

Comportement hystérétique du frottement anisotrope

Géry de Saxcé*, Zhi-Qiang Feng†, Zenon Mróz ‡ & Mohammed Hjiaj ~

*Laboratoire de Mécanique de Lille, Université de Lille-1, Villeneuve d'Ascq,

†Laboratoire de Mécanique d'Evry, Université d'Evry-Val d'Essonne, Evry,

‡ Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland,

~Laboratoire de Génie Civil et Génie Mécanique, INSA de Rennes.

gerly.desaxce@univ-lille1.fr, Zhi-Qiang.Feng@iup.univ-evry.fr, zmroz@ippt.gov.pl,
mohammed.hjiaj@insa-rennes.fr

Résumé :

Ce papier présente des simulations numériques de problèmes de contact 3D avec une loi de frottement orthotrope et une loi de glissement non associée. L'algorithme de résolution est basé sur la méthode du bi-potential appliquée à un système d'équations non linéaires et non différentiables. Une attention particulière est portée aux chargements cycliques car le taux d'usure est fortement couplé à la dissipation par frottement. Cette première étude semble indiquer une grande influence de l'anisotropie du frottement sur l'usure des pièces.

Abstract:

This paper presents numerical simulations of 3D contact problems with orthotropic friction law and non-associated sliding rule. The solution algorithm is based on the bi-potential method applied to a non linear and non differentiable system of equations. Cyclic load are especially emphasized because the wear rate is strongly coupled to the friction dissipation. This first study seems to indicate a significant influence of the anisotropy of the friction on the wear.

Mots-clefs :

frottement orthotrope ; loi non associée ; usure

1 Un modèle de frottement anisotrope avec loi de glissement non associée

Le modèle d'aspérité utilisé par Michalowski *et al.* (1978), Mróz *et al.* (1994) pour étudier le frottement orthotrope conduit à définir un cône de frottement convexe K_μ par la condition

$$f(r_{tx}, r_{ty}, r_n) = \|\mathbf{r}_t\|_\mu - r_n \leq 0, \quad (1)$$

où interviennent la pression r_n , la contrainte de frottement r_t et la norme elliptique

$$\|\mathbf{r}_t\|_\mu = \sqrt{\left(\frac{r_{tx}}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{r_{ty}}{\mu_y}\right)^2} = \|\mathbb{M}^{-1} \mathbf{r}_t\|, \quad \text{avec } \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{pmatrix}.$$

μ_x et μ_y sont les coefficients de frottement principaux. La norme duale est donnée par

$$\|-\mathbf{u}_t\|_\mu^* = \sqrt{(-\mu_x u_{tx})^2 + (-\mu_y u_{ty})^2} = \|\mathbb{M}(-\mathbf{u}_t)\|$$

La loi de glissement est non associée, définie par un potentiel de glissement convexe

$$g(r_{tx}, r_{ty}) = \|\mathbf{r}_t\|_p - \zeta = 0$$

où intervient une seconde norme

$$\|\mathbf{r}_t\|_p = \sqrt{\left(\frac{r_{tx}}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{r_{ty}}{p_y}\right)^2} = \|\mathbb{P}^{-1} \mathbf{r}_t\|, \quad \text{avec } \mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{p_y}{p_x} = \left(\frac{\mu_y}{\mu_x}\right)^k$$

En général, on a $k \neq 1$, ce qui conduit à une règle de glissement non associée

$$-\Delta u_{tx} = \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial r_{tx}} = \frac{\Delta \lambda}{p_x^2} \frac{r_{tx}}{\|\mathbf{r}_t\|_p}, \quad -\Delta u_{ty} = \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial r_{ty}} = \frac{\Delta \lambda}{p_y^2} \frac{r_{ty}}{\|\mathbf{r}_t\|_p}$$

L'écart à la loi de normalité est caractérisé par la matrice de non associativité

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P} \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_x/\mu_x & 0 \\ 0 & p_y/\mu_y \end{pmatrix}$$

La loi complète de contact unilatéral à frottement sec anisotrope prend la forme complexe de deux structures "if...then...else" emboîtées

if $r_n = 0$ then

$$x_n \geq 0, \quad \{\text{relâchement du contact}\}$$

else if $\mathbf{r} \in \text{int } K_\mu$ then

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \{\text{adherence}\}$$

else ($\mathbf{r} \in \partial K_\mu$ and $r_n > 0$)

$$\left\{ x_n \geq 0 \quad \text{and} \quad \exists \lambda > 0 \quad \text{such that} \quad \Delta \mathbf{u}_t = -\Delta \lambda \frac{\mathbb{P}^{-2} \mathbf{r}_t}{\|\mathbf{r}_t\|_p} \right\} \{\text{glissement}\}$$

end if

Sous cette forme, la loi est difficile à traiter numériquement. Par des raisonnements d'analyse convexe, on peut montrer qu'elle est équivalente à l'inégalité variationnelle suivante

$$(\mathbb{I} - \mathbb{Q}^2)(-\Delta \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{r}'_t - \mathbf{r}_{t1}) + (r'_n - r_{n1}) \left\| \mathbb{Q}^2(-\Delta \mathbf{u}_t) \right\|_\mu^* + \Delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1) \geq 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_1 \in K_\mu \quad \text{and} \quad \forall \mathbf{r}' \in K_\mu$$

à vérifier par la réaction de contact à la fin du pas r_1 . Cette relation prend alors la forme élégante d'une loi de sous-normalité implicite, $-\Delta \mathbf{u} \in \partial b_c(-\Delta \mathbf{u}, \bullet)(r_1)$, grâce au bi-potentiel

$$b_c(-\Delta \mathbf{u}, \mathbf{r}) = \Psi_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \Psi_{\mathbb{R}_-}(-x_n) + (\mathbb{I} - \mathbb{Q}^2)(-\Delta \mathbf{u}_t) \cdot \mathbf{r}_t + r_n \left\| \mathbb{Q}^2(-\Delta \mathbf{u}_t) \right\|_\mu^*$$

où Ψ_K désigne la fonction indicatrice du convexe K . Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détail dans de Saxcé *et al.* (1998) pour le cas isotrope, et dans Hjjaj *et al.* (2002) et Hjjaj *et al.* (2004) pour le cas anisotrope.

2 Algorithme numérique

Le bi-potentiel est non différentiable. Pour le régulariser, nous utilisons la méthode du lagrangien augmenté qui conduit à remplacer (2) par l'équation équivalente (Hjjaj *et al.* (2004))

$$\mathbf{r}_1 = \text{proj}((\boldsymbol{\tau}_t, \tau_n), K_\mu)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\tau}_t = \mathbf{r}_t - \rho \mathbb{Q}^2 \Delta \mathbf{u}_t, \text{ et } \tau_n = r_n - \rho \left(\Delta u_n + \left\| \mathbb{Q}^2 (-\Delta \mathbf{u}_t) \right\|_{\mu}^* \right)$$

La résolution itérative de cette équation non linéaire conduit au schéma prédictor-correcteur

$$\text{Predictor : } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 - \rho \left[\mathbb{Q}^2 \Delta \mathbf{u}_t + \left(\Delta u_n + \left\| \mathbb{Q}^2 (-\Delta \mathbf{u}_t) \right\|_{\mu}^* \right) \mathbf{n} \right]$$

$$\text{Corrector : } \mathbf{r}_1 = \text{proj}(\boldsymbol{\tau}, K_{\mu})$$

où $\rho > 0$ est un paramètre numérique dont la valeur peut être calculée automatiquement (Feng et al. (2006)). Le calcul de la projection sur K_{μ} conduit à une équation algébrique d'ordre 4 résolue par la méthode de Ferrari. Une nouvelle estimation de l'incrément de déplacement est ensuite calculée et le processus est réitéré jusqu'à convergence.

3 Applications

On considère le contact entre une surface plane indéformable et un poinçon cylindrique élastique de modules $E = 210000$ MPa et $\nu = 0.3$. le rayon et la hauteur du poinçon sont de 10 mm. On impose à la face supérieure du poinçon un déplacement vertical de 0.1 mm. Le maillage, composé de 1280 éléments finis de briques à 8 nœuds, est montré à la figure 1. Les 337 nœuds de contact semblent suffisants pour assurer la précision de la solution de ce problème de contact complexe, spécialement en présence de déchargement. La figure 2 montre le programme de chargement cyclique. Pour chaque cycle, le chargement est discrétisé en 5 incréments et le déchargement en 10. Les différents cas traités sont présentés dans la Table 1.

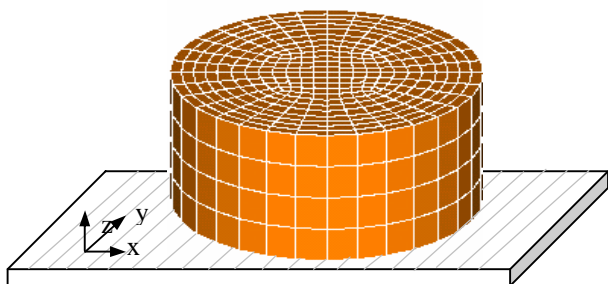


FIG. 1 – Problème de poinçonnement

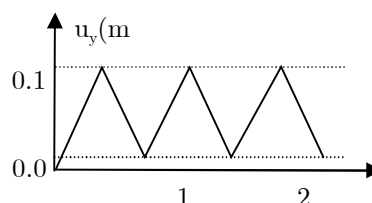


FIG. 2 – Programme de chargement

Cas de chargement	μ_x	μ_y	p_x	p_y
A isotrope	0.20	0.20	0.20	0.20
B anisotrope, glissement associé	0.30	0.15	0.30	0.15
C anisotrope, glissement non associé	0.30	0.15	0.05	0.20

TABLE 1 – Caractéristiques du frottement et cas de chargement.

La figure 3 montre la distribution de la valeur de la fonction de charge f (définie par (1)) à la fin de déchargements successifs. Au début, la zone d'adhérence ($f < 0$) est localisée au centre. Lors du déchargement, une zone d'adhérence apparaît également en périphérie. La carte des zones de glissement et d'adhérence devient ensuite de plus en plus complexe. Les zones d'adhérence se réduisent et se fractionnent en plusieurs morceaux. En outre, la zone de glissement inverse progresse de la périphérie vers le centre.

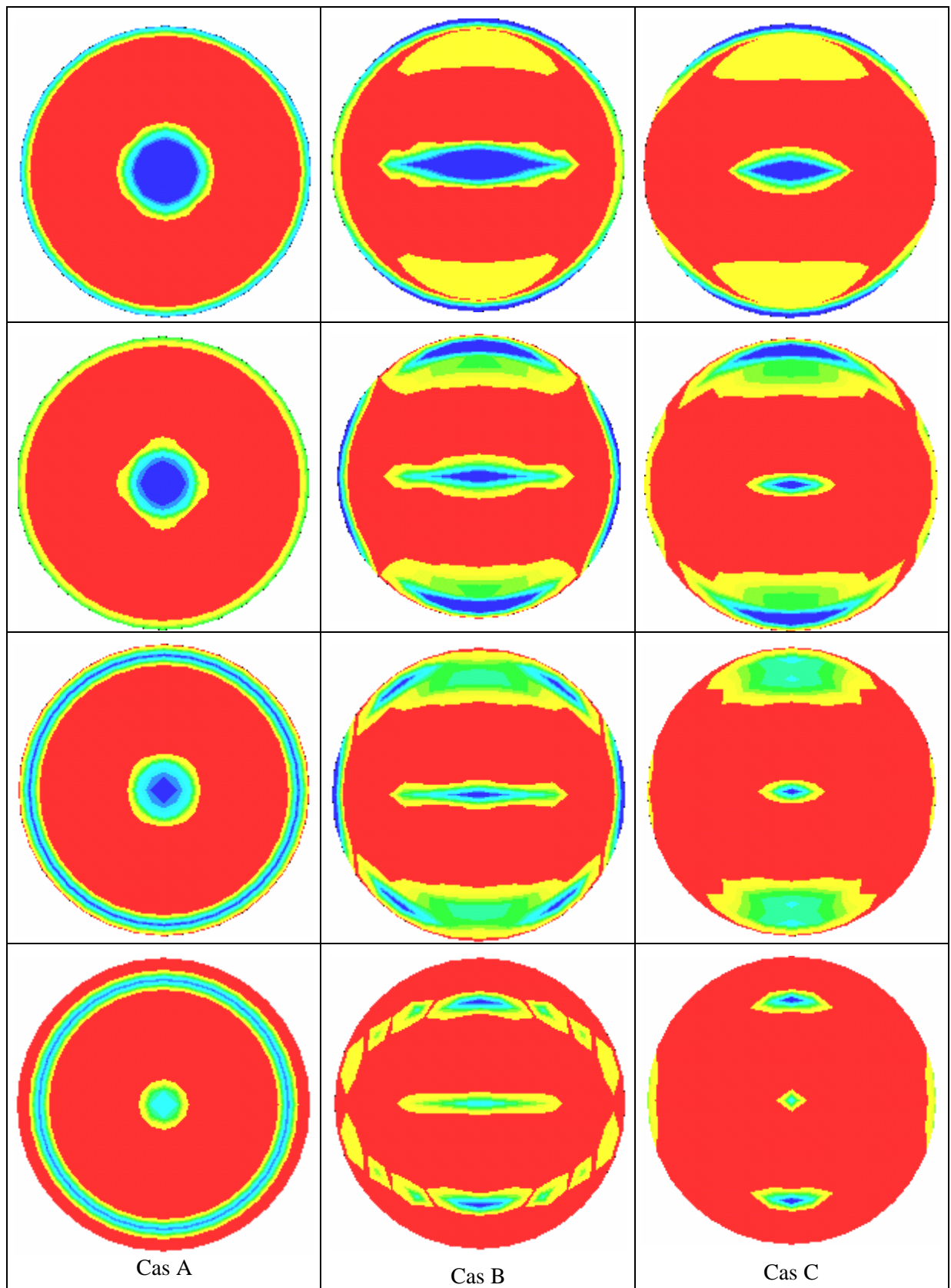


FIG. 3 – Fonction f : déchargements après 1, 3, 4 et 6 cycles

Afin de connaître plus précisément le comportement hystérique du phénomène de frottement anisotrope, on examine, pour le cas B, la trajectoire d'un point particulier de la surface de contact (figure 4). La courbe force-glissement ne montre pas, dans le cas isotrope, de différence sensible entre le chargement et le déchargement. En revanche, dans les cas anisotrope, on observe un comportement hystérique asymétrique prononcé avec une phase de chargement quasi-linéaire tandis que celle de déchargement est non linéaire. La figure 5 montre l'évolution des forces de frottement au point P. On observe là aussi un écart très sensible entre le chargement et le déchargement.

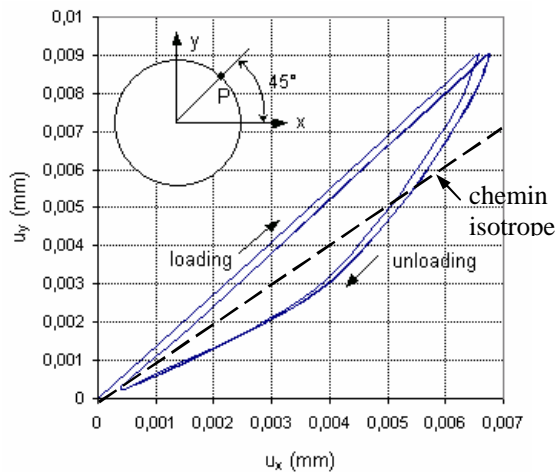


FIG. 4 –Trajectoire du point P

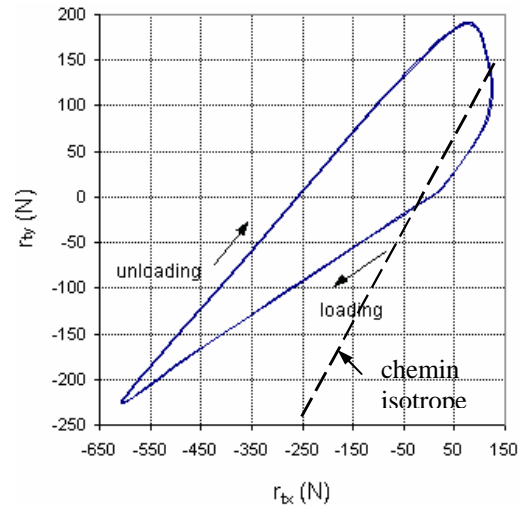


FIG. 5 –Evolution des forces de frottement en P

L'évolution du glissement du point P au cours du chargement est présentée à la figure 6. On remarquera l'existence d'un plateau, manifestation d'une phase d'adhérence de ce point à la fin de la phase de chargement de chaque cycle. Il existe donc un état d'adhérence entre la fin du glissement dans le sens radial direct et le début du glissement inverse.

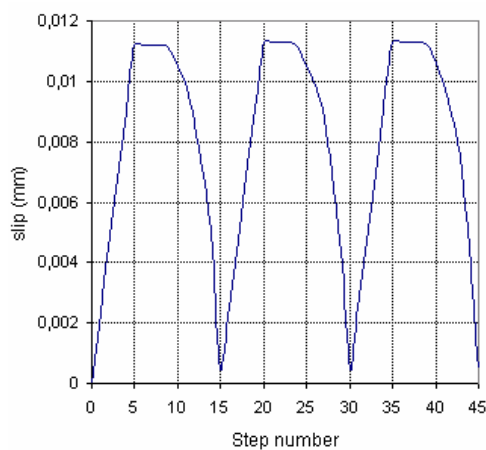


FIG. 6 –Evolution du glissement de P

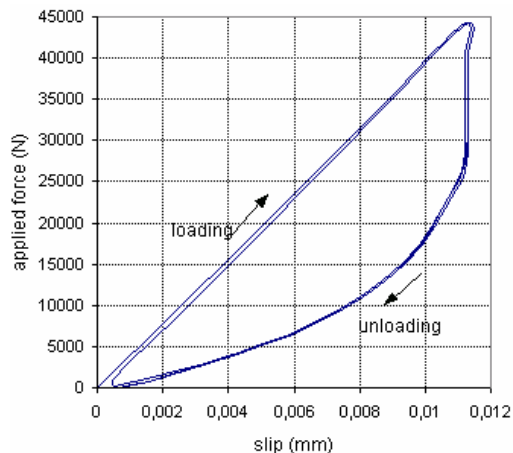


FIG. 7 –Force appliquée/glissement de P

L'évolution de la force appliquée en fonction du glissement du point P est montré à la figure 7. Contrairement au cas isotrope dont le comportement est quasi-linéaire, le cas anisotrope donne lieu à une dissipation par frottement importante. Le taux d'usure étant fortement couplé à la dissipation, cette première étude semble indiquer une forte influence de l'anisotropie sur l'usure des pièces.

4 Conclusions

A notre connaissance, peu d'attention a été prêtée dans la littérature au traitement numérique du frottement anisotrope (Buczowski & Kleiber (1997)). Dans beaucoup d'applications industrielles, l'hypothèse d'un frottement isotrope semble toutefois irréaliste, en particulier à cause des stries dues aux opérations d'usinage et de finition. Pour le contact frottant anisotrope, Michalowski, Mróz et Stupkiewicz ont mis en évidence la nature non associée de la loi de glissement et proposé une modélisation. Utilisant la méthode du bi-potential, nous avons proposé un schéma d'intégration temporelle de la loi de contact frottant prenant en compte tous les cas (adhérence, glissement, relâchement du contact) grâce à la projection sur le cône de frottement. L'algorithme s'avère robuste et précis dans l'analyse du comportement complexe d'un poinçon cylindrique soumis à un chargement cyclique. Les calculs montrent une forte influence de la non associativité de la loi de glissement sur le comportement frottant. Le caractère très hystérétique et dissipatif du frottement anisotrope semble indiquer une forte influence de l'anisotropie du frottement sur l'usure des pièces. Ces premiers résultats sont encourageants. De nouveaux développements sont en cours concernant les problèmes de fretting.

Références

- Buczowski, R. & Kleiber, M. 1997 Elasto-plastic interface model for 3D-frictional orthotropic contact problems, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **40**, 599-619.
- de Saxcé, G. & Feng, Z.-Q. 1998 The bi-potential method: a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms, *Mathematical and Computer Modelling*, **6**,225-245
- Feng, Z.-Q., Hjjaj, M., de Saxcé, G. & Mróz, Z. 2006 Influence of frictional anisotropy on contacting surfaces during loading/unloading cycles. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **41**(8), 936-948
- Hjjaj, M., de Saxcé, G. & Mróz, Z. 2002 A variational-inequality based formulation of the frictional contact law with a non-associated sliding rule, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **21**, 49-59
- Hjjaj, M., Feng, Z.-Q., de Saxcé, G. & Mróz, Z. 2004 Three dimensional finite element computations for frictional contact problems with on-associated sliding rule. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **60**(12), 2045-2076
- Michalowski, R. & Mróz, Z. 1978 Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems *Archives of Mechanics*, **11**, 259-276
- Mróz, Z. & Stupkiewicz, S. 1994 An anisotropic friction and wear model. *International Journal of Solids & Structures* **31**, 1113-1131