

Écoulement de fluide visqueux autour d'une sphère proche d'une paroi avec condition de glissement

Hend Loussaief, Laurentiu Pasol, François Feuillebois

ESPCI
PMMH
10, Rue Vauquelin 75005 Paris
hend@pmmh.espci.fr

Résumé :

On considère une particule solide et sphérique dans un écoulement de fluide visqueux à petit nombre de Reynolds parallèle à une paroi plane sur laquelle s'applique une condition de glissement. Par linéarité des équations de Stokes, la solution générale pour une sphère en translation et rotation dans un écoulement de cisaillement s'obtient par superposition de trois problèmes : sphère au repos dans un écoulement de cisaillement, sphère en rotation ou translation dans un fluide au repos. Les solutions de ces trois problèmes sont obtenues par la méthode des coordonnées bisphériques. Les résultats pour la force et le couple sont calculés avec une précision de 10^{-7} , même pour de très petites distances particule-paroi de l'ordre de 10^{-3} . Les vitesses de translation et de rotation d'une sphère libre dans un écoulement de cisaillement sont alors obtenues avec une précision de 10^{-7} .

Abstract :

The creeping flow around a solid spherical particle close to a wall on which a slip condition applies is calculated analytically. The problem of a sphere translating and rotating along a wall in a pure shear flow is solved, from the linearity of Stokes equations, as the sum of elementary problems: sphere held fixed in a shear flow close to a wall, sphere translating and rotating along a wall. The solutions are obtained in each case using the bispherical coordinates technique. Results for the force and torque on the sphere are provided for various values of the slip length with a precision better than 10^{-7} , even for a small gap down to 10^{-3} sphere radius. The translational and rotational velocities of a freely moving sphere in a pure shear flow are then derived.

Mots-clefs :

écoulement visqueux (équations de Stokes) ; cisaillement ; glissement

1 Introduction

La condition à la limite habituelle sur une paroi pour un fluide visqueux est la condition de non glissement, mais une condition aux limites de glissement doit être utilisée pour des liquides proches de surfaces hydrophobes et de surfaces poreuses ou dans un gaz à petite échelle (la longueur de glissement étant alors le libre parcours moyen). Diverses applications sont en vue, par exemple des procédés de séparation par ultrafiltration, fractionnement flux-force, de nouvelles techniques de mesure de vitesse à des échelles très petites au voisinage de surfaces. On s'intéresse dans cet article au calcul de la force et du couple pour le problème d'une particule sphérique en translation et rotation dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi plane sur laquelle s'applique une condition de glissement. Les problèmes de la translation et de la rotation ont été également traités par [2,5] mais le problème d'une sphère fixe en écoulement de cisaillement est nouveau (à notre connaissance). Nous reprenons ici les problèmes traité par [2,5], en proposant une solution plus simple.

2 Solution en coordonnées bisphériques

On considère un fluide visqueux newtonien incompressible dans un domaine semi-infini limité par une paroi plane. Soit (ox, oy, oz) un repère orthonormé lié à la paroi où $z = 0$ et soient e_x, e_y, e_z les vecteurs unitaires de ce repère. Une sphère de rayon a dont le centre est situé à une distance ℓ de la paroi est en mouvement avec une vitesse de translation Ue_x et une vitesse de rotation Ωe_y dans un écoulement de cisaillement. La condition pour la vitesse de l'écoulement perturbé \mathbf{u} sur la sphère est la condition de non-glissement alors qu'une condition de glissement est imposée sur la paroi :

$$\mathbf{u} = b \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} e_x + \frac{\partial u_y}{\partial z} e_y \right), \quad (1)$$

où b est la longueur de glissement. La vitesse de l'écoulement non perturbé satisfait la condition de glissement, $\mathbf{u}_\infty = k(z+b)e_x$ où k est une constante (taux de cisaillement).

Le nombre de Reynolds basé sur le rayon de la particule est petit. Par linéarité des équations de Stokes, le problème d'une sphère en rotation et en translation dans un écoulement de cisaillement se décompose en : (i) sphère en translation avec la vitesse Ue_x parallèle à la paroi ; (ii) sphère en rotation avec la vitesse Ωe_y parallèle à la paroi ; (iii) sphère fixée dans un écoulement de cisaillement $k(z+b)e_x$. Pour chaque problème d'écoulement, par linéarité, la force et le couple sont proportionnels aux vitesses. En utilisant les mêmes notations que dans [1] :

$$F_x^t = -6\pi a \mu U f_{xx}^t \quad C_y^t = 8\pi a^2 \mu U c_{yx}^t \quad (2a)$$

$$F_x^r = 6\pi a^2 \mu \Omega f_{xy}^r \quad C_y^r = -8\pi a^3 \mu \Omega c_{yy}^r \quad (2b)$$

$$F_x^c = 6\pi a \ell \mu k f_{xx}^c \quad C_y^c = 4\pi a^3 \mu k c_{yx}^c \quad (2c)$$

où f et c sont les coefficients de frottement. Les indices de translation, rotation et cisaillement sont respectivement $(\cdot)^t, (\cdot)^r, (\cdot)^c$. Le premier indice est la composante de la force et du couple et le second indice est la direction de l'écoulement non perturbé. Lorsque ℓ tend vers l'infini, les coefficients de frottement c_{yx}^t et f_{xy}^r tendent vers 0 et les autres coefficients de frottement tendent vers l'unité, d'après les formules de Faxen (cf par exemple [4]). Nous utilisons ici une méthode de résolution des équations de Stokes basée sur la technique des coordonnées bisphériques analogue à celle de [3, 6].

Le passage des coordonnées cylindriques (ρ, z, ϕ) (avec $x = \rho \cos \phi$ et $y = \rho \sin \phi$) aux coordonnées bisphériques (ξ, η, ϕ) s'écrit :

$$\rho = \frac{c \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad z = \frac{c \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad c = (\ell^2 - a^2)^{1/2}. \quad (3)$$

avec $0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \eta \leq \pi$ et $0 \leq \xi \leq \alpha$. Ici, $\xi = \alpha$ et $\xi = 0$ représentent respectivement la surface de la sphère et le plan. La solution générale des équations de Stokes en coordonnées bisphériques s'écrit [3, 6] :

$$u_\rho = \frac{1}{2} \{ \rho Q_1 + U_0 + U_2 \} \cos \phi, \quad u_z = \frac{1}{2} \{ z Q_1 + 2U_1 \} \cos \phi \quad (4a)$$

$$u_\phi = \frac{1}{2} (U_2 - U_0) \sin \phi, \quad p = \mu Q_1 \cos \phi \quad (4b)$$

où :

$$U_1 = c^M (\cosh \xi - \beta)^{1/2} \sin \eta \sum_{n \geq 1} A_n \sinh(\gamma_n \xi) P'_n(\beta), \quad (5a)$$

$$Q_1 = c^{M-1} (\cosh \xi - \beta)^{1/2} \sin \eta \sum_{n \geq 1} [B_n \cosh(\gamma_n \xi) + C_n \sinh(\gamma_n \xi)] P'_n(\beta), \quad (5b)$$

$$U_0 = c^M (\cosh \xi - \beta)^{1/2} \sum_{n \geq 0} [D_n \cosh(\gamma_n \xi) + E_n \sinh(\gamma_n \xi)] P_n(\beta), \quad (5c)$$

$$U_2 = c^M (\cosh \xi - \beta)^{1/2} \sin^2 \eta \sum_{n \geq 2} [F_n \cosh(\gamma_n \xi) + G_n \sinh(\gamma_n \xi)] P''_n(\beta), \quad (5d)$$

où $\beta = \cos \eta$, $\gamma_n = n + 1/2$, $P_n(\beta)$ sont les polynômes de Legendre d'ordre n et le prime (') indique la dérivée par rapport à β . L'entier M prend les valeurs $M = 0$ pour la translation et $M = 1$ pour la rotation et le cisaillement.

Pour chaque problème, les coefficients sans dimension A_n, \dots, G_n sont obtenus à partir des conditions aux limites et de l'équation de continuité $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$. Il est important de noter qu'en dérivant cette dernière équation et en utilisant (1), on obtient alors une autre relation sur le plan :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = b \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \quad (6)$$

Cette relation nous permet d'obtenir une solution plus simple que celle de [2, 5] pour la translation et la rotation. En effet, on peut alors exprimer les solutions de chaque problème en fonction de seulement quatre séries de coefficients : A_n, C_n, E_n et G_n . Nous traitons par la même technique le problème de cisaillement. Nous utilisons dans les équations (7)-(9) un indice i (figurant à droite de toutes les relations) qui vaut, 1 pour la translation, 2 pour la rotation et 3 pour le cisaillement. Les quatre équations auxquelles satisfont les quatre séries de coefficients s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(2n-1-2q_n^-)}{2n-1} A_{n-1} + (-2\gamma_n + 2 \tanh(\gamma_n \alpha) \coth \alpha) A_n \\ & + \frac{(n+2)(2n+3-2q_n^+)}{2n+3} A_{n+1} - \frac{\lambda(n-1)}{\hat{c}} C_{n-1} + \frac{\hat{c} \tanh(\gamma_n \alpha) + 2\lambda n + \lambda}{\hat{c}} C_n \\ & - \frac{\lambda(n+2)}{\hat{c}} C_{n+1} = \delta_{i2} \frac{4\zeta_n q_n^-}{\sinh((\gamma_n - 1)\alpha)} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2n-1-2q_n^-}{2(2n-1)} A_{n-1} + \frac{2n+3-2q_n^+}{2(2n+3)} A_{n+1} + \frac{\lambda}{4\hat{c}} C_{n-1} - \frac{\lambda}{4\hat{c}} C_{n+1} + \frac{\lambda(n-2)}{2\hat{c}} G_{n-1} \\ & - \frac{2\lambda n + \lambda + 2\hat{c} \tanh(\gamma_n \alpha)}{2\hat{c}} G_n + \frac{\lambda(n+3)}{2\hat{c}} G_{n+1} = \delta_{i2} \frac{4\zeta_n q_n^-}{\sinh((\gamma_n - 1)\alpha)} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)(-2q_n^- + 2n-1)}{2(2n-1)} A_{n-1} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3-2q_n^+)}{2(2n+3)} A_{n+1} - \frac{n(n-1)\lambda}{4\hat{c}} C_{n-1} \\ & + \frac{(n+1)(n+2)\lambda}{4\hat{c}} C_{n+1} + \frac{n\lambda}{2\hat{c}} E_{n-1} - \frac{2n\lambda + \lambda + 2 \tanh((n + \frac{1}{2})\alpha) \hat{c}}{2\hat{c}} E_n \\ & + \frac{(n+1)\lambda}{2\hat{c}} E_{n+1} = K_n^i \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (9)$$

avec l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2}C_n - \frac{1}{2}(n-1)C_{n-1} + \frac{1}{2}(n+2)C_{n+1} - \frac{1}{2}E_{n-1} + E_n - \frac{1}{2}E_{n+1} \\ & + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)G_{n-1} - (n-1)(n+2)G_n \\ & + \frac{1}{2}(n+2)(n+3)G_{n+1} = 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (10)$$

δ représente ici le symbole de Kronecker. On définit aussi les quantités sans dimension $\lambda = b/a$, $\hat{c} = c/a$, $q_n^\pm = \tanh(\gamma_n \alpha) \coth \alpha \pm 1$ et

$$\zeta_n = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{e^{-\gamma_{n-1}\alpha}}{\gamma_{n-1}} - \frac{e^{-\gamma_{n+1}\alpha}}{\gamma_{n+1}} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K_n^1 &= -\frac{2\sqrt{2}e^{-\gamma_n\alpha}}{\cosh(\gamma_n\alpha)}; & K_n^2 &= \frac{\beta_n q_n^-}{\sinh(\gamma_{n-1}\alpha)} - \frac{2\sqrt{2}\gamma_n e^{-\gamma_n\alpha}}{\cosh(\gamma_n\alpha)} \\ K_n^3 &= \frac{4\sqrt{2}\gamma_n e^{-\gamma_n\alpha}}{\cosh(\gamma_n\alpha)} + \frac{2\lambda}{\hat{c} \cosh(\gamma_n\alpha)} \end{aligned} \quad (12)$$

3 Calcul numérique des coefficients

Pour que les séries (5) convergent (la vitesse et la pression étant physiquement finies), les séries de coefficients A_n, \dots, G_n doivent tendre vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette condition permet de résoudre le système linéaire infini (7)-(10) pour A_n, C_n, E_n, G_n , système dans lequel les premiers termes des séries des coefficients sont inconnus. La solution consiste à résoudre le système infini par troncature ($A_n = C_n = E_n = G_n = 0$) pour $n = n_l$ assez grand. Le système linéaire tronqué s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} M_{1,1}\mathcal{A}_1 + M_{1,2}\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1 \\ M_{2,1}\mathcal{A}_1 + M_{2,2}\mathcal{A}_2 + M_{2,3}\mathcal{A}_3 = \mathcal{B}_2 \\ \vdots \\ M_{n,n-1}\mathcal{A}_{n-1} + M_{n,n}\mathcal{A}_n + M_{n,n+1}\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{B}_n \\ \vdots \\ M_{n_l,n_l-1}\mathcal{A}_{n_l-1} + M_{n_l,n_l}\mathcal{A}_{n_l} = \mathcal{B}_{n_l} \end{cases} \quad (13)$$

Comme les relations (7)-(10) sont vraies à partir de différentes valeurs de n , on regroupe alors les relations pour $n = 0$ et $n = 1$ en une seule relation matricielle à laquelle on affecte la valeur $n = 1$; d'où :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \\ E_1 \\ E_0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ K_0 \\ K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Pour $n \geq 2$, on écrit simplement :

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} A_n \\ C_n \\ E_n \\ G_n \end{pmatrix}; \quad \mathcal{B}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Dans (13), les $M_{i,j}$ sont des matrices de dimensions 4×4 déduites à partir des relations (7)-(10). Le système (13) contient une matrice tridiagonale carrée $4n_l \times 4n_l$. Il est résolu d'une manière classique. On fait croître le nombre de termes n_l (afin d'obtenir la précision voulue). Les résultats du calcul montrent que ce nombre n_l doit croître lorsque la distance particule-paroi diminue. Il croît aussi pour des distances particule-paroi constantes quand la longueur de glissement augmente. Par exemple, pour le problème de rotation, pour une distance particule-paroi $\ell/a - 1 = 10^{-3}$ et une longueur de glissement $\lambda = 1$, une précision de 10^{-7} pour le couple nécessite $n_l = 3700$.

4 Résultats

Les résultats pour les coefficients de frottements en translation et en rotation sont en bon accord avec [2, 5]. Ils sont en outre plus précis, même pour de petites distances particule-paroi $\ell/a - 1 = 10^{-3}$. Nos résultats pour le problème de cisaillement dans le cas particulier d'une condition de non-glissement sur la paroi sont comparés avec [1]. L'accord est excellent même pour de petites distances $\ell/a - 1 = 10^{-3}$.

La vitesse de translation et de rotation d'une sphère libre dans un écoulement de cisaillement s'obtient en écrivant que la somme des forces et des couples est nulle. On résout alors ce système à deux inconnues (U, Ω) :

$$\begin{cases} F_x^t + F_x^r + F_x^c = 0 \\ C_y^t + C_y^r + C_y^c = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Les résultats pour la vitesse de translation $U^* = U/(kl)$ et la vitesse de rotation $\Omega^* = \Omega/(k/2)$ d'une sphère libre dans un écoulement de cisaillement sont donnés figure 1. Lorsque $\ell/a \rightarrow \infty$, $U^* \rightarrow 1$ et $\Omega^* \rightarrow 1$. On remarque pour le cas de la translation que lorsque le glissement $\lambda = 0$, la vitesse de translation $U^* \rightarrow 0$ pour $\ell/a \rightarrow 0$, alors que pour $\lambda > 0$, U^* tend vers une constante. La vitesse de rotation passe par un maximum pour une certaine valeur de λ .

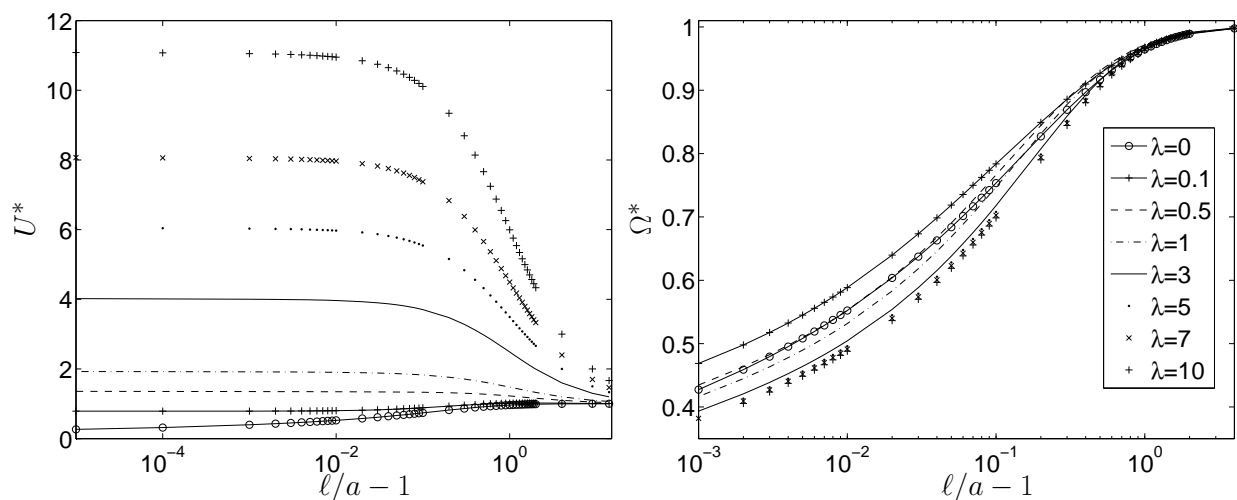


FIG. 1 – Vitesses de translation et de rotation pour une sphère en mouvement libre.

5 Conclusions

Nous avons obtenu des expressions analytiques pour la force et le couple qui s'exercent sur une sphère en translation et rotation dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi plane sur laquelle s'applique une condition de glissement. Nous avons utilisé pour ce faire la méthode des coordonnées bisphériques. La solution débouche sur un système matriciel infini qui permet de déterminer des séries de coefficients inconnus. Nous avons établi une technique numérique (écrite en langage FORTRAN) qui permet d'obtenir un nombre assez important de ces coefficients.

Pour les trois problèmes de cisaillement avec sphère fixée, de sphère en rotation et translation au voisinage d'une paroi plane, nous obtenons une précision de 10^{-7} pour la force et le couple, même pour de très petites distances particule-paroi de l'ordre de 10^{-3} . Les vitesses de translation et de rotation d'une sphère libre dans un écoulement de cisaillement sont obtenues avec une précision de 10^{-7} .

Ces résultats pourront s'appliquer par exemple à la dispersion de particules près d'une paroi sur laquelle s'applique une condition de glissement.

Références

- [1] Chaoui, M. ; Feuillebois, F. : Creeping flow around a sphere in a shear flow close to a wall, Quart. J. Mech. Appl. Math. **56** (3), 381-410, 2003.
- [2] Davis, A.M.J., Kezirian, M.T., Brenner, H. On the Stokes-Einstein model of surface diffusion along solid surfaces : Slip boundary conditions J. Coll. Interf. Sci. 165 (1994) 129-140.
- [3] Dean, W. R. ; O'Neill, M. E. : A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere, Mathematika **10**, 13-24, 1963.
- [4] Happel, J. ; Brenner, H. : *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. , 1965.
- [5] M.T.Kezirian, Hydrodynamics with a Wall-Slip Boundary Condition for a Particle Moving Near a Plane Wall Bounding a Semi-Infinite Viscous Fluid. Master of Science in Chemical Engineering at the Massachusetts Institute of Technology, June 1992.
- [6] O'Neill, M. E. : A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere, Mathematika. **11**, 67-74, 1964.