

Etude numérique de l'instabilité elliptique dans une paire de vortex co-rotatifs avec écoulement axial

Clément Roy^{1,2}, Mark Thompson², Thomas Leweke¹ & Kerry Hourrigan²

¹ : IRPHE, CNRS / Universités Aix-Marseille, 49 rue F. Joliot-Curie, 13384 Marseille Cedex 13, FRANCE

² : FLAIR, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, VIC 3800, AUSTRALIE
clement.roy@irphe.univ-mrs.fr

Résumé:

L'instabilité elliptique est un phénomène tridimensionnel apparaissant dans un vortex dont les lignes de courant ont une forme elliptique. Elle est notamment susceptible d'accélérer la destruction des sillages avions. Au cours de notre étude, nous avons étudié numériquement l'influence d'un écoulement axial sur la stabilité d'une paire de vortex co-rotatifs. Les taux de croissance des modes les plus instables sont calculés en fonction de l'amplitude W_0 de l'écoulement axial et du nombre d'onde k des perturbations, pour un nombre de Reynolds (basé sur la circulation d'un vortex) de 14000, et pour deux tailles du cœur des tourbillons. Il a été mis en évidence l'existence de nombreuses zones instables dans l'espace W_0 - k . En particulier, pour une taille du cœur élevée, les paires de vortex sont instables quasiment dans l'ensemble de l'espace des paramètres, et on observe une prédominance de modes avec couche critique.

Abstract :

The elliptic instability is a 3-D phenomenon that can develop on vortex core with elliptic streamlines. It is likely to accelerate the destruction of aircraft wakes. We studied numerically the influence of an axial flow on the stability of a pair of co-rotating vortices. The growth rates of the most unstable modes were computed with a spectral element code for given values of the axial velocity W and the perturbation axial wavenumber k . The simulations were made for one Reynolds number $Re = 14000$ (based on the circulation of one vortex), and two vortex core sizes. Numerous unstable zones were observed in the W_0 - k parameters space. Interestingly, for a large core size, vortex pairs are unstable in a major part of the parameters space and some critical layer modes were shown to be predominant.

Mots-clefs :

vortex ; instabilité elliptique ;

1 Introduction

Le sillage des avions se compose d'un système de vortex. Ces tourbillons, dont la présence est liée directement à la portance des ailes, peuvent mettre un temps important avant de disparaître. Aux environs des aéroports où la cadence de décollage est élevée, ils représentent un danger réel pour un avion les traversant. Afin de diminuer ce risque, il est nécessaire d'accélérer la destruction des tourbillons derrière un avion. L'instabilité elliptique est un phénomène physique se présentant comme un bon candidat à la résolution de ce problème.

L'instabilité elliptique est un processus tridimensionnel se développant sur un vortex dont le cœur a une forme elliptique. Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976) sont les premiers à étudier la stabilité d'un vortex dont le cœur a une taille finie dans un champ d'éirement stationnaire. Leur analyse globale a montré que les modes neutres d'un vortex sans contrainte (modes de Kelvin) peuvent résonner avec le champ d'éirement et conduire à une instabilité à petite longueur d'onde. Plus tard, Pierrehumbert (1986) et Bayly (1986) ont utilisé

une approche locale pour prouver que les écoulements elliptiques bidimensionnels non visqueux peuvent être déstabilisés par des perturbations tridimensionnelles. Ils mettent en évidence la résonance entre les ondes inertielles avec le champ d'étirement. Le cas d'un écoulement elliptique tournant a notamment été étudié par Leblanc (1997) et Le Dizès (2000). Récemment, Le Dizès & Laporte (2002) ont étudié théoriquement et numériquement la stabilité d'une paire de vortex. Ils ont identifié les modes instables. Par une analyse locale, ils ont prédit la valeur du taux de croissance en fonction des paramètres du système et de la longueur d'onde axiale. Ces résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Leweke & Williamson (1998), pour une paire de vortex contra-rotatifs, et Meunier & Leweke (2005), pour une paire de vortex co-rotatifs. Lacaze *et al.* (2006) ont ensuite étudié l'influence d'un écoulement axial sur la stabilité d'un vortex gaussien dans un champ d'étirement stationnaire. Ils ont mis en évidence que la structure spatiale du mode le plus instable pour une longueur d'onde donnée dépend fortement de l'amplitude de l'écoulement axial.

2 La Méthode

2.1 Le code à éléments spectraux

Les simulations numériques ont été réalisées en utilisant une technique à éléments spectraux d'ordre élevé. La méthode est décrite en détail par Thompson *et al.* (1996). Le code a été utilisé avec succès dans de nombreuses études (*e.g.* Thompson *et al.*, 1996; Sheard *et al.*, 2005). Il a notamment été utilisé par Lacaze *et al.* (2006) pour calculer les taux de croissance de l'instabilité elliptique dans une paire de tourbillons contra-rotatifs.

2.1.1 La génération de l'écoulement de base

La condition initiale est une paire de tourbillons 2-D, identiques (co-rotatifs), de circulation Γ et de profils de vorticités et de vitesse axiales gaussiens. On intègre dans le temps les équations de Navier-Stokes et d'incompressibilité dans le repère tournant à la vitesse de rotation de la paire de vortex. Chaque vortex induit sur l'autre un étirement. Les lignes d'isovorticité se déforment et perdent leur caractère axisymétrique pour prendre une forme elliptique au cœur du vortex. La valeur de l'excentricité oscille au cours du temps jusqu'à ce que le vortex tende vers un état moyen. Le Dizès & Verga (2002) ont étudié cette phase de relaxation. Ils ont montré que l'état moyen obtenu ainsi ne dépend pas du type de profil de vorticité utilisé au départ, justifiant ainsi l'utilisation de profils de vorticité gaussiens. En pratique, on intègre les équations dans le temps jusqu'à ce que l'amplitude de l'oscillation de l'excentricité devienne négligeable.

2.1.2 Les paramètres régissant le problème

Une fois la phase de relaxation terminée, on calcule les différents paramètres définissant le système. Au cours de la phase de relaxation, sous l'action de la viscosité, la vorticité diffuse, engendrant un agrandissement du rayon des vortex. On calcule alors le rayon a en utilisant le second moment de la vorticité :

$$a^2 = \frac{1}{\Gamma} \int \int_D [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2] \omega(x, y) dx dy, \quad (1)$$

où ω est le champ de vorticité et (x_c, y_c) les coordonnées du centre du vortex. On intègre sur le domaine D , moitié du domaine total dont une des limites est la médiatrice du segment reliant les deux vortex. En posant b la distance entre les deux vortex, on définit ensuite le paramètre sans

dimension a/b , caractérisant l'interaction entre les deux vortex. On utilise également le nombre de Reynolds $Re = \Gamma/\nu$ où ν est la viscosité cinématique. Un autre paramètre sans dimension est défini comme le rapport de la vitesse axiale W au cœur sur la vitesse azimuthale (inverse du nombre de Swirl) : $W_0 = 2\pi aW/\Gamma$. On pose $k = 2\pi a/\lambda$ le nombre d'onde axial adimensionné de la perturbation étudiée (λ est la longueur d'onde).

En utilisant l'écoulement de base ainsi défini, il est alors possible de procéder à une analyse de stabilité.

2.1.3 L'analyse de stabilité

On pose maintenant l'hypothèse que l'échelle de temps caractéristique de l'instabilité elliptique est petite devant l'échelle de temps visqueuse. Cela revient à figer l'écoulement de base pour le rendre stationnaire. Les paramètres de l'écoulement ne varient plus. On superpose à cet écoulement 2-D un champ de perturbations 3-D initialisé par un bruit aléatoire. On intègre ensuite dans le temps les équations de Navier-Stokes linéarisées. Il est possible de calculer le taux de croissance de la perturbation la plus instable en mesurant les variations d'amplitude du champ de perturbation des vitesses au cours du temps. En pratique, il est nécessaire d'attendre que le mode le plus instable soit suffisamment développé, c'est à dire que l'influence de tous les autres soit négligeable.

3 Les résultats

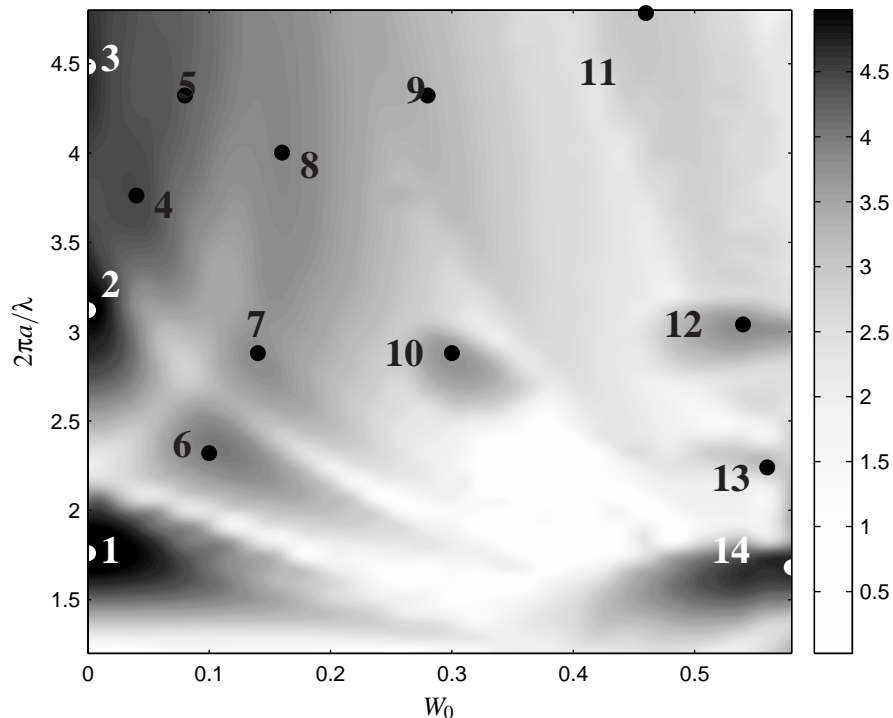


FIG. 1 – Taux de croissance calculé en fonction de (W_0, k) pour $Re = 14000$ et $a/b = 0.18$. Les zones instables sont classées par W_0 croissant.

Les simulations ont été effectuées pour $a/b = 0.14$ et $a/b = 0.18$. Seuls les résultats obtenus pour $a/b = 0.18$ sont présentés dans cette section.

mode	W_0	$2\pi a/\lambda$	$2\pi^2 b^2 \omega/\Gamma$	$2\pi^2 b^2 \sigma/\Gamma$	m	n
1	0	1.76	0	5.21	-1,1	1
2	0	3.12	0	4.99	-1,1	2
3	0	4.48	0	4.73	-1,1	3
4	0.04	3.76	0.59	4.50	0,2	1
5	0.08	4.32	1.13	4.25	-1,1	?
6	0.1	2.32	0.564	4.00	-1,1	?
7	0.14	2.88	1.17	3.81	-1,1	?
8	0.16	4.00	1.68	3.91	-1,1	?
9	0.28	4.32	2.84	3.33	?	?
10	0.3	2.88	20.1	3.74	0,2	?
11	0.46	4.78	10.0	3.03	?	?
12	0.54	3.04	46.4	3.81	1,3	1
13	0.56	2.24	15.2	3.06	0,2	1,2
14	0.58	1.68	15.7	4.81	0,2	1

TAB. 1 – Paramètres des modes calculés pour $a/b = 0.18$ et $Re = 14000$.

Dans le but de se restreindre à l'étude de l'instabilité elliptique, les simulations ont été réalisées pour des valeurs de W_0 inférieures à 0.6. On évite ainsi l'apparition de l'instabilité de jet tournant susceptible de se développer dans un tourbillon dont l'amplitude de l'écoulement axial est important (Mayer & Powell, 1992). La figure 1 montre le taux de croissance calculé dans l'espace des paramètres W_0-k . Des points intéressants sont numérotés de manière à pouvoir s'y référer par la suite. Pour chacun de ces points, on extrait les caractéristiques du mode en présence : le taux de croissance, la fréquence de rotation et la structure spatiale. Ces renseignements sont présentés dans le tableau 1. La structure spatiale du mode est définie par le nombre d'onde azimutal m du champ de perturbation et le label n des modes résonnants quantifiant la complexité radiale du mode. On note la grande dépendance des caractéristiques du mode le plus instable avec l'amplitude de l'écoulement axial. En effet, si, dans le cas où $W_0 = 0$, seule une résonnance entre les modes principaux (de même label n) pour lesquels $m = -1$ et $m = 1$ peut conduire à la perturbation la plus instable, ce n'est plus le cas dès lors que W_0 augmente. En effet, on assiste à une complexification de la structure azimutale en augmentant la vitesse axiale. Cette complexité azimutale est visible en observant par exemple les champs de perturbation de la vorticité des modes 2 et 10 présentés dans la figure 2. Il est également possible d'observer des résonnances entre des modes de labels différents. C'est le cas par exemple du mode 13 pour lequel le mode ($m = 0, n = 1$) résonne avec le mode ($m = 2, n = 2$).

On note une grande analogie entre les résultats présentés ici et le cas d'une paire de vortex contra-rotatifs avec un champ d'étirement stationnaire étudié par Lacaze *et al.* (2006). Les modes obtenus se retrouvent dans l'espace W_0-k à un nombre d'onde plus petit, comme dans le cas sans écoulement axial analysé par Le Dizès & Laporte (2002).

On remarque que la majeure partie de l'espace des paramètres se trouve être instable. Cela est d  au rapport a/b élevé. En augmentant a/b , on augmente le taux de croissance des modes et on élargit les zones instables. On provoque également l'apparition de modes de couche critique. La figure 3 présente les champs de perturbation de la vorticité associés à quelques-uns de ces modes. Les maxima de vorticité ne se trouvent plus dans le cœur du vortex (comme pour les

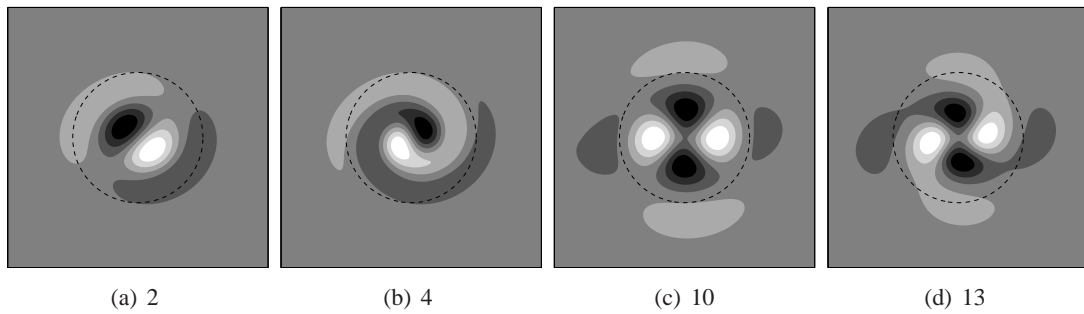


FIG. 2 – Champ de vorticité des perturbations associé à quelques modes de cœur de la figure 1. Les lignes en pointillés représentent un cercle de rayon a . Les niveaux des contours sont choisis symétriques autour de la valeur nulle.

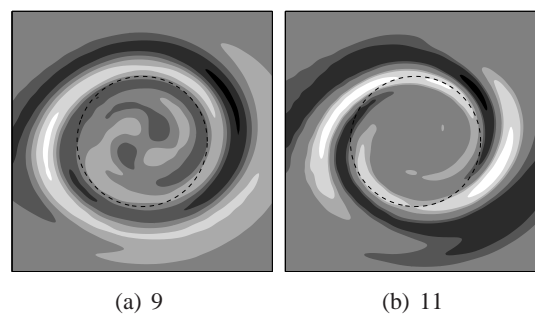


FIG. 3 – Champ de vorticité des perturbations associé à quelques modes de couche critique de la figure 1. Les lignes en pointillés représentent un cercle de rayon a . Les niveaux des contours sont choisis symétriques autour de la valeur nulle.

modes de cœurs présentés dans la figure 2) mais se caractérisent par la présence de structures fines et allongées en périphérie du vortex. Il est difficile de caractériser avec précision la structure spatiale de ces modes. On peut toutefois préciser que l'ordre de la symétrie azimutale du champ de perturbation de la vorticité varie avec la position radiale. On peut donc supposer que le mécanisme de résonance met en jeu des modes différents selon que l'on se trouve dans le cœur du tourbillon ou non.

4 Conclusions

Au cours de cette étude, la stabilité d'une paire de vortex co-rotatifs avec écoulement axial à été analysée. Cela a permis de mettre en évidence des modes de l'instabilité elliptique jamais observés auparavant. Ces résultats peuvent servir à une étude expérimentale comme base de recherche des modes de l'instabilité elliptique. Ce travail est actuellement en cours à l'IRPHE. On a également localisé des modes de couche critique. Ces modes nécessitent une étude approfondie afin de les caractériser en détail.

Références

- Bayly, B. J. 1986 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Physical Review Letters* **57**, 2160–63.
- Lacaze, L., Ryan, K. & Le Dizès, S. 2006 Elliptic instability in a strained Batchelor vortex. *Journal of Fluid Mechanics* .

- Le Dizès, S. 2000 Three-dimensional stability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Physics of Fluids* **12** (2762).
- Le Dizès, S. & Laporte, F. 2002 Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *Journal of Fluid Mechanics* **471**, 169–201.
- Le Dizès, S. & Verga, A. 2002 Viscous interaction of two co-rotating vortices before merging. *Journal of Fluid Mechanics* **467**, 389–410.
- Leblanc, S. 1997 Stability of stagnation points in rotating flows. *Physics of Fluids* **9**, 3566–3569.
- Leweke, T. & Williamson, C. H. K. 1998 Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics* **360**, 85–119.
- Mayer, E. W. & Powell, K. G. 1992 Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex. *Journal of Fluid Mechanics* **245**, 91–114.
- Meunier, P. & Leweke, T. 2005 Elliptic instability of a co-rotating vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics* **533**, 125–159.
- Moore, D. W. & Saffman, P. G. 1975 The instability of a straight vortex filament in a strain field. *Proceedings of the Royal Society of London A* **346**, 413–425.
- Pierrehumbert, R. T. 1986 Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Physical Review Letters* **57**, 2157–2159.
- Sheard, G. J., Thompson, M. C., Hourigan, K. & Leweke, T. 2005 The evolution of a subharmonic mode in a vortex street. *Journal of Fluid Mechanics* **534**, 23–38.
- Thompson, M. C., Hourigan, K. & Sheridan, J. 1996 Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder. *Experimental Thermal and Fluid Science* **12**, 190–196.
- Tsai, C.-Y. & Widnall, S. E. 1976 The instability of short waves in a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *Journal of Fluids Mechanics* **73**, 721–733.