

Bases équilibrées et signalisation multidimensionnelle

Thierry CHONAVEL

GET - ENST de Bretagne, Laboratoire TAMCIC (UMR 2872),
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3, France

thierry.chonavel@enst-bretagne.fr

Résumé – On envisage ici le problème de la construction d’une base orthonormée, relativement au produit scalaire euclidien, dont les éléments ont tous la même norme vis à vis d’un autre produit scalaire. On propose un algorithme itératif pour réaliser cette opération. Une application possible de cette méthode vise à construire des bases de signalisation pour les modulations numériques multi-dimensionnelles possédant une proportion d’énergie bornée hors d’une bande de fréquences prescrite. Par ailleurs, pour quantifier le gain lié à l’augmentation de dimensionnalité des modulations PSK, on propose une nouvelle formule asymptotique de probabilité d’erreur pour de telles modulations.

Abstract – The paper addresses the problem of building an orthonormal family of vectors with respect to the euclidian norm and that have the same norm with respect to some other fixed matrix norm. We propose a converging procedure to answer this question. One possible application of this result is that of building orthogonal signaling functions for higher dimensional modulations in digital transmissions, with limited energy outside a fixed frequency bandwidth. We also illustrate the interest of multidimensional modulations through a new error probability formula for higher dimensional PSK modulations.

1 Introduction

On considère ici une famille orthonormée de vecteurs propres associés à L valeurs propres d’une certaine matrice symétrique positive \mathbf{S} (ou plus généralement hermitienne positive). Dans de nombreuses applications on s’intéresse aux L plus grandes, ou plus petites, valeurs propres de \mathbf{S} . C’est le cas par exemple en localisation de sources [14], en estimation de filtres multi-canaux [3] ou pour la construction des séquences sphéroïdales de Slepian [15]. Dans ces applications, on cherche le sous-espace de taille fixée pour lequel la matrice \mathbf{S} présente la plus grande concentration d’énergie.

Dans certaines situations, on peut être intéressé par la construction de bases orthonormales vis à vis du produit scalaire euclidien dont les éléments présentent une \mathbf{S} -norme identique, la \mathbf{S} -norme étant définie par $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{S}}^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{S} \mathbf{u}$. La norme euclidienne sera simplement notée $\|\mathbf{u}\|$ ($\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$). On va donc chercher une base dont les éléments vérifient $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{S}}^2 \geq 1 - \tau$ pour un certain coefficient de dépassement τ fixé. On voudrait de plus que $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{S}}^2$ reste constant pour les éléments de la base. On appellera base équilibrée une telle famille de vecteurs. Notons que d’une part la dimension d’une telle base peut être supérieure à celle des vecteurs propres de \mathbf{S} dont la \mathbf{S} -norme est supérieure à $1 - \tau$ et que d’autre part le fait d’avoir exactement la même \mathbf{S} -norme pour tous ses éléments est intéressante pour les applications.

Ainsi, en communications numériques, pour une bande

de fréquences $[-F, F]$ donnée, il existe une base de d fonctions qui concentrent simultanément l’essentiel de leur énergie dans cette bande et dans un intervalle de durée T dès lors que $2FT = d$ [15]. On verra que la technique d’équilibrage de base proposée permet d’optimiser la dimension de la base de signalisation pour un niveau maximum d’énergie hors bande de ses éléments prescrit, avec pour chaque signal la même proportion d’énergie hors bande.

La suite de l’article est organisée comme suit : la section 2 présente la technique d’équilibrage de base. On applique cette technique dans la section 3 à un exemple de signalisation pour les modulations multi-dimensionnelles par équilibrage de séquences de Slepian. On illustre l’intérêt de l’emploi de modulations multi-dimensionnelles de type PSK sur la base d’une approximation de la probabilité d’erreur asymptotique (vis à vis du nombre de point de la constellation) de telles modulations.

2 Procédure d’équilibrage de base

Soit \mathbf{S} une matrice avec $\mathbf{S} > 0$, $(\mathbf{V}_i)_{i=1,n}$ ses vecteurs propres et $d_{\max} = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ les valeurs propres correspondantes. Pour tout vecteur normé \mathbf{v} , on notera τ le coefficient $1 - \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{S}}^2$. Pour $\tau_0 \in [d_{\max}, 0[$ fixé, on cherche l’espace des vecteurs \mathbf{v} tels que $\tau \leq \tau_0$. La dimension de cet espace, notée L , vaut

$$L = \arg \max_l \{l; l^{-1} \sum_{k=1,l} d_k \geq 1 - \tau_0\}. \quad (1)$$

Dans la suite, on notera $\mathbf{D} = \text{diag}([d_1, \dots, d_L])$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_L]$ et $\bar{\mathbf{d}} = L^{-1} \sum_{k=1, L} d_k$. $\mathbf{R}^{(a,b)}(\theta)$ représentera la rotation de Givens [5] d'angle θ dans le sous-espace de dimension 2 indicé par a et b . L'algorithme s'écrit comme suit :

```
- Initialisation :  $\mathbf{U}$ , avec  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{U} \neq \mathbf{I}$ ,
   $\mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}$ ,
- Iterations :
tant que  $\sum_{i=1, L} |\mathbf{M}_{ii} - \bar{d}| \geq \varepsilon$ ,
  boucles  $a = 1 \rightarrow L - 1$ ,  $b = a + 1 \rightarrow L$ 
     $\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\mathbf{M}_{aa} - \mathbf{M}_{bb}}{\mathbf{M}_{aa} + \mathbf{M}_{bb}} \right)$ 
     $\mathbf{M} = \mathbf{R}^{(a,b)}(\theta) \mathbf{M} \mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$ 
     $\mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$ 
  fin boucles
fin tant que
 $\mathbf{W} := \mathbf{V} \mathbf{U}$ .
```

Dans cette procédure, on a fixé $\varepsilon \ll 1$ et l'angle θ est choisi de sorte à assurer l'égalité des termes d'indice (a, a) et (b, b) de \mathbf{M} dans le changement de base défini par $\mathbf{R}^{(a,b)}(\theta) \times \mathbf{M} \times \mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$. On montre en annexe le résultat suivant :

Proposition 1 *Les itérations de la procédure d'équilibrage de base fournissent une suite de matrices $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, \dots$ dont les termes diagonaux convergent vers $\bar{\mathbf{d}}\mathbf{I}$. De plus, la famille $\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_L]$ fournie par l'algorithme est orthonormale et $\|\mathbf{W}_k\|_2^2 = \bar{d}$, pour $k = 1, \dots, L$.*

La procédure d'équilibrage apparaît donc comme une transformation orthogonale de la famille de vecteurs sélectionnée initialement.

3 Signalisation

L'emploi de modulations multidimensionnelles permet d'assurer la transmission avec des probabilités d'erreur améliorées [4, 10, 12]. Par ailleurs, l'emploi de réseaux de points permet de construire des constellations multidimensionnelles performantes [1]. Pour un canal gaussien, la distribution gaussienne de la source est optimale, ce qui amène à envisager l'emploi de constellations réalisant une quantification vectorielle de la source gaussienne [8]. Même si la distorsion radiale ne devient négligeable vis à vis de la distorsion angulaire de la source gaussienne que pour des dimensions élevées [13, 8], il apparaît que l'augmentation de dimension des vecteurs quantifiés tend à rapprocher le quantifieur d'un code sphérique [2], c'est à dire un quantifieur uniforme sur l'hypersphère.

Aussi, on s'intéresse ici à la signalisation multi-dimensionnelle en montrant son apport dans le cas particulier des constellations PSK multidimensionnelles, notées PSK- d pour la dimension d . Afin d'assurer la signalisation multidimensionnelle portant la constellation, les versions équi-

librées des fonctions de Slepian [15] pourront constituer des candidats intéressants

3.1 Constellation multi-dimensionnelles

Pour un nombre de points de la constellation élevé, on pourra identifier localement l'hypersphère à son hyperplan tangent et donc construire un code sphérique de densité et de distance minimale correspondant à celles du meilleur empilement de sphère connu pour l'hyperplan tangent [7]. On exploite ici cette propriété pour fournir une approximation asymptotique de la probabilité d'erreur d'une modulation PSK- d . Si N_d représente le nombre de points de la constellation, E_b l'énergie par bit d'information transmis et N_0 la densité spectrale de puissance du bruit, on montre en annexe que la probabilité d'erreur de la modulation PSK- d peut être approchée par

$$P_e^{PSK-d} = \frac{k_{d-1}}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b \log_2(N_d)}{N_0}} \left[\frac{d \delta_{d-1}}{N_d} \beta\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{d-1}} \right). \quad (2)$$

où k_n and δ_n représentent respectivement le nombre de plus proches voisins (*kissing number*) et la densité de l'empilement de sphère considéré en dimension n [2], et

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \text{ avec } \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (3)$$

Notons qu'en dimension 2, l'équation (2) redonne l'approximation classique $P_e^{PSK-2} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b \log_2 N}{N_0} \frac{\pi}{N}}\right)$ obtenue pour N tel que $\sin(\pi/N) \approx \pi/N$. Pour $d > 2$, cette formule est valide pour des valeurs élevées de N_d . Par ailleurs, pour une modulation QAM d'enveloppe sphérique, on peut approximer la probabilité d'erreur par

$$P_e^{QAM-d} = \frac{k_d}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d+2}{d}} \times \frac{E_b \log_2(N_d)}{N_0} \left[\frac{\delta_d}{N_d} \right]^{1/d} \right). \quad (4)$$

Afin de vérifier le comportement pratique de cette formule, on a tracé sur la figure I les courbes de probabilité d'erreur fournies pour les meilleurs codes sphériques connus comportant 128 points en dimensions 3, 4 et 5 [16]. On vérifie une amélioration des performances quand d augmente (figure I-(a)), amélioration cohérente avec les formules (2) et (4) précédentes (figure I-(b)). La figure I-(c) présente une comparaison à rendement spectral identique correspondant pour des constellations de 128, 645 et 3251 points dans les dimensions respectives 3, 4 et 5 (pour cela on a pris N_d de la forme N_1^d). On observe en particulier qu'à rendement spectral fixé, les performances des modulations PSK se rapprochent de celles des modulations QAM.

3.2 Fonctions de Slepian équilibrées

En communications numériques, on pourra chercher la plus grande base de signalisation possible dont les éléments ont une proportion de leur énergie hors de la bande

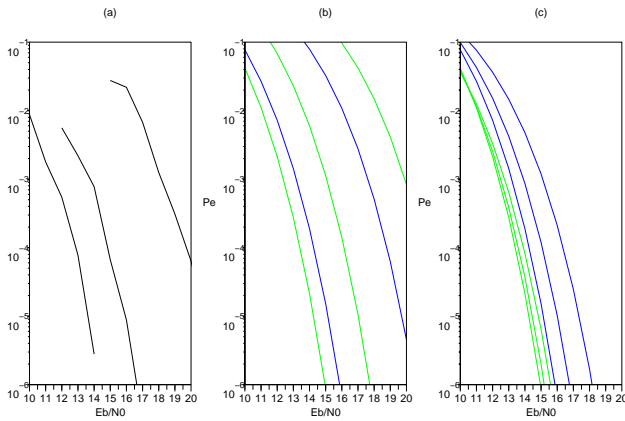


FIG. 1 – (a) PSK- d : codes réels pour $d = 3, 4, 5$ et $N_d = 128$. (b) PSK- d (noir) et QAM- d (gris) théoriques correspondantes (les performances s'améliorent quand d augmente). (c) PSK- d (noir) et QAM- d (gris) théoriques à rendement spectral identique

$[-F, F]$ toujours inférieure à un coefficient τ_0 fixé. Une famille de séquences, connue sous le nom de séquences sphéroïdales de Slepian [15] permet d'apporter une solution à ce problème. Les séquences de Slepian de longueur N , qui sont les vecteurs propres de la matrice \mathbf{S} de terme général $\mathbf{S}_{mn} = \frac{\sin(2\pi F(m-n))}{\pi(m-n)}$, concentrent un maximum d'énergie dans la bande $[-F, F]$. On les retrouve en particulier dans des travaux récents sur la signalisation des modulations OQAM ou OFDM [11, 9]. Par ailleurs, une procédure décrite en [6] permet de les calculer précisément. Les valeurs propres de \mathbf{S} correspondantes fournissent la proportion d'énergie des séquences localisée dans la bande $[-F, F]$. Un résultat classique important précise que les $2FT$ plus grandes valeurs propres sont proches de 1 et que les autres décroissent rapidement vers 0. L'équilibrage des séquences de Slepian permettra de construire une base maximale dont les éléments auront exactement la même proportion d'énergie hors bande.

La figure II fournit un exemple d'équilibrage pour $T = 1$, $F = 2$ et $\tau_0 = 0.1$. Pour les quatre premières séquences de Slepian, τ vaut (0.00, 0.00, 0.04, 0.28), tandis que pour les quatre séquences transformées on aura $\tau = 0.08 = (0.00 + 0.00 + 0.04 + 0.28)/4$. Ainsi, l'équilibrage permet d'obtenir une famille orthogonale de séquences vérifiant $\tau \leq 0.1$ comportant un élément de plus que les séquences de Slepian standard. On peut associer aux séquences de Slepian modifiées des fonctions continues dont le spectre est lui strictement contenu dans $[-F, F]$

$$w_k(t) = \frac{1}{d} \sum_{n=0, N-1} \frac{\sin(2\pi F(t-n))}{\pi(t-n)} [\mathbf{W}_k]_n. \quad (5)$$

En pratique, en fonction du filtrage appliqué à la séquence, la dispersion énergétique sera plus marquée dans le domaine temporel ou fréquentiel.

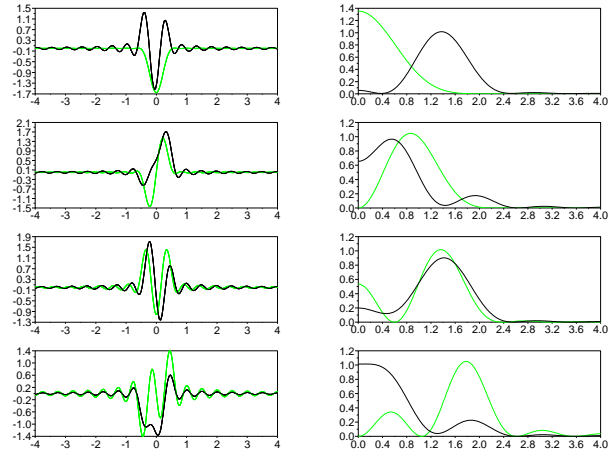


FIG. 2 – Quatre premières fonctions de Slepian standard (gris) et modifiées (noir); Représentations temporelles (gauche) et spectres correspondants (droite).

4 Conclusion

On a mis en évidence une procédure itérative d'équilibrage de base, utilisable en particulier pour la signalisation multidimensionnelle en communications numériques. L'intérêt reconnu de la signalisation multidimensionnelle est ici illustré dans le cas des modulations PSK multidimensionnelles. Notons que des signalisations plus classiques utilisées dans les multiplexages temporel, fréquentiel (e.g. OFDM) ou par code (CDMA) pourront être réutilisées pour la signalisation multidimensionnelle d'un utilisateur unique. Ainsi par exemple en HSDPA (High Speed Downlink Packet Access), il pourra être plus efficace d'exploiter conjointement qu'indépendamment les codes de signalisation affectés à un même utilisateur.

A Proposition 1 : preuve

Soit $\Delta(\mathbf{M})$ une matrice diagonale avec $[\Delta(\mathbf{M})]_{ij} = \mathbf{M}_{ii}\delta_{i,j}$ et $J(\mathbf{M}) = \|\Delta(\mathbf{M}) - \bar{d}\mathbf{I}\|^2$. Notons que

$$\begin{aligned} J(\mathbf{M}) &= \sum_i (\mathbf{M}_{ii} - L^{-1} \sum_j \mathbf{M}_{jj})^2 \\ &= L^{-2} \sum_{ij} (\mathbf{M}_{ii} - \mathbf{M}_{jj})^2 - 2\bar{d}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Soit $\mathbf{M}' = \mathbf{R}^{(a,b)}(\theta)\mathbf{M}\mathbf{R}^{(a,b)}(-\theta)$. $\mathbf{M}'_{aa} = \mathbf{M}'_{bb} = (\mathbf{M}_{aa} + \mathbf{M}_{bb})/2$ et

$$J(\mathbf{M}') - J(\mathbf{M}) = \frac{-(L+2)}{2L^2} (\mathbf{M}_{aa} - \mathbf{M}_{bb})^2 \leq 0. \quad (7)$$

Ainsi la suite des valeurs $(J(\mathbf{M}^{(k)}))_{k \geq 0}$ est décroissante et positive et donc convergente. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} J(\mathbf{M}^{(k)}) = \alpha > 0$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, k > k_0 \Rightarrow \alpha + \varepsilon > J(\mathbf{M}^{(k)}) \geq \alpha > 0$.

Donc pour $k > k_0$, il existe $\mathbf{M}'_{aa} = \bar{d}$ avec $(\mathbf{M}'_{aa} - \bar{d})^2 > \alpha/L$ (sinon $J(\mathbf{M}^{(k)}) < \alpha$). Mais alors, comme $\bar{d} = L^{-1} \sum_i \mathbf{M}_{ii}$,

$$(\mathbf{M}'_{aa} - \bar{d})^2 = L^{-2} \sum_i (\mathbf{M}'_{aa} - \mathbf{M}_{ii}^{(k)})^2 - 2(\mathbf{M}'_{aa} - \bar{d})^2. \quad (8)$$

Ainsi, $(\mathbf{M}_{aa}^{(k)} - \bar{d})^2 > \frac{\alpha}{L}$ et

$$\sum_i (\mathbf{M}_{aa}^{(k)} - \mathbf{M}_{ii}^{(k)})^2 = 3L^2(\mathbf{M}_{aa}^{(k)} - \bar{d})^2 > 3L\alpha. \quad (9)$$

La dernière égalité montre qu'il existe b tel que $(\mathbf{M}_{aa}^{(k)} - \mathbf{M}_{bb}^{(k)})^2 > 3\alpha$. Bien sûr, soit a soit b peut être fixé à 1. Ainsi, d'après la structure de l'algorithme et comme J décroît à chaque application d'une rotation de Givens,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{M}^{(k)}) - J(\mathbf{M}^{(k+1)}) &\geq \frac{L+2}{2L^2}(\mathbf{M}_{aa}^{(k)} - \mathbf{M}_{bb}^{(k)})^2 \\ &\geq \frac{3\alpha(L+2)}{2L^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

On a donc $J(\mathbf{M}^{(k+1)}) < \alpha + \varepsilon - \frac{3\alpha(L+2)}{2L^2}$. Par suite, $J(\mathbf{M}^{(k+1)}) < \alpha$ dès lors que $\varepsilon < \frac{3\alpha(L+2)}{2L^2}$. Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse $J(\mathbf{M}^{(k+1)}) > \alpha$. Donc $\lim_{k \rightarrow \infty} J(\Delta(\mathbf{M}^{(k)})) = 0$, et $\Delta(\mathbf{M}^{(k)}) \rightarrow \bar{d}\mathbf{I}$.

Dès lors que $\mathbf{M} = \mathbf{U}^H \mathbf{D} \mathbf{U}$ vérifie $\Delta(\mathbf{M}) = \bar{d}\mathbf{I}$, comme $\mathbf{W}^T \mathbf{S} \mathbf{W} = \mathbf{U}^T \mathbf{V}^T \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U} = \mathbf{M}$, on a $\mathbf{W}_i^T \mathbf{S} \mathbf{W}_i = \mathbf{M}_{ii} = \bar{d}$. De plus, $\mathbf{W}_j^T \mathbf{W}_i = \mathbf{U}_j^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{U}_i = \delta_{i,j}$. \square

B Calcul de P_e^{PSK-d}

Lorsque la distance minimale 2ρ entre points de la constellation d'une PSK- d devient petite, on peut construire la constellation localement comme les centres d'un empilement de sphère dans le plan tangent [7]. La probabilité d'erreur pourra alors être approchée par [2]

$$P_e = \frac{k_{d-1}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (11)$$

avec $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ et σ^2 la variance du bruit par dimension. Pour N_d points sur l'hypersphère de rayon R et de surface $S_d(R)$, en notant $V_{d-1}(\rho)$ la surface des hyperdisques de rayon ρ sur l'hypersphère et δ_{d-1} la densité de l'empilement choisi en dimension $d-1$, on a

$$N_d = \frac{S_d(R)}{V_{d-1}(\rho)} \delta_{d-1} = \frac{d\pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)^{-1} R^{d-1}}{\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)^{-1} \rho^{d-1}} \delta_{d-1}, \quad (12)$$

soit

$$\rho = R \left[\frac{d\delta_{d-1}}{N_d} \beta\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{1}{d-1}}. \quad (13)$$

L'énergie d'un symbole est $E_s = R^2$. Donc, celle d'un bit d'information est $E_b = E_s / (\log_2 N_d)$, et $R = \sqrt{E_b \log_2 N_d}$. De plus, $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} (2FT)/d = \frac{N_0}{2}$. En intégrant à Eq. (11) la relation (13) et les expressions de R et σ^2 on obtient (2). L'Eq. (4) peut également être obtenue par des considérations sur les empilements de sphères.

Références

[1] J. Boutros, E. Viterbo, C. Rastello, and J.C. Belfiore. Good lattice constellations for both rayleigh fading

and gaussian channels. *IEEE trans. on Information Theory*, 42(2) :502–518, march 1996.

- [2] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*. Springer Verlag, 1988.
- [3] J.F. Cardoso E. Moulines, P. Duhamel and S. Mayrargue. Subspace methods for the blind identification of multichannel fir filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43 :516–525, feb. 1995.
- [4] A. Gersho and V.B. Lawrence. Multidimensional signal constellations for voiceband data transmission. *IEEE journal on selected areas in com.*, 2(5) :687–702, sept. 1984.
- [5] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computation, third edition*. Johns Hopkins, 1996.
- [6] D.M. Gruenbacher and D.R. Hummels. A simple algorithm for generating discrete prolate spheroidal sequences. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11) :3276–3278, nov. 1994.
- [7] J. Hamkins and K. Zeger. Asymptotically dense spherical codes-part I : wrapped spherical codes. *IEEE trans. on Information Theory*, 43(6) :1774–1785, nov. 1997.
- [8] J. Hamkins and K. Zeger. Gaussian source coding with spherical codes. *IEEE trans. on Information Theory*, 48(11) :2980–2988, nov. 2002.
- [9] S. Zazo I. Raos and I. Arambasic. Slepian pulses for multicarrier oqam. In *EUSIPCO 06*, july 2006.
- [10] H.G. Kim and S.Y. Kang. Performance improvement of m-ary orthogonal modulators. In *IEEE conf. ICC*, pages 642–645, Cambridge, MA, USA, 29 sept.-02 oct. 1996.
- [11] S. Pfletschinger and J. Speidel. Optimized impulses for multicarrier offset-qam. In *Global Tel. Conf., GLOBECOM'01*, volume 1, pages 207–211, 2001.
- [12] J.E. Porath and T. Aulin. design of multidimensional signal constellations. *IEE Proc. Com.*, 150(5) :317–323, oct. 2003.
- [13] D.J. Sakrison. A geometric treatment of source encoding of a gaussian random variable. *IEEE trans. on Information Theory*, 14(3) :481–486, may 1968.
- [14] R.O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. In *Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop, Rome, NY.*, pages 243–258, 1979.
- [15] D. Slepian. On bandwidth. In *Proceedings of the IEEE*, volume 64, pages 457–459, march 1976.
- [16] N. Sloane. Home page, <http://www.research.att.com/~njas/index.html#tables>.