

Représentation des Images via les Maxima en Ondelettes

Application à l'extraction des Objets

A.BIJAOUTI¹

¹UMR 6202 CASSIOPÉE, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4

Albert.Bijaoui@oca.eu

Résumé - L'extraction de sources constitue l'une des étapes essentielles de l'analyse des images astronomiques. Dans la présente communication, elle est abordée sous l'angle des maxima locaux de la transformée en ondelettes. L'idée centrale réside dans l'association entre un coefficient en ondelettes et un coefficient d'une fonction d'échelle (*pyrel*). Cette association résulte d'une interprétation du coefficient en ondelettes basée sur l'ajustement local de l'image avec un profil correspond à une fonction d'échelle superposé à un fond variable. En déterminant les maxima locaux, spatialement et en échelle, de la transformée en ondelettes, on localise ainsi les pyrels qu'on va utiliser pour la reconstruction. Un ajustement des intensités permet de réduire les résidus de la reconstruction. Un processus itératif sur les résidus successifs permet de converger vers une représentation parcimonieuse de l'image. La transformée en ondelettes utilisée pour localiser les pyrels est celle qui provient de l'algorithme à trous. Comme on ne tient compte que des maxima dans la gamme des échelles accessibles, la reconstruction est effectuée à un fond près, tel que sa transformée en ondelettes ne contient aucun coefficient statistiquement significatif. L'ensemble des paramètres des J pyrels détectés, positions, échelles et amplitudes, permet ainsi de reconstruire une image qui ne diffère de l'image originale que de ce fond. On projette ensuite les positions de tous les maxima sur une grille. Un algorithme de croissance de région permet d'attribuer à chaque pixel de cette grille une étiquette, tous les maxima dont les positions appartenant au même domaine connexe ont la même étiquette. Ceci permet d'extraire et de reconstruire les sources correspondantes. Cette nouvelle approche permet ainsi une décomposition très aisée en sources.

Abstract - The source extraction is an essential step for the analysis of astronomical images. In the present paper, this extraction is performed from the local maxima of the wavelet transform. The central idea consists into the correspondence between a wavelet coefficient and the coefficient of an adapted scaling function (*pyrel*). The correspondence derives from the interpretation of the wavelet coefficient as the local fitting of a scaling function superimposed to an unknown background. An iterative process allows one to obtain a sparse image representation. The significant pyrels are localized via the wavelet transform. Their amplitudes are determined using a standard LMS estimation. Iterations are necessary in order to converge to insignificant wavelet coefficients in the observed scale range. The image values can be restored from the pyrel set. An object is a specific subset. First, all the maxima locations are projected on an image in order to get a binary image, 1 for a pyrel at this location. Segmentation is then done and a label is given for each connected field. An image is reconstructed from the pyrels which have the same label. This scheme allows one to get an easy multiscale source analysis.

1. Introduction.

L'extraction de sources constitue l'une des étapes essentielles de l'analyse des images astronomiques. Cela permet de déterminer différentes quantités comme la position, le flux, l'élongation, l'orientation, la surface, etc. Généralement cette opération s'effectue par seuillage en intensité, après soustraction de la carte du fond de ciel [1,2]. Dans ce cas, l'identification des sources peut être perturbée par des recouvrements, ou même des superpositions, nécessitant des traitements spécifiques, basés le plus souvent sur la détermination des lignes de vallée.

Pour éviter ces traitements souvent fastidieux, et le plus souvent *ad hoc*, nous avons introduit une nouvelle approche dans l'analyse de ces images, basée sur une

décomposition multiéchelle. L'algorithme de vision multiéchelle MVM repose sur une segmentation en volumes connexes dans l'espace de la transformée en ondelettes à trous [3]. Les étapes sont les suivantes :

- transformation en ondelettes avec l'algorithme à trous ;
- seuillage des coefficients en tenant compte de la distribution des coefficients dans le cas d'une constance locale du signal ;
- étiquetage des coefficients significatifs plan par plan. Les coefficients ayant même étiquette appartiennent au même domaine connexe ;
- détermination d'une relation entre les domaines d'échelles successives en examinant la position du maximum d'un domaine dans le plan suivant ;

- création d'arbres connexes à partir de la relation interéchelle ;
- détermination des maxima locaux et extraction d'un sous-arbre associé, sans autre maximum local ;
- extraction du volume de coefficients associé à tous les domaines de ce sous-arbre ;
- reconstruction d'une image à partir des coefficients extraits.

Les sources sont reconstruites par un algorithme inverse avec régularisation. En raison de la non-orthogonalité de la transformation en ondelettes à trous, MVM ne peut assurer une reconstruction parfaite de l'image globale qu'à partir d'un processus itératif basé sur les résidus à chaque étape de l'itération.

Dans la présente communication, la décomposition en sources est abordée sous un angle très différent, celui des maxima locaux de la transformée en ondelettes. Dans un travail de pionnier, Mallat et Zhong [4] ont montré qu'il était possible de reconstruire une image à partir des maxima dans un espace en ondelettes redondant. Cette représentation a été examinée ensuite par Berman [5] du point de vue de l'unicité et de la stabilité. L'approche qui est présentée diffère dans la mesure où on cherche à décomposer en sources de flux positifs, ce qui est impossible à obtenir avec une décomposition en fonction ondelettes, forcément de moyenne nulle.

2. Décomposition en pyrels

2.1 L'algorithme CLEAN

Depuis plusieurs décennies les radioastronomes utilisent l'algorithme CLEAN pour restaurer les images du ciel obtenues à partir par interférométrie [6]. En raison d'un recouvrement très partiel du plan des fréquences spatiales, les images brutes fournies par ces instruments ont une fonction d'étalement très structurée, ne permettant pas une bonne visibilité des objets. L'algorithme CLEAN a été mis œuvre pour fournir des images nettoyées.

Considérons une image $V(k,l)$ et un patron $p(k,l)$ correspondant à la forme d'une source à détecter. Pour l'exemple choisi ce patron est la fonction d'étalement. Admettons que ce patron est à la position (k_0, l_0) , nous cherchons à déterminer son amplitude $a(k_0, l_0)$. Pour cela nous minimisons le résidu :

$$R(k_0, l_0) = \sum_{k,l} [V(k+k_0, l+l_0) - a(k_0, l_0)p(k,l)]^2 \quad (1)$$

Quelle que soit la position une amplitude peut être obtenue, on ne retient donc que les pixels correspondant aux maxima. L'image est reconstruite à partir de la carte des maxima et du patron. Dans CLEAN, pour réduire les effets d'interférence entre des pics trop proches, seule une fraction (facteur CLEAN) de l'amplitude des pics est prise en compte. Une étape n'est pas suffisante et on itère jusqu'à obtention d'une carte de bruit. L'image propre, restituée, provient de la convolution des pics avec une fonction d'étalement propre, typiquement une gaussienne.

De nombreuses variantes permettent d'améliorer la qualité des résultats selon la nature des données. CLEANEST est celle qui assure une optimisation du résidu après identification de l'ensemble des pics.

2.2 Multi Resolution CLEAN (MRC)

L'algorithme CLEAN est parfaitement adapté à la restauration d'images de sources ponctuelles. Dans le cas de sources étendues les résultats sont très mauvais, l'objet étant décomposé en pics discrets. Wakker et Schwarz [7] ont introduit l'algorithme MRC qui permet de décomposer en tenant compte de gaussiennes de plusieurs tailles.

Starck *et al.* [8] ont généralisé l'algorithme MRC en s'appuyant sur une décomposition en ondelettes de l'image. La transformation en ondelettes permet d'avoir un cadre complet de représentation d'une image en tenant d'une gamme d'échelle. L'algorithme mis au point, avec une transformation en ondelettes tenant compte de la nature interférométrique des données, a conduit à des reconstructions correctes, quelle qu'était la forme des objets.

La restauration était basée sur une transformation en ondelettes inverse. À chaque coefficient en ondelettes détecté correspond une ondelette et l'image est une combinaison de ces ondelettes. Si on ne sélectionne qu'un coefficient, l'image restaurée est une ondelette discrète à l'échelle considérée. Celle-ci étant une fonction à moyenne nulle, ayant au moins un rebond négatif, elle ne peut correspondre au profil d'un objet physique. Par contre, la fonction d'échelle associée peut être proche de la forme d'un objet physique, si on la choisit suffisamment régulière.

Un des intérêts de décomposer dans l'espace en ondelettes réside dans la possibilité d'éliminer le fond sur lequel l'objet peut se superposer et de réduire fortement l'influence des objets proches. Une transformation basée uniquement sur les fonctions d'échelle n'a pas ces propriétés, parce qu'elle n'est pas à moyenne nulle. Nous proposons donc une analyse mixte, détection des pics dans l'espace multiéchelle avec la transformation en ondelettes et reconstruction de l'image avec les fonctions d'échelle.

2.3 Ondelettes et Pyrels

Pour éliminer le fond, on introduit le paramètre $b(k_0, l_0)$, dans l'estimation de l'amplitude liée au patron. L'estimation doit se faire dans une fenêtre de taille limitée pour réduire l'influence des objets voisins. Pour cela on introduit une fonction de poids $q(k,l)$, ce qui conduit à écrire le résidu suivant pour l'estimation de l'amplitude au point (k_0, l_0) :

$$R(k_0, l_0) = \quad (2)$$

$$\sum_{k,l} q(k,l) [V(k+k_0, l+l_0) - a(k_0, l_0)p(k,l) - b(k_0, l_0)]^2$$

L'amplitude a est obtenue par la relation :

$$\psi(k,l) = q(k,l) \frac{p(k,l)S_0 - S_1}{S_2S_0 - S_1^2} \quad (3)$$

S_n correspond aux sommes pondérées par $q(k,l)$ des puissances n -ièmes de $p(k,l)$. $\psi(k,l)$ est une fonction ondelette, de moyenne nulle. Pour estimer l'amplitude du patron on détermine un coefficient en ondelettes, puis on reconstruit avec le patron. Cette reconstruction ne tient pas compte du fond et du voisinage correspondant aux valeurs nulles de $q(k,l)$.

On effectue la transformation en ondelettes avec l'algorithme à trous [9]. La fonction d'échelle choisie est le B-spline cubique centrée. Le filtre passe-bas correspond au filtre binomial d'ordre 4. La transformation en ondelettes est celle qui résulte de la différence entre deux approximations successives. Le filtre passe-haut correspondant se déduit aisément.

Désignons par $H(i,k,l)$ la fonction d'échelle discrète à l'échelle i , que nous nommerons *pyrel* par la suite en raison de sa construction par l'algorithme à trous résultant de l'équation de dilatation :

$$H(i+1,k,l) = \sum_{n,m} h(n,m)H(i,k+2^n n, l+2^i m) \quad (4)$$

Nous avons $H(0,k,l)=0$ partout sauf $H(0,1,1)=1$. Le filtre $h(n,m)$ est choisi séparable en lignes et en colonnes, les coefficients étant les coefficients binomiaux de degré 4, centrés sur l'indice 0 ($C_4^{n+2}/16$, $n \in (-2,+2)$).

En raison de ce qui précède, en identifiant un maximum en de la transformée en ondelettes à l'échelle $i+1$, on localise un patron :

$$p(i,k,l) = H(i,k,l)/H(i+1,k,l) \quad (5)$$

avec l'ondelette :

$$G(i+1,k,l) = H(i,k,l) - H(i+1,k,l) \quad (6)$$

en prenant comme fonction de poids :

$$q(k,l) = H(i+1,k,l) \quad (7)$$

De ce fait, cette détection est indépendante du fond et du voisinage pour lequel la pondération est nulle. L'amplitude du patron est proportionnelle à celle du coefficient ondelette. On peut remarquer que l'image doit être ensuite reconstruite avec les patrons détectés. Pour simplifier l'algorithme, on reconstruit avec les coefficients $H(i,k,l)$, conduisant sans doute à dégrader la reconstruction. L'algorithme initial est le suivant :

- Initialisation de la carte des pyrels ;
- Transformation en ondelettes par l'algorithme à trous ;
- Identification des maxima en position et en échelle ;
- Insertion de pyrels à la position de ces maxima avec une amplitude proportionnel au coefficient en ondelettes ;
- Correction des amplitudes des pyrels par moindres carrés.

2.4 Le schéma itératif

La qualité de la reconstruction n'est généralement pas suffisante avec le schéma précédent. On doit itérer sur l'image de la différence entre l'image initiale et celle reconstruite. De même que dans l'algorithme CLEAN une fraction f seulement des amplitudes des pyrels peut être prise en compte. Cela permet de réduire les influences entre objets trop proches. Ceci peut être aussi réduit en modulant le seuil de détection en fonction de l'itération.

La qualité de la reconstruction dépend du nombre d'itérations. Celle-ci est liée aussi à la présence d'objets très brillants.

Avec ce processus itératif sur les résidus successifs on converge vers une représentation parcimonieuse de l'image. Cette procédure est du type *matching pursuit* [10] avec pour dictionnaire les pyrels, les ondelettes ne servant qu'à localiser en position et en échelle les pyrels utiles. En fin d'algorithme, l'image $V(k,l)$, $k \in (1,K)$, $l \in (1,L)$, est décrite sous la forme :

$$V(k,l) = \sum_{j=1,J} a_j H(i_j, k-k_j, l-l_j) \quad (9)$$

Comme on ne tient compte que des maxima dans la gamme des échelles accessibles, la reconstruction est effectuée à un fond près, tel que sa transformée en ondelettes ne contient aucun coefficient statistiquement significatif.

3. Extraction des sources

L'ensemble des J pyrels détectés, avec leurs positions, échelles et amplitudes, permet ainsi de reconstruire une image qui ne diffère de l'image originale que d'un fond. J est généralement très inférieur au nombre de pixels, conduisant ainsi à une compression significative de l'image. Tout sous-ensemble de pyrels conduit à reconstruire une image partielle.

Un objet va être maintenant défini comme un sous-ensemble particulier. Pour retrouver la notion de connexité à la base de la méthode générale d'extraction d'objets, on projette les positions de tous les maxima sur une grille.

Ceci conduit à une image binaire, qui peut dépendre de l'introduction éventuelle d'une tolérance dans les positions des maxima en fonction de l'échelle. Par exemple, en admettant une tolérance de i entre les positions des maxima, cela correspond à insérer dans la carte un disque de rayon i au lieu d'un simple point. Plus l'amplitude de tolérance est grande, plus les domaines définis par les maxima sont grands, ce qui réduit le nombre d'objets identifiés par la suite.

Un algorithme de croissance de région permet d'attribuer à chaque pixel de cette grille une étiquette, tous les maxima dont les positions appartiennent au même domaine connexe ont la même étiquette.

Tous les maxima de même étiquette, définissent un même objet, dont l'image est reconstruite aisément à partir de l'amplitude de ses pyrels.

Sur la Figure 1 de gauche, l'image de la nébuleuse planétaire NGC40 dans le domaine du proche infrarouge est représentée, en négatif. À droite la reconstruction à partir de la méthode décrite ci-dessus est représentée.

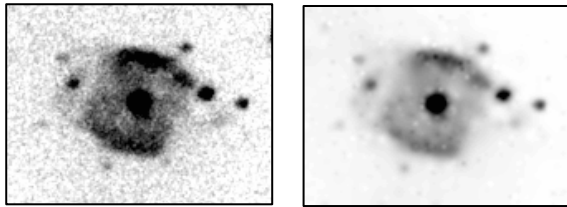


FIG. 1 : Image originale (gauche) et reconstruite (droite) de la nébuleuse planétaire NGC40.

Sur la Figure 2 l'image des étiquettes obtenues avec les maxima est représentée en fausses couleurs. La table de couleur correspond à l'arc-en-ciel de sorte que les premiers domaines sont en violet et les derniers en rouge foncé. On peut constater que beaucoup de domaines sont en forme de croix, ceci est lié au critère de tolérance choisi dans les voisinages.

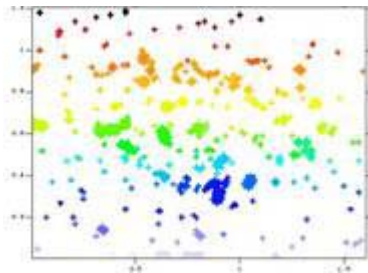


FIG 2 : Image des étiquettes liées aux pyrels détectés

Enfin sur la Figure 3 nous avons représenté l'image de deux des objets ainsi extraits. Par construction l'image de la somme de tous les objets détectés correspond à l'image de droite de la Figure 1.

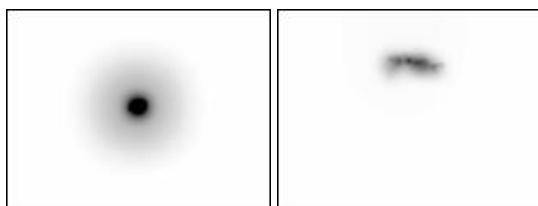


FIG. 3 : Exemples de reconstruction d'objets extraits.

4. Conclusion

En conclusion, cette nouvelle approche de la description d'une image, couplant un maximum local de la transformée en ondelettes à une fonction d'échelle discrète, désignée par le vocable pyrel par référence à sa construction pyramidale, permet une décomposition très aisée de cette image en objets. Le nombre d'itérations de l'algorithme dépend de la dynamique des sources présentes. Sur l'image considérée une trentaine d'itérations ont été nécessaires.

Le dictionnaire de formes utilisées pour décrire l'objet correspond aux pyrels. Il est très redondant en raison de l'algorithme à trous. Cette redondance rend la convergence de l'algorithme très lent aux grandes échelles. L'utilisation d'un algorithme pyramidal, peu redondant est à l'étude.

Nous examinons également l'extension du dictionnaire en introduisant des formes allongées et orientées, par exemple avec les *steerable pyramids* [11]. D'autres développements sont également possibles, comme l'introduction de la fonction d'étalement de l'image.

Références

- [1] E.Slezak, G.Mars, A.Bijaoui, C.Balkowski, P.Fontanelli. *Study of a field in the Coma Supercluster: I. Automated galaxies Count*, Astron. Astrophys. Sup. Ser., 74, pp.83--106, 1988.
- [2] E.Bertin, S.Arnouts. *SExtractor: Software for source extraction*, Astron. Astrophys. Sup. Ser., 117, pp.393--404, 1996.
- [3] A.Bijaoui, F.Rué. *A multiscale vision model adapted to the astronomical images*, Signal Processing, 46, pp.345--362, 1995.
- [4] S.Mallat, S.Zhong. *Wavelet maxima representations*. Wavelets and Applications, ed. Y.Meyer, Masson, Paris, 1992.
- [5] Z.Berman, J.S.Baras. *An analysis of discrete zero-crossings and maxima wavelets representations*. Progress in Wavelet Analysis and Applications. Ed. Y.Meyer et S.Roques, pp. 255—262, Editions Frontières, Gif/Yvette, 1993.
- [6] U.J.Schwarz. *Mathematical-statistical description of the iterative beam technique removing (method CLEAN)*. Astronomy & Astrophysics, 65, pp. 345-356, 1978.
- [7] B.P.Wakker et U.J.Schwarz. *The multi-resolution CLEAN and its application to the short-spacing problem in interferometry*. Astronomy & Astrophysics, 200, 312-322, 1988.
- [8] J.L.Starck, A.Bijaoui, B.Lopez et C.Perrier. *Image reconstruction by the wavelet transform applied to aperture synthesis*. Astronomy & Astrophysics, 283, 349-360, 1994.
- [9] A.Bijaoui, J.L.Starck et F.Murtagh. *Restauration des images par l'algorithme à trous*. Traitement du Signal, 11, 229-243, 1994.
- [10] S.Mallat, Z.Zhang. *Matching pursuit with time-frequency dictionaries*. IEEE Trans Signal Proc., 41, pp. 3397—3415, 1993.
- [11] H Greenspan, S Belongie, R Goodman, P Perona, S Rakshit, et C H Anderson. *Overcomplete steerable pyramid filters and rotation invariance*. Proceedings CVPR, pp. 222-228, 1994.