88.
- Ruban G., Bertrand-Krajewski J.-L., Chebbo G., Gromaire M.-C., Joannis C. (2006). Précision et reproductibilité du mesurage de la turbidité des eaux résiduaires urbaines, *La Houille Blanche*, 4, 129-135.
- Neuilly, M., CETAMA (1998). *Modélisation et estimation des erreurs de mesure*. Technique et Documentation, Paris (France), 704 pages. ISBN 2-7430-0272-7.
- NF EN ISO 7027 (2000). *Water quality – Determination of turbidity*. AFNOR, Paris (France), mars 2000, 14 pages.
- XP T 90-210 (1999). Qualité de l'eau – Protocole d'évaluation d'une méthode alternative d'analyse physico-chimique quantitative par rapport à une méthode de référence. AFNOR, Paris (France), décembre 1999, 61 pages.
- Wonnacot T.H. et Wonnacot R.J. (1990). *Introductory statistics for business and economics*, Ed. John Wiley and Sons, New York (USA), 790 pages. ISBN 2-7178-1041-2.