

# Identification Aveugle de Canaux de Communication Non-linéaires basée sur la décomposition PARAFAC

Alain KIBANGOU<sup>1</sup>, Gérard FAVIER<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>LAAS, UPR 8001, CNRS, Université de Toulouse  
7 avenue Colonel Roche, 31077 Toulouse, France

<sup>2</sup>I3S, UMR 6070, Université de Nice Sophia Antipolis, CNRS  
2000 route des Lucioles, Les Algorithmes, Euclide B, BP 121, 06903 Sophia Antipolis Cedex, France  
[akibango@laas.fr](mailto:akibango@laas.fr), [favier@i3s.unice.fr](mailto:favier@i3s.unice.fr)

**Résumé** – Dans cet article, nous considérons l'estimation aveugle des noyaux de Volterra associés à un canal non-linéaire structuré en blocs. Pour ce type de structure, il a été montré que la connaissance des coefficients diagonaux des noyaux de Volterra est suffisante pour la caractérisation complète du modèle. Nous proposons donc un précodage de l'entrée permettant de découpler l'effet des coefficients diagonaux et non-diagonaux. Ce précodage induit une représentation tensorielle des signaux mesurés qui admet une décomposition du type PARAFAC dont l'un des facteurs est formé par les coefficients diagonaux recherchés. Nous établissons les conditions d'identifiabilité et illustrons la méthode par quelques simulations.

**Abstract** – In this paper, we consider the blind identification issue of Volterra kernels associated with block-structured nonlinear channels. For such a structure it is now known that their Volterra series representation is completely characterized by the diagonal kernel coefficients. We first suggest a precoding scheme in order to decouple the contribution of diagonal and non-diagonal Volterra kernels in the channel output signal. This precoding induces a tensorial representation of output signals. The obtained tensor admits a PARAFAC decomposition with a factor constituted by the diagonal Volterra kernels. We state the identifiability conditions and illustrate the proposed method by means of simulation results.

## 1 Introduction

Les structures non linéaires formées de cascades de systèmes dynamiques linéaires et statiques non-linéaires sont des structures souvent rencontrées en traitement du signal et en automatique pour la modélisation des systèmes de communication [1, 2] ou la commande des systèmes non-linéaires. On peut les représenter à l'aide du modèle de Volterra donné par :

$$y(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{m_1, \dots, m_p=0}^{M-1} h_p(m_1, \dots, m_p) \prod_{k=1}^p x(n-m_k) + e(n),$$

où  $h_p(\cdot, \dots, \cdot)$ ,  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$ , et  $e(\cdot)$  représentent respectivement le noyau de Volterra d'ordre  $p$ , les signaux d'entrée et de sortie et le bruit additif,  $M$  et  $P$  étant respectivement la mémoire et l'ordre de non-linéarité du système. On sait désormais que les noyaux de Volterra associés à des structures en cascades de type Wiener (filtre linéaire suivi d'une non-linéarité statique) et Wiener-Hammerstein (non-linéarité statique en sandwich entre deux filtres linéaires) sont complètement caractérisés par leurs coefficients diagonaux [3]. Dans cet article, nous exploitons ce résultat pour l'identification aveugle de canaux de communication de ce type via l'estimation des coefficients diagonaux des noyaux de Volterra associés, les autres coefficients pouvant être reconstitués à l'aide des formules fournies dans [3]. Afin d'isoler l'effet des termes diagonaux sur la sortie, nous proposons une technique de précodage des signaux d'entrée qui induit une structure tensorielle

pour les signaux mesurés. Celle-ci est naturellement du type PARAFAC (PARAllel FACTor analysis) [4]. Cette décomposition offre ainsi une approche d'estimation aveugle déterministe contrairement aux approches stochastiques considérées dans la littérature.

## 2 Isolation de l'effet des coefficients diagonaux des noyaux de Volterra

La sortie d'un modèle de Volterra d'ordre  $P$  et de mémoire  $M$  peut aussi s'écrire  $y(n) = y_d(n) + y_{nd}(n) + e(n)$ , où  $y_d(\cdot)$  et  $y_{nd}(\cdot)$  représentent respectivement les contributions des coefficients diagonaux et non-diagonaux. En particulier,  $y_d(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{m=0}^{M-1} \theta_p(m) x^p(n-m)$ , est la partie du signal tenant compte des coefficients diagonaux  $\theta_p(m) = h_p(m, \dots, m)$ . Comme indiqué précédemment, dans le cas des structures de type Wiener-Hammerstein et Wiener, la procédure d'estimation peut se restreindre à celles des coefficients diagonaux  $\theta_p(m)$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ ,  $p = 1, \dots, P$ .

Afin d'isoler la contribution des termes diagonaux nous proposons de recourir à un précodage de l'entrée. Pour ce faire, considérons un protocole de transmission par blocs, où chaque bloc, indicé par  $n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , contient  $L$  symboles  $s(nL+l)$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ , inconnus du récepteur et rangés dans le vecteur :

$$s(n) = (s(nL) \quad s(nL+1) \quad \dots \quad s(nL+L-1))^T.$$

Chaque bloc est ensuite codé par une matrice  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{Q \times L}$ . On obtient

$\mathbf{x}(n) = (x(nQ) \ x(nQ+1) \ \dots \ x(nQ+Q-1))^T = \mathbf{C}\mathbf{s}(n)$ , la matrice de précodage étant construite comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \otimes (\mathbf{1} \ 0_{1 \times (M-1)})^T & 0_{RM \times (L-1)} \\ 0_{(L-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(L-1) \times (L-1)} \\ 0_{(M-1) \times 1} & 0_{(M-1) \times (L-1)} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{a} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{R-1})^T$ ,  $\alpha_r$ ,  $r = 0, \dots, R-1$ , sont des pondérations réelles non-nulles,  $R$  est le facteur de répétition et donc  $Q = L + M(R+1) - 2$ . Notons qu'en choisissant  $L \gg M(R+1)$ , la réduction du taux d'information est fortement limitée.

On montre aisément que pour  $n$  fixé, les signaux  $y(nQ+k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, RM-1$  ne dépendent que des coefficients diagonaux des noyaux de Volterra. De plus, ils peuvent être scindés en  $R$  sous-blocs de  $M$  signaux définis par  $y_{m,n,r} = y(nQ+m+rM)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $r = 0, 1, \dots, R-1$  et donnés par l'équation (2) où  $e_{m,n,r} = e(nQ+m+rM)$  :

$$y_{m,n,r} = \sum_{p=1}^P \theta_p(m) \alpha_r^p s^p(nL) + e_{m,n,r}. \quad (2)$$

### 3 Décomposition PARAFAC

Dans le cas sans bruit, l'équation (2) peut être vue comme l'écriture scalaire de la décomposition PARAFAC [4] du tenseur d'ordre trois  $\mathbb{Y}$ , de dimensions  $M \times N \times R$ , défini par ses éléments  $y_{m,n,r}$ . Le nombre de facteurs de la décomposition est fixé par le degré de non-linéarité  $P$ . En fixant l'indice de l'une des dimensions du tenseur et en faisant varier les indices des deux autres dimensions, nous obtenons des matrices, appelées tranches de tenseur. Suivant les trois dimensions, nous pouvons définir trois types de tranches  $\mathbf{Y}_{m..}$ ,  $\mathbf{Y}_{..n}$  et  $\mathbf{Y}_{..r}$  de dimensions respectives  $N \times R$ ,  $R \times M$  et  $M \times N$  :

$$\mathbf{Y}_{m..} = \mathbf{S} D_m(\mathbf{H}) \mathbf{A}^T, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}_{..n} = \mathbf{A} D_n(\mathbf{S}) \mathbf{H}^T, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (4)$$

$$\mathbf{Y}_{..r} = \mathbf{H} D_r(\mathbf{A}) \mathbf{S}^T, \quad r = 0, \dots, R-1, \quad (5)$$

où  $D_k(\mathbf{X})$  désigne la matrice diagonale formée à partir de la  $(k+1)$ -ième ligne de  $\mathbf{X}$  et <sup>1</sup>

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_P) \in \mathfrak{R}^{M \times P}, \quad (6)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{s} \ \mathbf{s}^2 \ \dots \ \mathbf{s}^P) \in \mathfrak{R}^{N \times P}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^P) \in \mathfrak{R}^{R \times P}, \quad (8)$$

$$\mathbf{s} = (s(0) \ s(L) \ \dots \ s((N-1)L))^T,$$

$$\mathbf{h}_p = (\theta_p(0) \ \theta_p(1) \ \dots \ \theta_p(M-1))^T.$$

En désignant par  $\odot$  le produit de Khatri-rao, la concaténation des tranches, définies ci-dessus, permet la construction des matrices dépliées  $\mathbf{Y}_M$ ,  $\mathbf{Y}_N$  et  $\mathbf{Y}_R$ , de dimensions respectives  $MN \times R$ ,  $NR \times M$  et  $RM \times N$  :

$$\mathbf{Y}_M = (\mathbf{Y}_{0..}^T \ \dots \ \mathbf{Y}_{M-1..}^T)^T = (\mathbf{H} \odot \mathbf{S}) \mathbf{A}^T,$$

$$\mathbf{Y}_N = (\mathbf{Y}_{..0}^T \ \dots \ \mathbf{Y}_{..N-1}^T)^T = (\mathbf{S} \odot \mathbf{A}) \mathbf{H}^T,$$

$$\mathbf{Y}_R = (\mathbf{Y}_{..0}^T \ \dots \ \mathbf{Y}_{..R-1}^T)^T = (\mathbf{A} \odot \mathbf{H}) \mathbf{S}^T.$$

<sup>1</sup>Étant donné un vecteur colonne  $\mathbf{x}$ , la notation  $\mathbf{x}^p$  indique le vecteur obtenu en élevant tous les éléments de  $\mathbf{x}$  à la puissance  $p$ .

### 3.1 Identifiabilité

Une condition suffisante garantissant l'unicité de la décomposition PARAFAC, dite condition de Kruskal, est [5] :

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{S}} + k_{\mathbf{H}} \geq 2P + 2, \quad (9)$$

$k_{\mathbf{A}}$  étant le rang de Kruskal, aussi appelé k-rang, de la matrice  $\mathbf{A}$ , i.e. le plus grand entier  $k_{\mathbf{A}}$  tel que tout ensemble de  $k_{\mathbf{A}}$  colonnes de  $\mathbf{A}$  soit linéairement indépendant. Dans la suite, nous formulons les hypothèses suivantes :

**H1** : La matrice  $\mathbf{H}$  est de rang colonne plein, avec  $M \geq P$ . Par conséquent (9) devient :

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{S}} \geq P + 2. \quad (10)$$

**H2** : Les symboles  $s(nL)$  appartiennent à un alphabet fini  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_F\}$  ayant  $F$  éléments.

**H3** : Chaque symbole de  $\Lambda$  apparaît au moins une fois dans la séquence  $\{s(nL)\}_{n=0,1,\dots,N-1}$ , d'où  $N \geq F$ .

Il a été montré qu'une matrice de Vandermonde, dans le sens des lignes, de rang plein est aussi de k-rang plein [6]. En général, ceci n'est pas vrai pour les matrices de Vandermonde dans le sens des colonnes telles que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ . Ci-après, en tenant compte de l'hypothèse alphabet fini, nous évaluons le rang de Kruskal de ce type de matrices. Soit  $\mathbf{V}_P = (\mathbf{v} \ \mathbf{v}^2 \ \dots \ \mathbf{v}^P)$ , où  $\mathbf{v} = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_F)^T$ , la matrice de Vandermonde d'ordre  $P$  associée à  $\Lambda$ .

**Lemme 1** *En tenant compte de l'hypothèse H3, si  $F \geq P$  et si au moins  $P$  symboles de  $\Lambda$  sont distincts et non-nuls alors la matrice  $\mathbf{S}$  est de k-rang plein.*

**Preuve** : Grâce à l'hypothèse H3, nous savons qu'il existe une matrice de sélection de lignes  $\mathbf{J}$ , de dimensions  $F \times N$ , avec  $F \leq N$ , telle que  $\mathbf{V}_P = \mathbf{J}\mathbf{S}$ .  $\mathbf{J}$  étant de rang plein, alors  $\text{rang}(\mathbf{V}_P) = \text{rang}(\mathbf{S})$ . Si  $F \geq P$ , et si au moins  $P$  symboles de  $\Lambda$  sont distincts et non nuls alors  $\text{rang}(\mathbf{V}_P) = \text{rang}(\mathbf{S}) = P$ , i.e. les colonnes de  $\mathbf{S}$  sont linéairement indépendantes. Par suite,  $\mathbf{S}$  est de k-rang plein. ■

Il est à noter que ce lemme est lié à la condition d'excitation persistante (e.p.) de la séquence  $s(\cdot)$  [7]. Considérons maintenant le cas où la séquence d'entrée ne remplit pas la condition e.p. ; en particulier,  $F = 2$  et  $P \geq 2$ .

**Lemme 2** *La matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}_P$ , d'ordre  $P$ , associée à l'alphabet fini  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , est de k-rang plein si  $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, P-1$ .*

**Preuve** :  $\mathbf{V}_P$  est de rang plein si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Elle est de k-rang plein, i.e.  $k_{\mathbf{V}_P} = 2$ , si toutes les sous-matrices  $\mathbf{W}_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & \lambda_2^j \\ \lambda_2^i & \lambda_1^j \end{pmatrix}$ ,  $1 \leq i < j \leq P$  sont de rang plein. Cette condition est vérifiée si le déterminant de  $\mathbf{W}_{i,j}$  est non-nul, i.e. si  $\lambda_1^{j-i} \neq \lambda_2^{j-i}$ ,  $1 \leq i < j \leq P$ . ■

En guise d'illustration, pour  $P = 3$  on remarque que les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$  sont toutes deux de rang plein mais seule la seconde est aussi de k-rang plein.

En se basant sur la condition d'unicité (10) et la structure de Vandermonde de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}$ , nous formulons les théorèmes suivants :

**Théorème 1** *En tenant compte des hypothèses H1-H3 et en supposant que  $s(\cdot)$  appartient à un alphabet  $\Lambda$  remplissant la condition e.p., si les coefficients  $\alpha_r$  sont tous non-nuls et si au moins deux d'entre eux  $\alpha_{r_1}$  et  $\alpha_{r_2}$  sont tels que  $\alpha_{r_1}^k \neq \alpha_{r_2}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, P-1$ , alors la décomposition PARAFAC du tenseur  $\mathbb{Y}$  est unique à des matrices diagonales  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , telles que  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \mathbf{I}_P$ , près.*

**Preuve :**  $\Lambda$  étant choisi tel que  $F \geq P$ , alors, selon le Lemme 1,  $k_S = P$ . D'où, l'équation (10) conduit à  $k_A \geq 2$ , i.e. les colonnes de  $\mathbf{A}$  doivent être deux à deux linéairement indépendantes. C'est le cas lorsque chaque sous-matrice  $(\mathbf{A}_{.p_1} \ \mathbf{A}_{.p_2})$ ,  $1 \leq p_1 < p_2 < P$  est de rang plein. En remarquant que

$$(\mathbf{A}_{.p_1} \ \mathbf{A}_{.p_2}) = \begin{pmatrix} \alpha_0^{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{R-1}^{p_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0^{p_2-p_1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{R-1}^{p_2-p_1} \end{pmatrix}$$

il est évident que  $(\mathbf{A}_{.p_1} \ \mathbf{A}_{.p_2})$  est de rang plein si  $\exists r_1, r_2 \in \{0, \dots, R-1\}$  tel que  $\alpha_{r_1}^{p_2-p_1} \neq \alpha_{r_2}^{p_2-p_1}$ ,  $1 \leq p_1 < p_2 < P$ . Par ailleurs, on sait que l'unicité au sens de Kruskal est définie à une matrice de permutation et des facteurs d'échelle près, i.e. tout autre ensemble  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}$  et  $\bar{\mathbf{S}}$  permettant de reconstruire le tenseur  $\mathbb{Y}$  est lié à  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  par  $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{\Pi}\Delta_1$ ,  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{\Pi}\Delta_2$ ,  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{\Pi}\Delta_3$ , où  $\mathbf{\Pi}$  est une matrice de permutation et  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont des matrices diagonales telles que  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \mathbf{I}_P$ . En prenant en compte la structure de Vandermonde de  $\mathbf{A}$ , et en utilisant la technique développée dans [8] nous pouvons lever l'ambiguïté de permutation. Par conséquent, seule demeure l'ambiguïté due aux matrices diagonales  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . ■

**Théorème 2** *En tenant compte des hypothèses H1-H3 et en supposant que les éléments de  $\mathbf{A}$  sont tous non-nuls, si le signal  $s(\cdot)$  appartient à l'alphabet  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  tel que  $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$ ,  $k = 1, \dots, P-1$  et si  $\mathbf{A}$  a au moins  $P$  éléments distincts sur sa première colonne alors la décomposition PARAFAC du tenseur  $\mathbb{Y}$  est unique à des matrices diagonales  $\Delta_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , telles que  $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \mathbf{I}_P$ , près.*

**Preuve :** Evaluons tout d'abord le rang de Kruskal de  $\mathbf{S}$ . Puisque  $s(\cdot)$  appartient à  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ , alors  $rank(\mathbf{S}) = 2$ . D'où,  $k_S = 1$  ou  $k_S = 2$ . Ce dernier cas survient lorsque toutes les sous-matrices  $(\mathbf{S}_{.i} \ \mathbf{S}_{.j})$ ,  $1 \leq i < j \leq P$ , sont de rang plein. Grâce à l'hypothèse H3, il existe une matrice

$\mathbf{T}$ , de dimensions  $N \times 2$ , telle que  $(\mathbf{S}_{.i} \ \mathbf{S}_{.j}) = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \lambda_1^i & \lambda_1^j \\ \lambda_2^i & \lambda_2^j \end{pmatrix}$ .

Notons que  $\mathbf{T}$  est une matrice de rang plein dont les lignes sont  $(1 \ 0)$  ou  $(0 \ 1)$ , et avec au moins deux lignes différentes. Par suite, les sous-matrices  $(\mathbf{S}_{.i} \ \mathbf{S}_{.j})$  sont de rang plein si et seulement si les matrices  $\begin{pmatrix} \lambda_1^i & \lambda_1^j \\ \lambda_2^i & \lambda_2^j \end{pmatrix}$  sont de

rang plein, ou de façon équivalente si  $\mathbf{V}_P$  est de k-rang plein. En utilisant le Lemme 2, nous savons que  $\mathbf{V}_P$  est de k-rang plein si  $\lambda_1^k \neq \lambda_2^k$ ,  $k = 1, \dots, P-1$ . D'où,  $k_S = 2$  et l'équation (10) devient  $k_A \geq P$ . Si  $\mathbf{A}$  a plus de lignes que de colonnes avec  $P$  éléments distincts sur sa première colonne alors  $k_A = P$ , ce qui satisfait la condition de Kruskal. L'unicité aux facteurs d'échelle près est obtenue de la même manière que pour le théorème précédent. ■

Les théorèmes 1 et 2 mettent en évidence une sorte de symétrie entre le cardinal  $F$  de l'alphabet  $\Lambda$  et le nombre de valeurs distinctes des pondérations  $\alpha_r$  apportées par le précodeur. En effet, si  $F \geq P$ , i.e. l'entrée est e.p.,  $R = 2$  suffit pour l'identification alors que si  $F = 2$ , entrée non e.p., si  $P > 2$ ,  $R$  doit être plus grand ou égal à  $P$ , le degré de non-linéarité du système. Dans tous les cas, si on considère l'entrée comme étant  $\alpha_r s(nL)$ , la condition de persistance d'excitation [7] est alors toujours vérifiée.

### 3.2 Estimation

En supposant connue la matrice  $\mathbf{A}$  associée au précodeur, la manière classique d'estimer les matrices  $\mathbf{H}$  des coefficients du canal et  $\mathbf{S}$  des symboles transmis est d'appliquer un algorithme des moindres carrés alterné (ALS, *Alternating Least Squares*), basé sur la minimisation des critères  $\|\tilde{\mathbf{Y}}_R - (\mathbf{A} \odot \hat{\mathbf{H}}_{k-1}) \mathbf{S}^T\|_F^2$  et  $\|\tilde{\mathbf{Y}}_N - (\hat{\mathbf{S}}_k \odot \mathbf{A}) \mathbf{H}^T\|_F^2$  de façon alternée. Les solutions optimales correspondantes sont  $\hat{\mathbf{S}}_k^T = (\mathbf{A} \odot \hat{\mathbf{H}}_{k-1})^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_R$  et  $\hat{\mathbf{H}}_k^T = (\hat{\mathbf{S}}_k \odot \mathbf{A})^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_N$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_k$  et  $\hat{\mathbf{S}}_k$  désignant les estimés des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{S}$  obtenus à l'itération  $k$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}_R$  (resp.  $\tilde{\mathbf{Y}}_N$ ) la version bruitée de  $\mathbf{Y}_R$  (resp.  $\mathbf{Y}_N$ ). Notons que  $\hat{\mathbf{S}}$  est contrainte à avoir une structure de Vandermonde avec pour composantes des éléments de l'alphabet fini  $\Lambda$ . Pour ce faire, la matrice  $\mathbf{S}$  est reconstruite à partir de la première colonne de son estimé, après projection de ses éléments sur l'alphabet fini.

Dans ce qui suit, nous proposons une alternative à l'algorithme ALS classique en se basant sur la décomposition en valeurs singulières (SVD). Tout d'abord, tenant compte des propriétés du produit de Khatri-Rao, les matrices  $\mathbf{R}_p$  construites à partir des colonnes de  $\mathbf{Z} = \mathbf{H} \odot \mathbf{S}$  sont des matrices de rang unité qui s'écrivent<sup>2</sup> :  $\mathbf{R}_p = unvec(\mathbf{H}_{.p} \odot \mathbf{S}_{.p}) = \mathbf{S}_{.p} \mathbf{H}_{.p}^T$ . La matrice dépliée  $\mathbf{Y}_M$  s'écrit d'une part  $\mathbf{Y}_M = \mathbf{Z} \mathbf{A}^T$  et d'autre part  $\mathbf{Y}_M = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$ , où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont les matrices formées des vecteurs singuliers gauches et droits tandis que  $\mathbf{\Sigma}$  est la matrice des valeurs singulières. On en déduit l'existence d'une matrice non-singulière  $\mathbf{B}$  telle que  $\mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{B}^{-1}$  et  $\mathbf{A}^T = \mathbf{B} \mathbf{V}^T$ . La matrice  $\mathbf{A}$  étant supposée connue, on détermine  $\mathbf{B}$  telle que  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}$ . Par suite, chaque colonne  $\mathbf{H}_{.p}$  peut être déterminée à partir de la SVD de  $\mathbf{R}_p = unvec(\mathbf{Z}_{.p})$ . Ces observations nous permettent de définir l'algorithme suivant :

1. Déterminer  $(\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V})$  à partir de la décomposition SVD de  $\tilde{\mathbf{Y}}_M$ .
2. Déterminer  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}$  puis  $\mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{B}^{-1}$ .
3. Construire  $\mathbf{R}_p = unvec(\mathbf{Z}_{.p})$  et prendre  $\mathbf{H}_{.p}$  comme étant le vecteur singulier droit de  $\mathbf{R}_p$  correspondant à la plus grande valeur singulière.
4. Calculer  $\hat{\mathbf{S}}_{LS}^T = (\mathbf{A} \odot \mathbf{H})^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_R$ . Projeter sa première colonne sur l'alphabet  $\Lambda$  et construire la matrice de Vandermonde  $\hat{\mathbf{S}}$ .
5. Calculer  $\hat{\mathbf{H}}^T = (\hat{\mathbf{S}} \odot \mathbf{A})^\dagger \tilde{\mathbf{Y}}_N$ .

<sup>2</sup> $unvec(\cdot)$  est l'opérateur qui construit une matrice à partir du vecteur en argument.

## 4 Simulations

Considérons le système de Wiener donné par :  $v(n) = -0.2052u(n) - 0.513u(n-1) + 0.718u(n-2) + 0.369u(n-3) + 0.2052u(n-4)$  et  $y(n) = v(n) + 0.15v^2(n) + 0.01v^3(n)$ . L'évaluation des performances a été réalisée au moyen d'une simulation de Monte Carlo avec 100 expériences indépendantes. Un bruit blanc gaussien a été ajouté à la sortie du système. Les performances ont été évaluées suivant l'erreur quadratique moyenne normalisée (EQMN) vis-à-vis de la sortie du canal. Deux types de signaux sont considérés le premier remplit la condition e.p. et est tiré de l'alphabet  $\Lambda_1 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}$  et le second ne remplit pas la condition e.p. et est tiré de  $\Lambda_2 = \{-1, 3\}$ . Pour le premier nous utilisons  $N = 54$  tandis que pour le second  $N = 100$ . Dans tous les cas, le facteur  $R = 3$ .

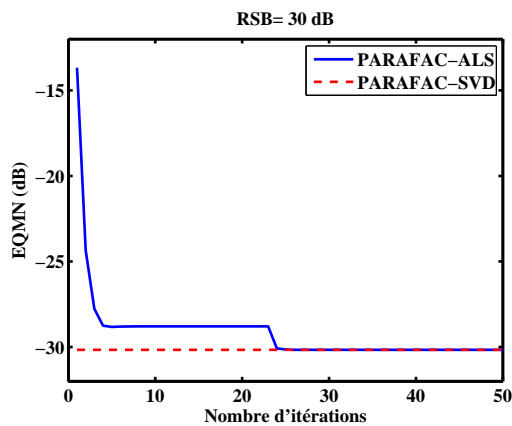


FIG. 1 – Comparaison des algorithmes PARAFAC-ALS et PARAFAC-SVD en termes d'EQMN dans le cas bruité.

Comme l'illustre la figure 1, l'algorithme ALS classique et l'algorithme proposé basé sur la SVD donnent globalement les mêmes performances. Le même constat est aussi fait en considérant les tableaux 1 et 2.

TAB. 1 – EQMN vis-à-vis de la sortie (Cas de  $\Lambda_1$ )

RSB (dB)	5	11	17
PARAFAC-ALS	-4.258 dB	-10.218 dB	-17.040 dB
PARAFAC-SVD	-4.415 dB	-10.851 dB	-17.161 dB

TAB. 2 – EQMN vis-à-vis de la sortie (Cas de  $\Lambda_2$ )

RSB (dB)	5	11	17
PARAFAC-ALS	-2.464 dB	-11.024 dB	-17.143 dB
PARAFAC-SVD	-4.707 dB	-11.128 dB	-17.143 dB

L'avantage de l'algorithme PARAFAC-SVD est d'être non itératif et donc de ne pas présenter l'inconvénient de minima locaux, alors que l'algorithme ALS nécessite une initialisation aléatoire et plusieurs itérations pour atteindre la convergence vers de possibles minima locaux. Par ailleurs les niveaux d'erreur résiduelle sont compa-

rables au niveau du bruit additif.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode permettant d'identifier de manière aveugle un modèle de Volterra associé à un système de type Wiener ou Wiener-Hammerstein. La méthode proposée exploite le fait que les séries de Volterra associées aux structures sus-mentionnées sont complètement caractérisées par la donnée des coefficients diagonaux. Grâce à un précodage permettant d'isoler l'effet de ces coefficients sur la sortie du système, les mesures de la sortie peuvent être structurées comme un tenseur d'ordre trois dont les facteurs de la décomposition PARAFAC sont directement associés aux coefficients diagonaux, au précodeur et au signal d'entrée. Nous avons formulé des conditions d'identifiabilité et décrit un algorithme d'estimation des facteurs. Nous avons montré que l'estimation peut se faire même si le signal d'entrée ne remplit pas la condition d'excitation persistante. En perspective, nous comptons étudier le cas d'une séquence arbitraire à  $F$  niveaux, avec  $F < P$ .

## Références

- [1] E. Biglieri, A. Gersho, R. Gitlin, and T. Lim, "Adaptive cancellation of nonlinear intersymbol interference for voiceband data transmission," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 2, pp. 765–777, 1984.
- [2] X. N. Fernando and A. Sesay, "Adaptive asymmetric linearization of radio over fiber links for wireless access," *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, vol. 51, no. 6, pp. 1576–1586, November 2002.
- [3] A. Kibangou and G. Favier, "Wiener-Hammerstein systems modelling using diagonal Volterra kernels coefficients," *IEEE Signal Proc. Letters*, vol. 13, no. 6, pp. 381–384, June 2006.
- [4] R. Harshman, "Foundation of the PARAFAC procedure : models and conditions for an "explanatory" multimodal factor analysis," *UCLA working papers in phonetics*, vol. 16, pp. 1–84, 1970.
- [5] J. Kruskal, "Three-way arrays : rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics," *Linear Algebra Applicat.*, vol. 18, pp. 95–138, 1977.
- [6] N. Sidiropoulos and X. Liu, "Identifiability results for blind beamforming in incoherent multipath with small delay spread," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 49, no. 1, pp. 228–236, January 2001.
- [7] R. Nowak and B. Van Veen, "Random and pseudo-random inputs for Volterra filter," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 8, pp. 2124–2135, 1994.
- [8] A. Kibangou, G. Favier, and M. Hassani, "Récepteur aveugle basé sur la décomposition PARAFAC pour des canaux de communication non-linéaires," in *Proc. GRETSI*, Louvain-la-neuve, Belgium, September 2005, pp. 177–180.