

Reconnexion de vortex 3D : simulation et modélisation

Maurice Rossi¹ & Ivan Delbende²

¹ Institut Jean le Rond d'Alembert, FCIH, Université Pierre et Marie Curie-Paris6 et CNRS, France
(maur@ccr.jussieu.fr)

² Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur, CNRS et Université Pierre et Marie Curie-Paris6, France

Résumé :

Deux tourbillons initialement quasi rectilignes et tournant en contra-rotation se reconnectent de proche en proche pour former des anneaux. Dans cette étude, on simule une reconnexion unique par simulation numérique directe à $Re = \Gamma_0/\nu = 1500$, où $\pm\Gamma_0$ est la circulation des vortex. À cette simulation numérique est associé un modèle 2D par lequel les effets 3D, dus à la courbure des vortex, sont pris en compte à travers la superposition d'un simple champ de déformation 3D uniforme instationnaire issu de la DNS. Des différences avec la description de Saffman (1990) sont mises en évidence, en particulier une éjection de vorticité au moment de la reconnexion, qui affaiblit considérablement les deux vortex dans la région de reconnexion.

Abstract :

Two antiparallel vortices initially almost rectilinear reconnect from place to place and eventually form vortex rings. In the present issue, a single reconnection process is simulated using DNS at $Re = \Gamma_0/\nu = 1500$, where $\pm\Gamma_0$ denote the vortex circulations. Associated to this DNS, we elaborate a simplified 2D model whereby the 3D effects due to vortex curvature are taken into account through a uniform unsteady 3D strain field deduced from the DNS. Differences with the description given by Saffman (1990) are put into evidence, in particular a process of vorticity ejection when reconnection takes place, which greatly weakens the vortices in the reconnection region.

Mots-clefs :

vortex, reconnexion, simulation numérique directe

1 Introduction

La compréhension des changements de topologie dans les  coulements, en particulier de la reconnexion de vortex, est un point crucial de nombreuses études : comportements singuliers des équations de Navier–Stokes et d'Euler, dissipation [Shelley *et al.* (1993), Kida & Takaoka (1994), Moffatt & Hunt (2002)]. Les processus de reconnexion sont également observés à grande échelle dans le contexte aérodynamique : les tourbillons contrarotatifs de bout d'aile sont déformés par l'instabilité de Crow. Lorsque l'amplitude des perturbations est suffisante, les deux vortex se reconnectent sous forme d'une série d'anneaux tourbillonnaires. On se propose d'étudier, par simulation numérique directe, ce processus intrinsèquement visqueux (la reconnexion étant interdite dans le cadre non visqueux des lois de Helmholtz), d'en tirer les mécanismes prépondérants et de le modéliser de la manière la plus simple possible. Ce travail se situe dans le sillage direct des travaux de Shelley *et al.* (1993), Moffatt & Hunt (2002), Saffman (1990).

Cet article présente les résultats d'une première étape de ce travail en cours.   l'aide de la simulation numérique directe de l'instabilité de Crow, nous déterminons les caractéristiques des vortex au cours du temps et aussi le taux de déformation imposé par la courbure des vortex. Ensuite nous comparons ces résultats avec ceux d'une solution des équations de Navier-Stokes 2D

en présence d'étirement 3D. De manière plus précise, nous analysons le processus 3D comme celui d'un dipôle 2D en présence d'un étirement 3D uniforme et instationnaire.

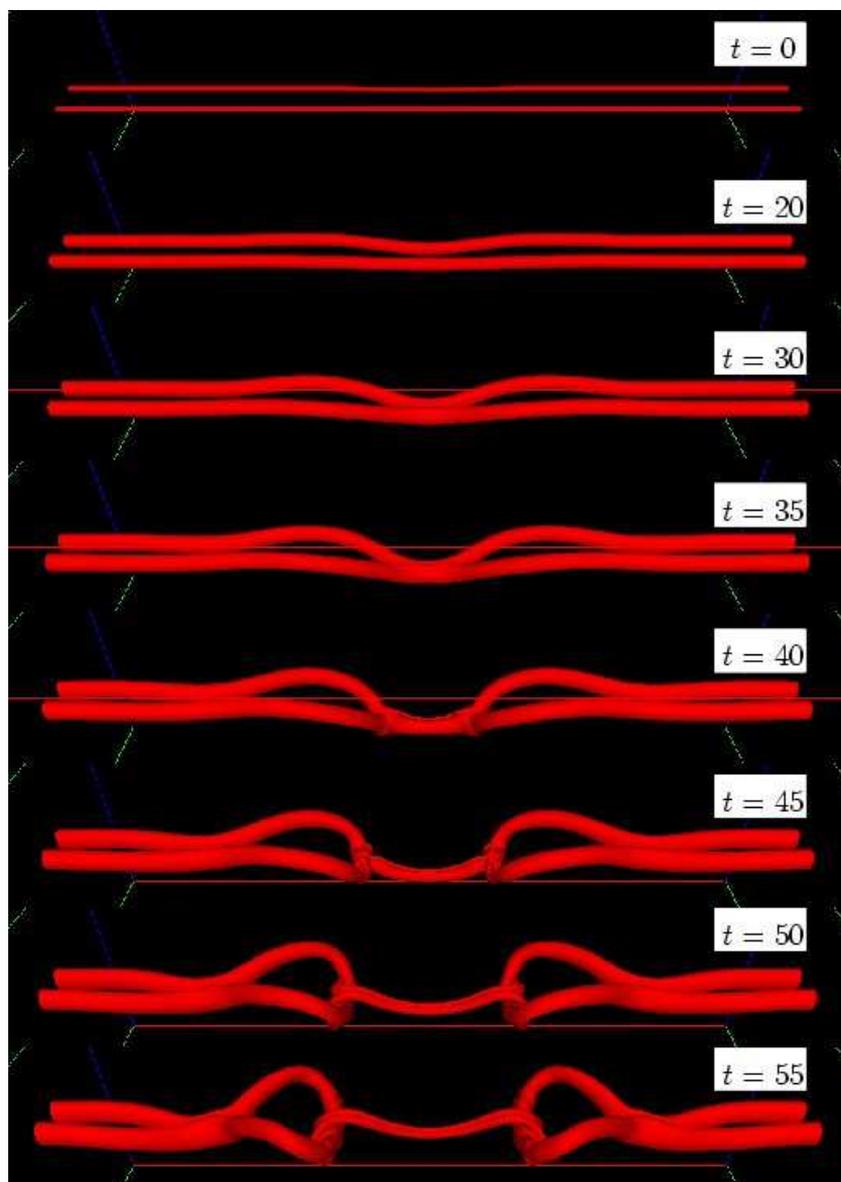


FIG. 1 – Isosurfaces de vorticité pour la simulation de reconnexion à $Re = 1500$, $a_0 = 0.1$. Le niveau de vorticité choisi est la moitié de sa valeur maximale instantanée en $x \rightarrow \infty$.

2 Simulation numérique directe de la reconnexion : résultats.

2.1 Code numérique et conditions initiales

Le code numérique utilise un grille cartésienne de $512 \times 256 \times 256$ points et intègre les équations de Navier–Stokes par une méthode pseudo-spectrale en formulation vitesse/vorticité, les champs étant développés sur une base de Fourier dans les trois directions x, y, z . L'avance en temps est effectuée par un schéma explicite Adams–Bashforth du second ordre pour les termes non linéaires, les termes visqueux étant intégrés exactement dans une formulation de modes de Fourier. Le temps de discrétisation est $\delta t = 0.005$ et la simulation est conduite (sur le

super-calculateur NEC-SX8 de l'IDRIS-CNRS) du temps $t = 0$ au temps $t = 60$ (adimensionné de la manière décrite plus bas). Le domaine de calcul est contenu dans une boîte de taille $L_x = 24$, $L_y = L_z = 7.3$ avec des conditions périodiques. La taille suivant l'axe x correspond à trois longueurs d'onde naturelles de l'instabilité de Crow. On a vérifié que la périodicité dans les directions transverses y et z ne perturbe pas la dynamique globale.

Les conditions initiales sont préparées en deux étapes. Dans un premier temps, on superpose deux vortex contra-rotatifs de Lamb-Oseen de circulation $\pm\Gamma_0$, rectilignes suivant l'axe des x , de rayon a_0 et éloignés entre eux d'une distance b_0 . Le champ de vorticité s'écrit comme la somme $\Omega^b = (\Omega^{(1)}(y, z) + \Omega^{(2)}(y, z))\mathbf{e}_x$ avec

$$\Omega^{(1)}(y, z) = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} \exp\left(-\frac{(y - b_0/2)^2 + z^2}{a_0^2}\right) \quad \Omega^{(2)}(y, z) = -\frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} \exp\left(-\frac{(y + b_0/2)^2 + z^2}{a_0^2}\right),$$

Une perturbation $\omega^{(i)}$ ($i = 1, 2$) est ensuite ajoutée à ce champ qui déforme localement l'axe du vortex :

$$\omega^{(i)}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\Omega^{(i)}}{\partial y}\eta^{(i)}(x) + \frac{\partial\Omega^{(i)}}{\partial z}\zeta^{(i)}(x)\right)\mathbf{e}_x + \Omega^{(i)}\frac{d\eta^{(i)}}{dx}(x)\mathbf{e}_y + \Omega^{(i)}\frac{d\zeta^{(i)}}{dx}(x)\mathbf{e}_z.$$

La composante axiale ω_x correspond à une légère translation $(\eta^{(i)}(x), \zeta^{(i)}(x))$ du vortex rectiligne i dans le plan yz . Les deux autres composantes ω_y et ω_z sont adaptées de manière à assurer que le champ de vorticité soit sol  noidal. Le problème est mis sous forme adimensionnelle à l'aide de la distance b_0 entre les vortex et de la vitesse Γ_0/b_0 . Par la suite on fixe a_0/b_0 à la valeur $a_0/b_0 = 0.1$. Le seul paramètre restant est donc le nombre de Reynolds $Re = \Gamma_0/\nu$ où ν est la viscosité cinématique du fluide.

La déformation des axes des vortex $(\eta^{(i)}(x), \zeta^{(i)}(x))$ que l'on a imposé correspond à une longueur d'onde naturelle de l'instabilité de Crow $\lambda = 7.23$:

$$\eta^{(1)}(x) = \zeta^{(1)}(x) = -\eta^{(2)}(x) = \zeta^{(2)}(x) = \begin{cases} -A_0(1 + \cos(2\pi x/\lambda)) & \text{pour } |x| \leq \lambda/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $A_0 = 0.1$. Le plan $x = 0$ est celui d'approche maximale pour les deux vortex.

Notons deux points. D'une part dans la simulation, le temps de retournement $\tau_0 \equiv \Gamma_0/b_0^2 = 4\pi^2 a_0^2/b_0^2$ est égal à 0.39. D'autre part, au cours d'une période transitoire de quelques temps de retournement, les deux vortex deviennent elliptiques de manière à atteindre un état d'équilibre lié à la déformation que chaque vortex exerce sur son compagnon.

2.2 Caractéristiques principales de la simulation

La figure 1 présente l'évolution temporelle du processus de reconnexion. Pour $t < 30$, on observe l'approche des deux tourbillons dans la région du pincement initial (au centre), par le mécanisme de l'instabilité de Crow. La reconnexion proprement dite se produit de manière assez rapide autour de $t = 35$: les deux vortex, au centre, sont précipités l'un vers l'autre alors que de part et d'autre de la région centrale, la vorticité se réoriente de manière à former deux boucles (bien visibles à partir de $t = 45$) qui interconnectent les deux tourbillons initialement parallèles. Au centre, il reste un petit dipole qui se "branche" sur les deux boucles, et qui subit leur influence : il s'étire axialement et s'enroule autour des boucles à ses extrémités (voir $t = 55$).

Une inspection plus fine de ce dipole central dans le plan $x = 0$, révèle un phénomène qui n'avait jamais été rapport   dans ce système : les deux vortex du dipole, comprimés l'un vers

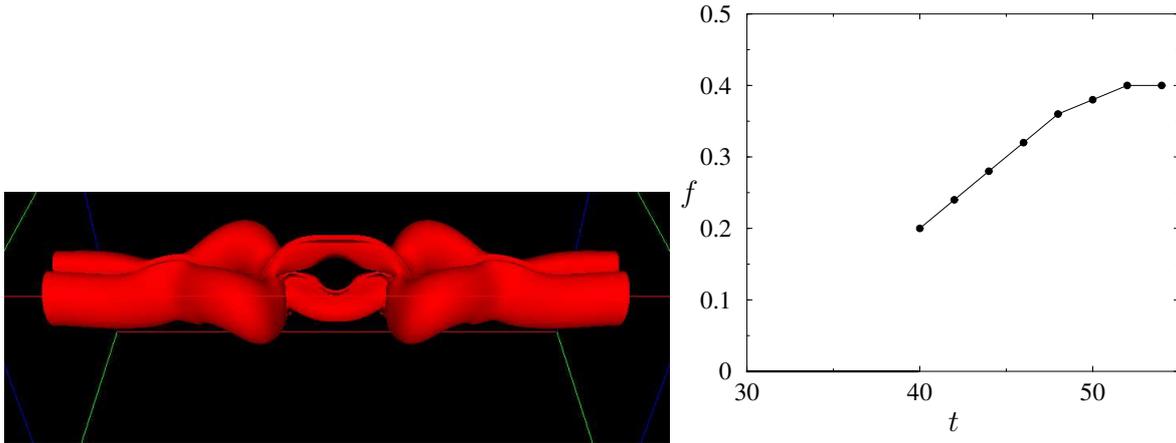


FIG. 2 – (a) Isosurface de vorticité à $t = 50$. La partie centrale du dipole a éjecté une nappe de vorticité rendue ici visible dans la région centrale au-dessus du dipôle par un choix de niveau d’isosurface très bas. (b) Fraction f de la circulation contenue dans la nappe rapportée à la circulation de la nappe plus celle du vortex. Pour $t < 40$, il est difficile de séparer nappe et vortex, donc f a été mis à zéro.

l’autre par le champ de déformation extérieur, s’elliptisent dans un premier temps, puis à partir de $t = 40$, éjectent vers le haut une partie de leur vorticité, sous la forme d’une nappe dipolaire verticale que le dipole laisse dans son sillage (il se déplace vers le bas). C’est cette nappe que l’on observe sur la figure 2a au moyen d’une surface d’iso-vorticité qui est relativement faible. Plus quantitativement, on peut tracer au cours du temps la fraction f de la circulation de la nappe rapportée à la circulation totale (nappe + vortex), ces grandeurs étant estimées dans le demi-plan $x = 0, y > 0$. On voit sur la figure 2b que, pour ces valeurs de paramètres, la nappe emporte près de 40% de la vorticité ! Ce phénomène, qui accélère la reconnexion, est observé pour la première fois dans ce contexte 3D.

2.3 Identification de la déformation externe dans la DNS.

Pour comprendre le processus de compression dans le plan de symétrie $x = 0$, il est tout d’abord nécessaire d’identifier le champ de déformation dû à la courbure de la paire de vortex 3D. Pour ce faire, on calcule un champ de vitesse dans le plan $x = 0$ de la manière suivante : on retranche du champ de vitesse totale $\vec{V}_{3D}(x, y, z)$ une contribution purement 2D, notée $\vec{V}_{2D}(y, z)$, qui serait engendrée par deux vortex rectilignes parallèles à l’axe x , de telle sorte que le champ de vorticité qui en résulte soit nul dans le plan $x = 0$. Le modèle présenté ci-dessous consiste à modéliser le champ de vitesse correspondant $\vec{V}_{curv}(x, y, z) = \vec{V}_{3D}(x, y, z) - \vec{V}_{2D}(y, z)$.

À chaque instant, le champ $\vec{V}_{curv}(x, y, z)$ est induit par un système de 4 vortex (figure 3a). On peut alors calculer le champ de déformation associé à $\vec{V}_{curv}(0, y, z)$ et construire un champ de déformation uniforme équivalent de la forme $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ avec :

$$\alpha(t) = -(\beta(t) + \gamma(t)), \quad \beta(t) = \frac{\int_{x=0} (\tau_{yy} - \tau_{yy}^{2D}) \omega_x^2 dydz}{\int_{x=0} \omega_x^2 dydz}, \quad \gamma(t) = \frac{\int_{x=0} (\tau_{zz} - \tau_{zz}^{2D}) \omega_x^2 dydz}{\int_{x=0} \omega_x^2 dydz} \quad (1)$$

La figure 3b montre l’évolution temporelle du champ de déformation. On note que la déformation dans la direction z est une compression légère, bien plus faible que les autres composantes. Pour tester la validité de ce champ uniforme équivalent, nous avons fait deux vérifications. Nous avons tout d’abord adopté le point de vue lagrangien en calculant $\alpha(t)$ à l’aide

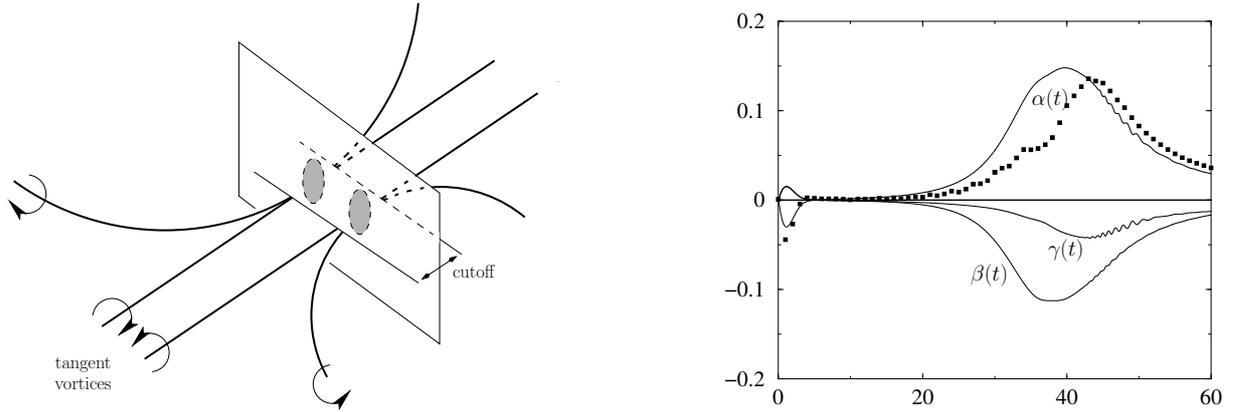


FIG. 3 – (a) Schéma des 4 vortex engendrant le champ de vitesse V_{curv} autour du plan $x = 0$. (b) Taux de déformation ($\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$) évalués à partir de l'équation (1) à l'aide de la simulation numérique directe à $Re = 1500$. Les carrés indiquent les valeurs de $\tau_{xx}(x = 0, t)$ calculées à l'aide de la trajectoire des particules passives.

de particules passives initialement disposées au cœur d'un des deux vortex, à chaque maille suivant x . L'advection est réalisée par un schéma de Runge–Kutta d'ordre 2 : $\mathbf{x}_n(t + \delta t) = \mathbf{x}_n(t) + \frac{1}{2}\delta t [\mathbf{v}(\mathbf{x}_n(t), t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_n(t) + \delta \mathbf{x}_n, t + \delta t)]$ où $\delta \mathbf{x}_n = \mathbf{v}(\mathbf{x}_n(t), t)\delta t$. La vitesse le long de l'axe du vortex près de $x = 0$ peut être déduite de celle des particules. Par une régression autour de $x = 0$, on déduit $\tau_{xx}(x = 0, t)$ qui peut être comparé à la valeur de $\alpha(t)$ précédemment définie. La figure 3b montre la validité, ou du moins, la cohérence des deux approches.

3 Comparaison de la simulation 3D à la simulation 2D en présence de déformation

On considère ici un modèle situé à mi-chemin du 2D et du 3D. On simule des solutions des équations de Navier–Stokes qui sont de la forme :

$$U^{\text{tot}}(x, y, z, t) = u(x, y, t) + \alpha(t)x, \quad (2)$$

$$V^{\text{tot}}(x, y, z, t) = v(x, y, t) + \beta(t)y, \quad (3)$$

$$W^{\text{tot}}(x, y, z, t) = w(x, y, t) + \gamma(t)z, \quad (4)$$

combinaison d'un vortex purement 2D et d'un champ de déformation uniforme et instationnaire ($\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$). Quand on applique le changement de variables :

$$x \longrightarrow \bar{x} = x/S_x(t), \quad y \longrightarrow \bar{y} = y/S_y(t), \quad z \longrightarrow \bar{z} = z/S_z(t), \quad (5)$$

avec

$$S_x(t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(u)du\right), \quad S_y(t) = \exp\left(\int_0^t \beta(u)du\right), \quad S_z(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(u)du\right), \quad (6)$$

ainsi que les transformations

$$\bar{u} = S_x(t)u, \quad \bar{v} = S_y(t)v, \quad \bar{w} = S_z(t)w, \quad (7)$$

les équations qui gouvernent la dynamique de cet écoulement se réduisent à un problème 2D proche des équations de Navier–Stokes 3D, mais où les coefficients dépendent du temps.

On effectue alors une comparaison entre la solution dans le plan $x = 0$ de la simulation numérique directe 3D avec la simulation 2D où l'on prescrit le champ de déformation ($\alpha(t)$, $\beta(t)$,

$\gamma(t)$) pris dans la DNS 3D en utilisant les formules (1). La condition initiale en vorticité pour la simulation 3D est identique à la vorticité initiale dans le plan $x = 0$ de symétrie pour le système 3D. À cette abscisse, la vorticité est parallèle à l'axe x .

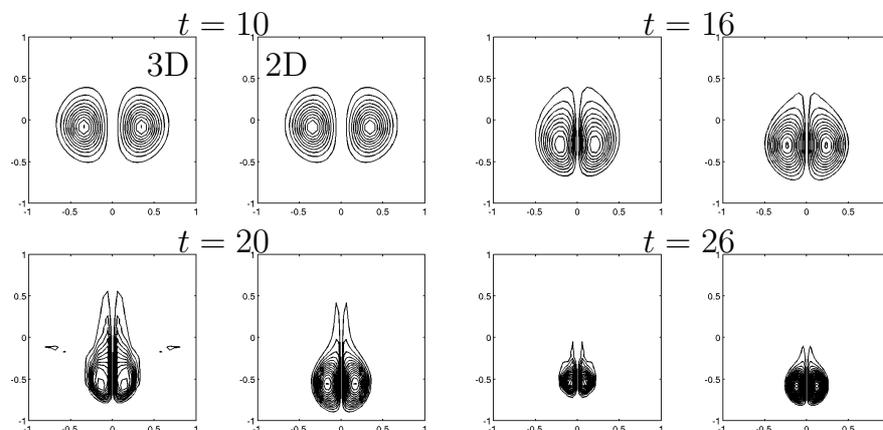


FIG. 4 – Comparaison des isocontours de vorticité. Pour chaque date : à gauche, coupe de la simulation 3D dans le plan $x = 0$, et à droite : simulation 2D avec déformation extérieure uniforme. Simulation à $Re = 1500$ pour $a_0 = 0.2$ (et non 0.1 comme précédemment).

La figure 4 montre l'évolution temporelle du profil de vorticité au cours du temps pour le système 3D (resp. 2D). Jusqu'à la date $t = 30$, les deux solutions sont très proches. En particulier, l'éjection de vorticité quand les deux centroïdes de vorticité se rapprochent est présente dans les deux simulations (un peu visible à $t = 20$). Ceci justifie le modèle simplifié dans lequel la déformation est considérée comme uniforme. Nous avons également vérifié plus quantitativement que la position des centroïdes, les tailles, les circulations et les ellipticités sont comparables (non présentées ici).

4 Conclusions

Grâce à la simulation d'un modèle 2D, par lequel les effets de courbure 3D des vortex sont pris en compte à travers un simple champ de déformation 3D uniforme instationnaire, nous pouvons rendre compte de la dynamique au point de reconnexion. Des différences avec la description de Saffman (1990) sont d'ailleurs mises en évidence, en particulier une éjection de vorticité (ici, près de la moitié est évacuée par ce processus) pendant la reconnexion, due à la compression latérale excessive du dipôle initial. Cette compression latérale peut être prédite par un modèle filamentaire du type Biot–Savart, beaucoup moins coûteux qu'une simulation Navier–Stokes 3D.

Références

- S. Kida and M. Takaoka, *Vortex reconnection*, Ann. Rev. Fluid Mech., **Vol. 26**, pp. 169-189 (1994).
- H.K. Moffatt and R.E. Hunt, *A model of magnetic reconnection*, in Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics, Eds K. Bajer and H.K. Moffatt, pp. 125-138, Kluwer Academic Publisher (2002).
- P.G. Saffman, *A model of vortex reconnection*, J. Fluid Mech., **Vol. 212**, 315 (1990).
- M.J. Shelley, D.I. Meiron and S.A. Orszag *Dynamical aspects of vortex reconnection of perturbed anti-parallel vortex tubes*, J. Fluid Mech., **Vol. 246**, pp. 613-652 (1993).